



مجله‌ی ریاضی شریف

سال چهارم شماره‌ی نهم



مجله ریاضی شریف

اسفند ۹۵، شماره نهم

صاحب امتیاز: انجمن علمی و فوق برنامه‌ی دانشکده‌ی علوم ریاضی

مدیر مسئول: دکتر امیر جعفری

سردبیر: کیمیا کاظمیان

همکاران این شماره: دکتر محمد صفدری، دکتر امیر جعفری، دکتر کسری

علیشاهی، سامان حبیبی اصفهانی، سامان جهانگیری، علی چراغی، امیرحسین

ذوالفقاری، سینا رسولی، محمد امین شعبانی، شایان غلامی، سمیه یاسمن،

ابوالفضل طاهری، مجتبی عبدالملکی، حمید ملک، امیرحسین مکاره چی، سید

سروش هاشمی، حامد شیرزاد



فهرست مطالب

روش مستقیم در حساب تغییرات	...	۱
از تابع زتای اویلر تا L -توابع آرتین	...	۹
همولوژی فلورگره و کاربردهایی در توپولوژی بعد پایین	...	۱۹
دینامیک همسان ریختی‌های روی دایره	...	۳۳
(قسمت اول) k -لیست یکتا رنگ پذیری در گراف‌ها	...	۴۲
توصیفگر ترکیبی ژرف	...	۴۶
آشنایی با روش چند شبکه‌ای	...	۵۶
مسئله کاکیا برای حالت متناهی	...	۶۶
سوالات	...	۷۰
معرفی کتاب: دوره‌ای مقدماتی در مورد خمینه‌های هموار	...	۷۹



روش مستقیم در حساب تغییرات

دکتر محمد صفدری

۱ مقدمه

در این جا t_1 زمانی است که ذره در A است و t_2 زمانی که ذره در B است. همچنین $v = \frac{ds}{dt}$ سرعت ذره است. هدف این است که زمان حرکت یعنی Δt کمترین مقدار ممکن را داشته باشد. اگر y ارتفاع ذره باشد، به خاطر پایستگی انرژی در حرکت با شتاب گرانشی ثابت g داریم $v = \sqrt{2gy}$. فرض کنید خم مورد نظر به صورت $(x(y), y)$ داده شده باشد. آنگاه می‌دانیم که

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1} dy$$

پس خواهیم داشت

$$\Delta t = \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{\frac{(dx/dy)^2 + 1}{2gy}} dy$$

بنابراین مسئله تبدیل شد به پیدا کردن تابع $x(y)$ که مقدار انتگرال بالا را به حداقل رساند و در شرایط مرزی $x(y_1) = x_1$ ، $x(y_2) = x_2$ صدق کند.

پیش از آنکه به حل مسئله بالا بپردازیم بگذارید آن را تعمیم دهیم. مسئله بالا مثالی ساده از مسئله اصلی حساب تغییرات است. فرض کنید $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ یک باز کران دار و $F: \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد. می‌خواهیم تابع $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ را بیابیم که مقدار تابع

$$I[u] := \int_{\Omega} F(x, u(x), \nabla u(x)) dx$$

را به حداقل رساند و در شرط مرزی $u|_{\partial\Omega} = u_0|_{\partial\Omega}$ صدق کند. در این جا $u_0: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ یک مقدار مرزی داده شده است.

دو نقطه $A = (x_1, y_1)$ و $B = (x_2, y_2)$ را در یک صفحه قائم در فضا در نظر بگیرید. می‌خواهیم خمی بین این دو نقطه بیابیم به طوری که هرگاه ذره‌ای را که بدون اصطکاک و تنها تحت تاثیر گرانش حرکت می‌کند، و تنها می‌تواند روی خم حرکت کند، در A رها کنیم در کمترین زمان به B برسد. این مسئله به مسئله Brachistochrone (در لغت به معنای کمترین زمان) معروف است.

این مسئله اولین بار توسط گالیله در ۱۶۳۸ در نظر گرفته شد. اما وی نتوانست به طور کامل آن را حل کند. یوهان برنولی در ۱۶۹۶ مسئله را در مجله Acta Eruditorum مطرح کرد و ریاضیدانان را به تلاش برای حل آن دعوت کرد. در پاسخ به وی چند نفر از جمله لایبنیتز، لوپیتال و برادر بزرگترش ژاکوب برنولی راه حل‌هایی برای مسئله ارائه کردند.

نیوتن هم راه حلی برای این مسئله ارائه کرد ولی نامه‌اش را بدون نام فرستاد. برنولی در نقل مشهوری راجع به راه حل نیوتن گفته است که "شیر را از جای پنجه‌اش شناختم".

اگر بخواهیم این مسئله را با روش‌های جدید حل کنیم خواهیم

داشت:

$$\Delta t = \int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{ds}{v}$$

انتگرال گیری جزء به جزء استفاده کنیم. توجه کنید که چون v روی $\partial\Omega$ صفر است در این انتگرال گیری جمله مرزی نخواهیم داشت. پس

$$0 = \int_{\Omega} [\nabla_u F - \nabla_x(\nabla_{\xi} F)]v \, dx$$

اما این تساوی برای هر v برقرار است. پس تابع u در معادله دیفرانسیل پاره‌ای زیر صدق می‌کند

$$\nabla_u F(x, u, \nabla u) - \nabla_x(\nabla_{\xi} F(x, u, \nabla u)) = 0$$

که به آن معادله اوایلر-لاگرانژ می‌گویند.

با استفاده از معادله اوایلر-لاگرانژ می‌توان اطلاعات قابل توجهی راجع به جواب مسئله یعنی u به دست آورد. به طور خاص در بعد یک، که معادله اوایلر-لاگرانژ یک معادله دیفرانسیل عادی است، در بسیاری از موارد می‌توان جواب را به طور کامل مشخص کرد. مثلا مسأله Brachistochrone را در نظر بگیرید. معادله اوایلر-لاگرانژ برای این مسأله به صورت زیر به دست می‌آید (توجه کنید که در این مسأله متغیر مستقل y و $u = x(y)$ جواب است).

$$F(y, u, \xi) = \sqrt{\frac{\xi^2 + 1}{2gy}}$$

$$\nabla_u F(y, x, x') - \nabla_y(\nabla_{\xi} F(y, x, x')) = 0$$

ولی F به u بستگی ندارد پس $\nabla_u F = 0$ است و داریم

$$\nabla_y(\nabla_{\xi} F(y, x, x')) = 0 \Rightarrow \nabla_{\xi} F(y, x, x') = c$$

که c یک عدد ثابت است. حال داریم

$$\nabla_{\xi} F = \frac{\xi}{\sqrt{(2gy)(\xi^2 + 1)}}$$

بنابراین معادله اوایلر-لاگرانژ می‌شود

$$\frac{x'}{\sqrt{(2gy)(x'^2 + 1)}} = c \Rightarrow \frac{x'^2}{y(x'^2 + 1)} = 2gc^2 =: \frac{1}{2a}$$

در این جا a ثابتی است که برای راحتی به این صورت تعریف شده است. اگر این معادله را برای x' حل کنیم خواهیم داشت

$$x' = \sqrt{\frac{y}{2a - y}} \Rightarrow x = \int \sqrt{\frac{y}{2a - y}} \, dy$$

مسائل بسیاری در ریاضیات، علوم و مهندسی به صورت بالا بیان می‌شوند. به طور خاص در فیزیک فرمول بندی بالا از یک مسئله را فرمول بندی لاگرانژی می‌نامند. تقریبا تمام نظریات بنیادی در فیزیک به صورت لاگرانژی فرمول بندی می‌شوند یا قابل فرمول بندی هستند. در متون فیزیک معمولا F را با L نمایش می‌دهند و به آن لاگرانژی یا چگالی لاگرانژی می‌گویند، و I را با S نمایش می‌دهند و به آن کنش می‌گویند. به عنوان مثال در مکانیک کلاسیک لاگرانژی یک سیستم ذرات برابر تفاضل انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل آن سیستم است.

۲ معادله اوایلر-لاگرانژ

به مسئله اصلی برگردیم. I را می‌توان به عنوان تابعی با برد \mathbb{R} در نظر گرفت که دامنه آن فضایی از توابع روی $\bar{\Omega}$ هستند. درباره این فضای توابع جلوتر به طور مفصل صحبت خواهیم کرد. فعلا کافی است بدانیم که اعضای این فضا روی $\partial\Omega$ برابر با u_0 می‌باشند. هدف این است که تابع u را در این فضا بیابیم که نقطه مینیمم I باشد. با شبیه سازی با حساب دیفرانسیل بعد متناهی می‌توان حدس زد که اگر I مشتق پذیر بود، مشتق آن در نقطه u می‌بایست برابر صفر می‌شد. اگرچه می‌توان این مطلب را دقیق کرد فعلا بگذارید تا به صورت فرمال از I در u مشتق بگیریم. فرض کنید v تابعی روی $\bar{\Omega}$ است که روی $\partial\Omega$ برابر صفر است. v در واقع نقش برداری را دارد که می‌خواهیم در جهت آن مشتق بگیریم. برای هر $t \in \mathbb{R}$ تابع $u + tv$ روی مرز Ω برابر u_0 است، پس متعلق به دامنه I است. حال داریم

$$I[u + tv] = \int_{\Omega} F(x, u + tv, \nabla u + t\nabla v) \, dx$$

اگر نسبت به t مشتق بگیریم و t را برابر صفر قرار دهیم خواهیم داشت

$$0 = I'[u] = \int_{\Omega} \nabla_u F(x, u, \nabla u)v + \nabla_{\xi} F(x, u, \nabla u) \cdot \nabla_x v \, dx$$

در این جا ξ متغیری است در F که ∇u را در آن جایگذاری کرده‌ایم. همچنین برای اینکه ابهامی پیش نیاید مشتق v را که نسبت به x است با $\nabla_x v$ نمایش داده‌ایم. اکنون در جمله دوم انتگرال بالا می‌توانیم از

است. ریمان فرض کرد که چون این تابع از پایین کران‌دار است پس حتماً مینیمم دارد. وی این فرض خود را «اصل دیریشله» نامید. در آن زمان این فرض معقول و بی‌نیاز به اثبات به نظر می‌رسید. ولی باید در نظر داشت که دامنه تابع I یک فضای با بعد نامتناهی از توابع است و شهودی که از فضاهای متناهی البعد داریم لزوماً درباره آن درست نیست. کارل وایرستراس، که مفاهیم حد و پیوستگی را دقیق کرد، اولین مثال نقض برای اصل دیریشله را یافت. وی نشان داد که تابع

$$I[u] = \int_0^1 x(u'(x))^2 dx$$

که به وضوح از پایین کران‌دار است، در بین توابع $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ با شرط مرزی $u(0) = u(1) = 0$ مینیمم خود را اختیار نمی‌کند. با این حال، هیلبرت نشان داد که اصل دیریشله برای برخی توابع، از جمله تابعی که ریمان در نظر داشت، درست است.

هیلبرت همچنین مسأله نوزدهم از لیست مشهور مسائل خود را که در سال ۱۹۰۰ در کنگره بین‌المللی ریاضیدانان ارائه کرد، به حساب تغییرات اختصاص داد. وی پرسید که اگر تابع I توسط یک تابع تحلیلی F تعریف شده باشد آیا تابع مینیمم‌کننده I نیز یک تابع تحلیلی است؟ البته باید فرض کنیم که $D_{\xi\xi}^2 F$ یک ماتریس مثبت معین است، یعنی F نسبت به ξ محدب است. این فرض معادل این است که معادله اویلر-لاگرانژ متناظر یک معادله دیفرانسیل بیضوی باشد. پاسخ مسأله نوزدهم هیلبرت مثبت است. اولین قدم در راه اثبات آن را برنستاین در ۱۹۰۴ برداشت. او ثابت کرد که اگر فرض کنیم u تابعی C^3 است آنگاه تحلیلی است. ریاضیدانان دیگری برای حل این مسأله تلاش کردند و توانستند فرض همواری اولیه یعنی C^3 بودن u را ضعیف‌تر کنند. اما روش مستقیم در حساب تغییرات، که در ادامه به آن می‌پردازیم، وجود جواب‌هایی با این فرض‌های ضعیف‌تر همواری را هم نتیجه نمی‌دهد. بنابراین برای کامل شدن اثبات احتیاج به ابزارهای نوینی بود تا فرض همواری اولیه روی u را باز هم ضعیف‌تر کنند. این کار به طور مستقل توسط ریاضیدان ایتالیایی انیو دی‌جیورجی و ریاضیدان آمریکایی جان نش در ۱۹۵۷ انجام شد و حل مسأله نوزدهم هیلبرت توسط این دو کامل گردید.

با تغییر متغیر $y = a(1 - \cos \theta)$ به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} x &= \int \sqrt{\frac{a(1 - \cos \theta)}{a(1 + \cos \theta)}} a \sin \theta d\theta = \int a \tan \frac{\theta}{2} \sin \theta d\theta \\ &= \int a(1 - \cos \theta) d\theta = a(\theta - \sin \theta) + C \end{aligned}$$

در نتیجه خم جواب را می‌توان به صورت پارامتری

$$x = a(\theta - \sin \theta) + C$$

$$y = a(1 - \cos \theta)$$

نمایش داد. ثابت‌های a و C باید طوری تعیین شوند که خم از دو نقطه ابتدایی و انتهایی A و B بگذرد. این خم در واقع قسمتی از یک سیکلوئید است، خمی که یک نقطه ثابت روی یک دایره که در حال حرکت روی یک خط راست است طی می‌کند.

اگر چه روش فوق در حالت یک بعدی کاراست، اما وقتی که بعد از یک بیشتر است نمی‌توان آن را به کار برد. زیرا در این حالت معادله اویلر-لاگرانژ یک معادله دیفرانسیل پاره‌ای می‌باشد و این معادلات را به جز در حالت‌های خیلی خاص نمی‌توان به طور صریح حل کرد. در واقع در بسیاری از موارد برای آنکه نشان دهیم معادله اویلر-لاگرانژ جواب دارد ثابت می‌کنیم که تابع I مینیمم دارد و مینیمم آن در معادله صدق می‌کند. این روش را ریمان در تز دکتری خود در ۱۸۵۱ به کار برد تا قضیه نگاشت ریمان را ثابت کند. این قضیه می‌گوید هر زیرمجموعه سره باز و همبند ساده از صفحه مختلط را می‌توان با یک نگاشت یک به یک، پوشا و تحلیلی به گوی واحد تصویر کرد. برای اثبات این قضیه، ریمان احتیاج داشت تا معادله دیفرانسیل پاره‌ای زیر را حل کند:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

در این جا $\Omega \subset \mathbb{C}$ یک باز همبند ساده داده شده است و g تابعی پیوسته و مشخص روی $\partial\Omega$ می‌باشد. همچنین $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ لاپلاسین تابع u است.

به سادگی می‌توان دید که معادله $\Delta u = 0$ معادله اویلر-لاگرانژ

متناظر تابع

$$I[u] = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx dy = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dx dy$$

۳ روش مستقیم و فضاهای سوبولف

باز کران دار $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ و عدد $1 \leq p < \infty$ را در نظر بگیرید. فضای توابع p -انتگرال‌پذیر روی Ω را به صورت

$$L^p(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{\Omega} |f|^p dx < \infty\}$$

تعریف می‌کنیم. فضاهای L^p فضای برداری نرم‌دار هستند که نرم $f \in L^p$ به صورت

$$\|f\|_{L^p} := \left(\int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

تعریف می‌شود. خواص طبیعی نرم L^p به سادگی به دست می‌آید:

$$\begin{cases} \|f\|_{L^p} = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ a.e.} \\ c \in \mathbb{R} \Rightarrow \|cf\|_{L^p} = |c| \|f\|_{L^p} \\ \|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p} \end{cases}$$

با استفاده از نرم می‌توان فاصله هر دو تابع f و g را در فضای L^p به صورت $\|f - g\|_{L^p}$ تعریف کرد. می‌توان نشان داد که فضای L^p با این متریک یک فضای کامل است. به فضاهای نرم‌دار کامل فضای باناخ نیز می‌گویند.

خود فضاهای L^p را نمی‌توان به عنوان دامنه تابع I به کار برد. زیرا برای تعریف I باید از توابع مشتق بگیریم و توابع L^p حتی پیوسته هم نیستند. البته اگر بخواهیم دامنه I را فضای توابع C^1 در نظر بگیریم باز به مشکل برمی‌خوریم. برای اینکه اثبات مستقیم وجود مینیمم در فضای توابع C^1 بسیار سخت است. پس باید فضایی از توابع بیابیم که به نوعی بین فضای L^p و فضای توابع C^1 باشد. برای این کار به مفهوم مشتق ضعیف احتیاج داریم. اگر تابع $w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر بود و ϕ تابعی هموار بود که محمل آن یعنی مجموعه $\{\phi = 0\}$ درون Ω بود (در این حالت می‌نویسیم $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$) آنگاه با مشتق‌گیری جزء به جزء به دست می‌آوریم

$$\int_{\Omega} w \nabla_i \phi dx = - \int_{\Omega} \phi \nabla_i w dx \quad i = 1, \dots, n$$

توجه کنید که ϕ در همسایگی $\partial\Omega$ صفر است بنابراین در این انتگرال‌گیری جزء به جزء جمله مرزی نداریم. اکنون همانند خیلی از تعمیم‌ها در ریاضیات، قضیه فوق را به عنوان تعریف به کار می‌بریم. می‌گوییم $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ مشتق ضعیف تابع w است اگر برای

همان‌طور که دیدیم وقتی بعد از یک بیشتر است حل معادله اویلر-لاگرانژ به سادگی امکان‌پذیر نیست. بنابراین برای اثبات اینکه تابع I نقطه مینیمی مثل u دارد نیاز داریم تا روش دیگری را به کار ببریم. یعنی می‌خواهیم به طور مستقیم ثابت کنیم که I مینیمم خود را اختیار می‌کند. به یاد آورید که معادله اویلر-لاگرانژ از مشتق‌گیری از I به دست آمده بود. پس ما می‌خواهیم مینیمم را بدون مشتق‌گیری پیدا کنیم. برای سادگی از این‌جا به بعد فرض می‌کنیم که I به صورت زیر تعریف شده است:

$$I[u] = \int_{\Omega} F(\nabla u(x)) dx$$

یعنی فرض می‌کنیم که F به x و u بستگی ندارد. همچنین فرض می‌کنیم F تابعی C^1 است. می‌دانیم که $I : X \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی است که دامنه آن، یعنی X ، فضایی از توابع است که روی $\partial\Omega$ مقدار مشخصی را اختیار می‌کنند. درباره X کمی جلوتر صحبت می‌کنیم. فعلاً این را می‌گوییم که X کران‌دار نیست، بنابراین نمی‌تواند فشرده باشد. حال بگذارید کمی از شهود خود در بعد متناهی کمک بگیریم. فرض کنید می‌خواهیم مینیمم تابع $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را پیدا کنیم. چون دامنه f فشرده نیست نمی‌توانیم از روش‌های معمول بهره بگیریم. ولی ابزارهایی وجود دارند که در این حالت به کار می‌آیند. یکی از آنها آنالیز محدب است که از ایده بسیار ساده‌ای استفاده می‌کند. می‌خواهیم شرایطی روی f بگذاریم تا مطمئن شویم مینیمم دارد. اولاً باید فرض کنیم که f از پایین کران‌دار است. یک فرض مفید دیگر این است که f تابعی محدب (و در نتیجه پیوسته) باشد. اما هنوز این فرض‌ها کافی نیستند. مثلاً تابع e^x روی \mathbb{R} محدب و از پایین کران‌دار است ولی مینیمم خود را اختیار نمی‌کند. برای اینکه بر این مشکل غلبه کنیم کافی است فرض کنیم که حد f در بینهایت نامتناهی است. ساده است که ببینیم با این شرایط f حتماً مینیمم خود را اختیار خواهد کرد. جالب این است که همین شرط‌های ساده در فضاهای با بعد نامتناهی هم وجود مینیمم را تضمین می‌کند. اما پیش از آنکه این مطلب را توضیح دهیم باید مشخص کنیم که فضای X چیست.

هر $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ داشته باشیم:

$$\|f\|_{W^{1,p}} := (\|f\|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^n \|\nabla_i f\|_{L^p}^p)^{\frac{1}{p}}$$

تعریف می‌شود.

اکنون می‌توانیم دامنه تابع I را فضای X قرار دهیم که

$$X := \{w \in W^{1,p}(\Omega) \mid w = u_0 \text{ on } \partial\Omega\}$$

در این جا u_0 مقدار مرزی داده شده است. برای اینکه مقدار I روی X متناهی باشد فرض می‌کنیم که برای $C, b > 0$ داریم:

$$|F(\xi)| \leq C|\xi|^p + b \quad (1)$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} |I[w]| &\leq \int_{\Omega} |F(\nabla w)| dx + b|\Omega| \\ &\leq C \int_{\Omega} |\nabla w|^p dx + b|\Omega| \\ &< \infty \end{aligned}$$

که منظور از $|\Omega|$ حجم Ω است. همچنین فرض می‌کنیم که F و در نتیجه I از پایین کران‌دار باشند. قرار دهید

$$m := \inf_{w \in X} I[w] > -\infty$$

در این صورت طبق تعریف اینفیم دنباله u_k در X وجود دارد که $I[u_k] \rightarrow m$. اولین قدم برای یافتن نقطه مینیم u این است که نشان دهیم دنباله u_k زیردنباله‌ای همگرا دارد. یعنی باید از نوعی فشردگی استفاده کنیم. ابتدا نشان می‌دهیم که دنباله u_k در $W^{1,p}$ کران‌دار است. گرچه کران‌داری در فضاهای با بعد نامتناهی برای فشردگی کافی نیست ولی شرطی لازم است. برای اثبات این مطلب باید شرطی اضافه روی F بگذاریم. پس فرض می‌کنیم برای $c, a > 0$ داریم

$$F(\xi) \geq c|\xi|^p - a \quad (2)$$

این فرض متناظر فرضی است که در بعد متناهی داشتیم که حد تابع در بینهایت نامتناهی شود. به این فرض وادارندگی (coercivity)

$$\int_{\Omega} w \nabla_i \phi dx = - \int_{\Omega} \phi v_i dx \quad i = 1, 2, \dots, n$$

در این حالت می‌نویسیم $\nabla w = v$. می‌توان نشان داد که با کمی شرایط اضافی تابعی که مشتق ضعیف دارد تقریباً همه جا به معنی کلاسیک مشتق پذیر است و مشتق کلاسیک آن برابر مشتق ضعیف آن است. ولی باید توجه داشت که توابعی که تقریباً همه جا مشتق پذیرند لزوماً به معنی ضعیف مشتق پذیر نیستند. به عنوان مثال تابع $f(x) = |x|$ روی \mathbb{R} به جز در مبدأ، مشتق پذیر است. می‌توانید برای تمرین نشان دهید که f به صورت ضعیف هم مشتق پذیر است و داریم

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

توجه کنید که مشتق ضعیف تابعی است که در یک انتگرال ظاهر شده است، و اگر مقادیر آن را در یک مجموعه اندازه صفر تغییر دهیم مقدار انتگرال تغییر نمی‌کند. بنابراین اصولاً مشتق ضعیف تقریباً همه جا تعریف می‌شود و نه همه جا. حال تابع زیر را روی \mathbb{R} در نظر بگیرید.

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

این تابع هم به جز در مبدأ همه جا مشتق پذیر است. به عنوان تمرین دیگر می‌توانید نشان دهید که g به صورت ضعیف مشتق پذیر نیست. (راهنمایی: اگر g به صورت ضعیف مشتق پذیر باشد، مشتق ضعیف آن باید تقریباً همه جا صفر باشد.)

حال با استفاده از این مفاهیم می‌توانیم دامنه مناسب تابع I را پیدا کنیم. ابتدا فضاهای سوبولف $W^{1,p}(\Omega)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$W^{1,p}(\Omega) := \{f \in L^p(\Omega) \mid$$

به صورت ضعیف مشتق پذیر است و

$$\nabla_i f \in L^p(\Omega) \quad i = 1, 2, \dots, n\}$$

برای اثبات اینکه u مینیمم است احتیاج به همه قدرت پیوستگی نداریم. زیرا پیوستگی نتیجه می‌دهد که

$$I[u] = \lim I[u_{k_j}] = m$$

اما ما تنها نیاز داریم که بدانیم

$$I[u] \leq \lim I[u_{k_j}] = m$$

توجه کنید که نیمه دیگر تساوی یعنی نامساوی $I[u] \geq m$ از تعریف m نتیجه می‌شود. چون m مقدار اینفیمم I بود. پس می‌توان گفت که ما فقط به نیمی از پیوستگی احتیاج داریم. به شرط بالا اصطلاحاً نیم‌پیوستگی از پایین گفته می‌شود و از آنجا که از همگرایی ضعیف استفاده کرده‌ایم می‌گوییم I نیم‌پیوسته ضعیف از پایین است.^۱ حال بگذارید کمی غیر دقیق بحث کنیم. پیوستگی I نسبت به همگرایی ضعیف معادل این بود که F خطی باشد یا معادلاً داشته باشیم

$$F(t\xi_1 + (1-t)\xi_2) = tF(\xi_1) + (1-t)F(\xi_2)$$

که $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ و $t \in [0, 1]$. اگر بخواهیم I نیم‌پیوسته ضعیف باشد می‌توان توقع داشت که نیمی از تساوی بالا برای آن کافی باشد، یعنی داشته باشیم

$$F(t\xi_1 + (1-t)\xi_2) \leq tF(\xi_1) + (1-t)F(\xi_2)$$

این رابطه چیزی نیست مگر محدب بودن F . اکنون می‌توانیم به طور دقیق استدلال کنیم و به سادگی نشان دهیم که محدب بودن F نتیجه می‌دهد که I نیم‌پیوسته ضعیف از پایین است. فرض کنید $u_j \rightarrow u$ ، آنگاه

$$\begin{aligned} I[u_j] &= \int_{\Omega} F(\nabla u_j) dx \\ &\geq \int_{\Omega} F(\nabla u) + \nabla_{\xi} F(\nabla u) \cdot (\nabla u_j - \nabla u) dx \end{aligned} \quad (4)$$

در این‌جا از این مطلب استفاده کرده‌ایم که صفحه مماس بر نمودار یک تابع محدب کاملاً زیر نمودار قرار دارد. یعنی صفحه مماس در هر نقطه $\nabla u(x)$ که با معادله

$$F(\nabla u(x)) + \nabla_{\xi} F(\nabla u(x)) \cdot (y - \nabla u(x))$$

^۱ اگر بخواهیم دقیق باشیم باید به جای \lim از \liminf استفاده کنیم ولی در این‌جا \liminf و \lim یکی هستند.

می‌گویند. این نامساوی نتیجه می‌دهد که برای $w \in X$ داریم

$$\begin{aligned} I[w] &\geq c \int_{\Omega} |\nabla w|^p dx - a|\Omega| \\ &\geq c_1 \|w\|_{W^{1,p}} - c_2 \end{aligned} \quad (3)$$

که $c_1, c_2 > 0$. در این‌جا ما از نامساوی پوانکاره هم استفاده کرده‌ایم که می‌گوید برای $w \in W^{1,p}$ که روی $\partial\Omega$ برابر u_0 است داریم

$$\|w\|_{L^p} \leq C_1 \|\nabla w\|_{L^p} + C_2$$

که C_1, C_2 به w بستگی ندارند و فقط به Ω و u_0 بستگی دارند (اثبات در [۳]).

حال چون $m \rightarrow I[u_k]$ پس دنباله $I[u_k]$ کران‌دار است. با استفاده از ۳ به دست می‌آوریم که $\|u_k\|_{W^{1,p}}$ هم کران‌دار است. اما همان‌طور که قبلاً گفتیم زیرمجموعه‌های کران‌دار $W^{1,p}$ لزوماً فشرده نیستند. توجه کنید که فشردگی در این‌جا نسبت به متریک روی $W^{1,p}$ است که توسط نرم آن تعریف می‌شود. با این حال می‌توان نشان داد که زیرمجموعه‌های کران‌دار $W^{1,p}$ وقتی $p > 1$ است به یک معنا فشرده هستند. این فشردگی را فشردگی ضعیف می‌نامند. با استفاده از فشردگی ضعیف می‌توانیم زیر دنباله u_{k_j} و تابع $u \in W^{1,p}$ را پیدا کنیم که برای هر $v \in W^{1,q}$ که $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ است داشته باشیم

$$\int_{\Omega} u_{k_j} v + \nabla u_{k_j} \cdot \nabla v dx \rightarrow \int_{\Omega} uv + \nabla u \cdot \nabla v dx$$

در این حالت می‌گوییم که u_{k_j} به طور ضعیف به u همگراست و می‌نویسیم $u_{k_j} \rightharpoonup u$. توقع داریم که تابع $u \in W^{1,p}$ را که به این صورت یافتیم نقطه مینیمم تابع I باشد. می‌توان نشان داد که u روی $\partial\Omega$ برابر u_0 است. پس تنها می‌ماند که نشان دهیم $I[u] = m$. برای این کار کافی است که I نسبت به همگرایی ضعیف پیوسته باشد. اما پیوستگی نسبت به همگرایی ضعیف شرطی بسیار قوی است که نتیجه می‌دهد F باید به صورت

$$F(\xi) = a_1 \cdot \xi + a_2$$

باشد، که $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^n$ بردارهایی ثابت‌اند. به عبارت دیگر تابع I باید خطی باشد، ولی در بیشتر موارد I غیر خطی است. خوشبختانه

چون این تساوی برای هر ϕ برقرار است باید داشته باشیم

$$\Delta u = \sum D_{ii}^x u = 0 \text{ a.e.}$$

یعنی توانستیم معادله لاپلاس را حل کنیم.

۴ مسئله پلاتو و رویه‌های مینیمال

خم ساده و بسته C را در \mathbb{R}^2 در نظر بگیرید. می‌خواهیم رویه‌ای در \mathbb{R}^2 پیدا کنیم که مرز آن C باشد و مساحت آن کمترین مقدار ممکن باشد. چنین رویه‌ای را یک رویه مینیمال می‌نامند. این مسأله را اولین بار لاگرانژ در ۱۷۶۰ مطرح کرد، اما به آن مسأله پلاتو گفته می‌شود. پلاتو فیزیکدانی بلژیکی در قرن نوزدهم بود که رفتار حباب‌های صابون را مطالعه می‌کرد. چون انرژی حباب‌های صابون متناسب با مساحت سطح آن‌هاست و سیستم‌های فیزیکی تمایل دارند که انرژی خود را به حداقل برسانند، حباب‌های صابون به شکل رویه‌های مینیمال درمی‌آیند. مسأله پلاتو تا مدت‌ها حل نشده باقی ماند تا اینکه در ۱۹۳۰ مستقلاً توسط رادو و داگلاس حل شد. روش داگلاس نوآورانه‌تر بود و هیچ شرط اضافی روی خم C تحمیل نمی‌کرد. به خاطر حل این مسأله داگلاس یکی از دو نفری بود که در سال ۱۹۳۶ اولین مدال فیلدز را دریافت کردند.

برای سادگی بگذارید فرض کنیم که رویه مینیمالی که به دنبالش می‌گردیم نمودار تابع u روی باز $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ است. همچنین خم C توسط نمودار یک مقدار مرزی u_0 داده شده است. در این صورت u مقدار انتگرال متناظر مساحت نمودار یعنی

$$I[u] = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dx$$

را به حداقل می‌رساند. در این حالت تابع F به صورت

$$F(\xi) = \sqrt{1 + |\xi|^2}$$

است و داریم

$$|F(\xi)| \leq 1 + |\xi|$$

اگر این را با نامساوی ۱ مقایسه کنیم می‌بینیم که باید داشته باشیم $p = 1$. ولی اگر بخواهیم روش مستقیم را به کار ببریم به مشکل برمی‌خوریم. زیرا زیرمجموعه‌های کران‌دار $W^{1,1}$ لزوماً فشرده

داده شده است زیر نمودار $F(y)$ است. حال کافی است قرار دهیم $y = \nabla u_j(x)$ و از طرفین نامساوی انتگرال بگیریم.

اکنون به نامساوی ۴ برمی‌گردیم. اگر از طرفین وقتی $j \rightarrow \infty$

حد بگیریم خواهیم داشت

$$\lim I[u_j] \geq I[u] + \lim \int_{\Omega} \nabla_{\xi} F(\nabla u) \cdot (\nabla u_j - \nabla u) dx$$

اما ∇u_j به طور ضعیف به ∇u همگراست. یعنی اگر $\nabla_{\xi} F(\nabla u)$ در L^q باشد آنگاه حد سمت راست در نامساوی بالا برابر صفر است.

برای اینکه مطمئن شویم این اتفاق می‌افتد فرض می‌کنیم

$$|\nabla_{\xi} F(\zeta)| \leq C|\zeta|^{p-1} \quad (5)$$

آنگاه خواهیم داشت

$$|\nabla_{\xi} F(\nabla u)| \leq C|\nabla u|^{p-1}$$

اما $|\nabla u|^{p-1} \in L^q$ زیرا $q = \frac{p}{p-1}$ پس

$$\int_{\Omega} (|\nabla u|^{p-1})^q dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx < \infty$$

در نتیجه نشان دادیم که اگر F محدب و C^1 باشد و در نامساوی‌های ۱ و ۲ و ۵ صدق کند آنگاه تابع I مینیمم خود را روی X اختیار می‌کند.

به عنوان مثال اگر قرار دهیم $p = 2$ و

$$I[w] = \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx$$

آنگاه I مینیمم خود را در نقطه‌ای مثل u اختیار خواهد کرد. یعنی در واقع موفق شده‌ایم اصل دیریشله را اثبات کنیم. اگر استدلال ابتدای مقاله را تکرار کنیم و از I در u مشتق بگیریم برای هر $\phi \in C_c^{\infty}(\Omega)$ به دست می‌آوریم که

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \nabla_i u \nabla_i \phi dx = 0$$

حال اگر بتوانیم نشان دهیم (اثبات در [۳]) که ∇u هم مشتق ضعیف دارد نتیجه می‌شود که

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n D_{ii}^x u \right) \phi dx = 0$$

توجه کنید که در تعریف قبلی اندازه μ_i برابر $(\nabla_i w) dx$ بود که dx اندازه لبگ استاندارد است و $\nabla_i w$ مشتق ضعیف w بود که تابعی انتگرال‌پذیر بود. ولی در این‌جا مشتق ضعیف w نه یک تابع انتگرال‌پذیر، بلکه یک اندازه است. جزئیات بیشتر درباره این توابع را می‌توانید در منبع [۴] ببینید. مطالعه توابع BV احتیاج به ابزارهای پیشرفته‌ی آنالیز از جمله نظریه هندسی اندازه دارد. در این‌جا فقط اشاره می‌کنیم که می‌توان ثابت کرد که زیر مجموعه‌های کران‌دار BV به طور ضعیف فشرده هستند و بنابراین می‌شود روش مستقیم را برای یافتن رویه‌های مینیمال به کار برد.

References

- [1] H. H. Goldstine. *A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century*. Springer, 1980.
- [2] B. Dacorogna. *Direct methods in the calculus of variations*. Springer, 2008.
- [3] L. C. Evans. *Partial differential equations*. American Mathematical Society, 2010.
- [4] L. C. Evans and R. F. Gariepy. *Measure theory and fine properties of functions*. CRC press, 2015.

ضعیف نیستند. این مشکل در واقع در فضای L^1 هم وجود دارد. به عنوان مثال دنباله توابع

$$f_n(x) = \begin{cases} n & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & x \notin [0, \frac{1}{n}] \end{cases}$$

را در $L^1((-1, 1))$ در نظر بگیرید. داریم $\|f_n\|_{L^1} = 1$. پس این دنباله در L^1 کران‌دار است. اما به سادگی می‌شود دید که هیچ زیر دنباله‌ای ندارد که به طور ضعیف همگرا شود. (توجه کنید که همگرایی ضعیف در L^1 با کمک دوگان آن فضا یعنی فضای توابعی که خارج یک مجموعه اندازه صفر کران‌دار هستند، تعریف می‌شود. به این فضای دوگان، فضای L^∞ می‌گوییم.)

برای غلبه بر این مشکل می‌بایست فضای $W^{1,1}$ را گسترش دهیم. زیرا ریشه مشکل در این است که یک دنباله کران‌دار در $W^{1,1}$ هست که نقطه حدی ندارد، و بنابراین هیچ زیردنباله‌ای ندارد که به طور ضعیف همگرا شود. این فضای بزرگتر فضای توابع با تغییرات کران‌دار روی Ω است که آن را با $BV(\Omega)$ نمایش می‌دهیم. برای تعریف این فضا لازم داریم تا تعریف مشتق ضعیف را تعمیم دهیم. می‌گوییم تابع $w \in L^1$ متعلق به BV است هرگاه اندازه‌های علامت‌دار μ_i (با برخی خواص تکنیکی) روی Ω وجود داشته باشند به طوری برای هر $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ داشته باشیم

$$\int_{\Omega} w \nabla_i \phi \, dx = - \int_{\Omega} \phi \, d\mu_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

از تابع زتای اویلر تا L - توابع آرتین

علی چراغی

۱ مقدمه

زتای اویلر را به اعداد مختلط گسترش می‌دهد و ادعا می‌کند اگر صف‌های تابع زتا در محدوده‌های خاصی نباشند، آنگاه قضیه اعداد اول (و حتی بهتر از آن) بدست می‌آید. همچنین او در این مقاله مهمترین حدس ریاضیات به نام فرض ریمان را مطرح می‌کند. این حدس در مورد صف‌های تابع زتا در ناحیه‌ی خاصی صحبت می‌کند که در صورت درست بودن، درک بیشتری از توزیع اعداد اول و تعداد بسیاری از مسائل دیگر می‌شود. بعد از او دکینده^۶ تابع زتا را به میدان‌های عددی گسترش می‌دهد و نشان می‌دهد اطلاعات مهمی از میدان‌های عددی در آن توابع کدگذاری شده‌اند. آرتین^۷ در سال ۱۹۲۳ و در دومین مقاله‌ی منتشر شده از او، [۳]، L - توابع جدیدی را تعریف می‌کند که گسترش L - توابع دیریکله محسوب می‌شوند و مانند توابع زتا و L - توابع درک بالاتری از میدان‌های عددی به ما می‌دهند.

در مقاله پیش رو، روندی تاریخی برای معرفی L - توابع آرتین به کار گرفته شده است. همچنین در بیشتر اثبات‌ها، طرح اثبات داده شده یا خواننده ارجاع داده شده است. همچنین برای سادگی فقط توسیع‌های میدان اعداد گویا در نظر گرفته شده است.

یکی از مسائل بسیار قدیمی در ریاضیات، مطالعه‌ی اعداد اول و بررسی توزیع آن‌ها در اعداد طبیعی است. اقلیدس^۱ اولین کسی بود که اثبات کرد بی‌نهایت عدد اول وجود دارد. بعد از او اویلر^۲ در کتاب مقدمه‌ای بر آنالیز بی‌نهایت، [۱]، برای اولین بار با استفاده از آنالیز، بی‌نهایت بودن تعداد اعداد اول را ثابت می‌کند. در واقع او سری $\sum_{p \text{ اول}} \frac{1}{p}$ را بررسی کرده و اثبات می‌کند که این سری به بی‌نهایت واگراست و گامی در جهت شناخت بیشتر اعداد اول برداشت. همچنین این اثبات او شروعی برای نظریه تحلیلی اعداد به حساب می‌آید. سپس او تابع زتا را تعریف می‌کند و بعضی از مقادیر آن را بدست می‌آورد. پس از اویلر، دیریکله^۳ در سال ۱۸۴۰، با استفاده از مشخصه‌های اعداد صحیح پیمانانه‌ای، تابع زتای اویلر را گسترش می‌دهد و با استفاده از آن قضیه معروف خود را ثابت می‌کند: ”در هر تصاعد حسابی اولیه، بی‌نهایت عدد اول وجود دارد.” او این توابع گسترش یافته را با نماد L نمایش می‌دهد و به همین دلیل این نوع توابع به L - توابع^۴ معروف می‌شوند. ریمان^۵ در مقاله‌ی [۲]، که تنها مقاله‌ی او در نظریه اعداد محسوب می‌شود، تابع

^۱Euclid

^۲Euler

^۳Dirichlet

^۴L-functions

^۵Riemann

^۶Dedekind

^۷Artin

۲ نامتناهی بودن تعداد اعداد اول

اعداد اول وجود دارد، داریم:

$$P_n = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \dots \quad (1)$$

حال از فرم ضربی P_n لگاریتم می‌گیریم:

$$\log P_n = \log\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2^n}}\right) + \log\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3^n}}\right) + \log\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4^n}}\right) + \dots$$

$$\text{و از بسط } \log\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m} \text{ استفاده می‌کنیم:}$$

$$\begin{aligned} \log P_n = & \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^{2n}}\right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2^{3n}}\right) + \dots\right) + \\ & \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3^{2n}}\right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3^{3n}}\right) + \dots\right) + \\ & \dots \end{aligned}$$

حال با تغییر دادن آرایش آن داریم:

$$\begin{aligned} \log P_n = & \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \dots\right) + \\ & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \dots\right) + \\ & \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2^{3n}} + \frac{1}{3^{3n}} + \frac{1}{5^{3n}} + \dots\right) + \\ & \dots \end{aligned} \quad (2)$$

حال n را برابر ۱ قرار می‌دهیم و داریم از (۱):

$$P_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = \log\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) = \log \infty$$

و از (۲):

$$\begin{aligned} \log P_1 = & \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots\right) + \\ & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots\right) + \\ & \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \dots\right) + \\ & \dots \end{aligned}$$

اقلیدس در ۳۰۰ سال قبل از میلاد، اثبات خود را از بی‌نهایت بودن اعداد اول ارائه می‌دهد. البته در اثبات خود اقلیدس، از آنجایی که نمادگذاری برای اعداد مرسوم نبوده، او فقط برای مثال‌هایی این روش را توضیح می‌دهد ولی مشخص است منظور او برای حالت کلی بوده است.

قضیه. (اقلیدس) بی‌نهایت عدد اول وجود دارد.

برهان. فرض کنید این‌طور نباشد و p_1, p_2, \dots, p_n تنها اعداد اول باشند. در این صورت از آنجایی که هر عدد به اعداد اول تجزیه می‌شود، عدد $N = p_1 p_2 \dots p_n + 1$ نیز باید حداقل یکی از این اعداد اول مثل p_i را داشته باشد. در حالی که بوضوح $p_i | p_1 p_2 \dots p_n$ ، پس

$$p_i | N - p_1 p_2 \dots p_n = 1$$

که تناقض است. □

اویلر در [۱]، ایده‌ی جدیدی برای اثبات نامتناهی بودن تعداد اعداد اول عرضه می‌کند که دیدگاهی آنالیزی برای حل مسائل "گسسته" نظریه اعداد می‌دهد.

قضیه. (اویلر) بی‌نهایت عدد اول وجود دارند.

تبصره. این اثبات، اثبات خود اویلر است و دقت کافی را ندارد، ولی می‌توان آنرا دقیق کرد.

برهان. عدد زیر را در نظر بگیرید:

$$P_n = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2^n}}\right) \left(\frac{1}{1-\frac{1}{3^n}}\right) \left(\frac{1}{1-\frac{1}{5^n}}\right) \dots$$

که اعداد ۲، ۳، ۵، ... روی اعداد اول تغییر می‌کنند. در این صورت از بسط $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ داریم:

$$P_n = \left(1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{2n}} + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^{2n}} + \dots\right) \dots$$

و با ضرب این جملات در هم و استفاده از این که تجزیه یکتا به

حال مجموع جملات دوم به بعد سری بالا، مثلاً طبق آزمون انتگرال، مقادیر متناهی خواهد بود و داریم:

$$\log P_1 = \log \log \infty \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots$$

و کار تمام است. \square

واضح است که اثبات بالا دقت کافی را ندارد ولی هر گام آن را می‌توان با همین روند دقیق کرد و پس از دقیق کردن متوجه می‌شویم که:

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \sim \log \log x$$

۳ تابع زتای اویلر

اوایلر در اثبات قضیه قبل از موجودی به نام P_n استفاده می‌کند که

$$P_n = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \dots$$

پس اوایلر تعریف زیر را برای تابع زتای خود ارائه می‌دهد:

تعریف. تابع زتای اویلر برای اعداد حقیقی $s < 1$ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

پس در واقع، در اثبات قضیه قبل داشتیم $P_n = \zeta(n)$ و همچنین برای P_n یک فرم ضربی داشتیم که اوایلر برای حالت کلی تری این فرم ضربی را ارائه می‌دهد:

قضیه. (اوایلر) برای $s < 1$ داریم:

$$\zeta(s) = \prod_{\text{اول } p} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \right)$$

برهان. مانند قبل، به دلیل تجزیه یکنای اعداد طبیعی بزرگتر از

۱ به اعداد اول. \square

به این فرم ضربی، تجزیه اویلری^۸ تابع زتا می‌گویند. اوایلر چند مقدار این تابع را بدست آورد:

قضیه. (اوایلر) برای $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$\zeta(2n) = \frac{2^{2n-1} \pi^{2n}}{(2n)!} |B_{2n}|$$

که B_n ها اعداد برنولی هستند.

همچنین اوایلر با بررسی سری $\sum_{n=1}^{\infty} n^k x^n$ ، سعی کرد مقادیر تابع ζ را برای اعداد منفی پیدا کند. اگرچه او تعریف دقیقی برای تابع زتا در اعداد منفی نداشت (!) ولی احتمالاً می‌دانست که آنرا مانند تابع فاکتوریل می‌توان به کل اعداد حقیقی گسترش داد.

قضیه. (اوایلر)

$$\frac{\zeta(1-n)}{\zeta(n)} = \frac{2^{1-n} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) n!}{\pi^n}$$

همچنین اوایلر حدس زیر را مطرح می‌کند که به دو طریق در مقاله ریمان اثبات می‌شود.

حدس. (اوایلر) برای هر عدد حقیقی مثبت s ,

$$\frac{\zeta(1-s)}{\zeta(s)} = \frac{2^{1-s} \cos\left(\frac{s\pi}{2}\right) \Gamma(s+1)}{\pi^s}$$

که تابع $\Gamma(s)$ توسیع فاکتوریل به کل اعداد حقیقی است و با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^s \frac{dx}{x}$$

۴ L -توابع دیریکله

دیریکله در سال ۱۸۴۰، قضیه‌ی معروف خود را ثابت می‌کند:

^۸Euler factorization

وابسته به آن برابر است با:

$$L(s, \chi_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_1(n)}{n^s} = \sum_{n \equiv 1} \frac{1}{n^s} - \sum_{n \equiv 2} \frac{1}{n^s}$$

همچنین L -توابع به دلیل کاملاً ضربی بودن χ ، تجزیه اویلری دارند:

قضیه. اگر $L(s, \chi)$ یک L -تابع دیریکله باشد. در این صورت برای s هایی که L -تابع تعریف می شود داریم:

$$L(s, \chi) = \prod_{p \text{ اول}} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s} \right)$$

برهان. با استفاده از کاملاً ضربی بودن χ و بسط تیلور $\frac{1}{1-x}$ ، داریم:

$$\begin{aligned} L(s, \chi) &= \prod_{p \text{ اول}} \left(\frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^s}} \right) \\ &= \prod_{p \text{ اول}} \left(1 + \frac{\chi(p)}{p^s} + \frac{\chi(p)^2}{p^{2s}} + \dots \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} \end{aligned}$$

معمولاً مقدار L -توابع در نقطه $s = 1$ اهمیت زیادی دارد. مثلاً مهم ترین حکمی که دیریکله برای اثبات قضیه خود به آن احتیاج داشت قضیه زیر بود:

قضیه. (دیریکله) اگر χ یک مشخصه دیریکله نابدهی باشد آنگاه $L(1, \chi) \neq 0$.

سپس دیریکله با استفاده از L -توابع، اعداد اول به پیمانۀ m جدا می کند و برای هر کدام از آن دسته ها از اعداد اول، ثابت می کند:

قضیه. (دیریکله) اگر m و r دو عدد طبیعی نسبت به هم اول باشند، آنگاه ثابت A (وابسته به m و r) وجود دارد که:

$$\sum_{\substack{p \equiv r \\ p \leq x}} \frac{1}{p} = \frac{1}{\phi(m)} \log \log x + A + O\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

قضیه. (دیریکله) اگر r و m دو عدد طبیعی نسبت به هم اول باشند، آنگاه در تصاعد حسابی $\{mk + r | k \in \mathbb{N}\}$ بی نهایت عدد اول وجود دارد.

برای اثبات این قضیه، دیریکله مجبور به تعمیم دادن تابع زتا شد. در واقع ایده ی او این بود که اثبات کند $\sum_{p \equiv r} \frac{1}{p}$ واگرا به بی نهایت است و با استفاده از آن قضیه اش را نتیجه بگیرد. برای تعریف L -توابع دیریکله باید ابتدا مشخصه های دیریکله را تعریف کنیم:

تعریف. تابع $\chi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ را یک مشخصه دیریکله به پیمانۀ m می نامیم هرگاه خواص زیر را داشته باشد:

- اگر a نسبت به m اول نباشد: $\chi(a) = 0$
- اگر a نسبت به m اول باشد: $|\chi(a)| = 1$
- اگر $a, b \in \mathbb{Z}$ آنگاه $\chi(a)\chi(b) = \chi(ab)$ (کاملاً ضربی بودن)
- برای همه $k \in \mathbb{Z}$ داریم: $\chi(k+m) = \chi(k)$

پس مشخصه ی دیریکله در واقع یک همومورفیسم از $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ به \mathbb{C}^* است. همچنین تابع $\chi_0 \equiv 1$ را مشخصه بدیهی می نامیم.

تعریف. فرض کنید χ یک مشخصه ی دیریکله باشد. L -تابع دیریکله ی وابسته به آن را به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

اگر χ مشخصه بدیهی باشد، سری بالا برای $s > 1$ همگراست و برابر با تابع زتای اویلر است.

اگر χ مشخصه بدیهی نباشد، سری بالا برای $s > 0$ همگراست. این تابع این خاصیت را دارد که اعداد متفاوت به پیمانۀ m را از هم "جدا" می کند. مثلاً اگر χ_1 مشخصه ی دیریکله به پیمانۀ ۴ باشد که با $\chi_1(1) = 1$ و $\chi_1(3) = -1$ شناسایی می شود، آنگاه L -تابع

حال می‌توان قضیه اعداد اول را به کمک تابع زتای ریمان به شکل دیگری بیان کرد:

قضیه. قضیه اعداد اول معادل است با صفر نشدن تابع زتای ریمان روی خط $\{s \in \mathbb{C} | \operatorname{Re} s = 1\}$.

برهان. رجوع شود به فصل ۱۳ از [۴].

همچنین ریمان حدسی را در مقاله اش مطرح می‌کند و در مورد آن می‌نویسد:

”... ممکن است کسی به اثبات دقیقی از این موضوع علاقه داشته باشد، ولی من تلاش برای پیدا کردن اثبات آن را کنار گذاشته‌ام، زیرا این موضوع برای هدف تحقیق من نیاز نیست.”
این حدس ”فرض ریمان” نام گرفته و ادعا می‌کند:

حدس. (فرض ریمان^۹) اگر صفری از تابع زتای ریمان روی نوار $\{s \in \mathbb{C} | 0 < \operatorname{Re} s < 1\}$ قرار داشته باشد، آن‌گاه آن صفر روی خط بحرانی $\{\frac{1}{2} + it | t \in \mathbb{R}\}$ قرار دارد.

برای این حدس تاکنون تلاش‌های بسیاری شده است و معادل‌های بسیاری برای آن یافت شده است، ولی با این وجود تاکنون حل نشده است و جزء سخت‌ترین مسائل حل نشده ریاضیات به حساب می‌آید.

فرض ریمان نتایج بسیاری دارد که از جمله آن‌ها می‌توان به تقریب بهتری از $\pi(x)$ اشاره کرد:

نتیجه. اگر فرض ریمان درست باشد و اگر انتگرال لگاریتمی^{۱۰} را برابر $Li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$ تعریف کنیم، آن‌گاه:

$$|\pi(x) - Li(x)| < \frac{1}{8\pi} \sqrt{x} \log x$$

برهان. رجوع شود به [۵].

L -توابع دیریکله را نیز مانند تابع زتا، می‌توان به طور مرمورفیک^{۱۱} به کل صفحه گسترش داد و حدسی مانند فرض ریمان برای آن‌ها فرمول بندی کرد:

برهان. رجوع شود به فصل ۷ از [۴].

این قضیه، قضیه دیریکله را نتیجه می‌دهد و در واقع اثبات می‌کند ”چگالی” اعداد اول برای r ‌های نسبت به m اول متفاوت نیز یکسان است.

۵ تابع زتای ریمان

ریمان در مقاله معروف خود، [۲]، تابع زتای اویلر را به تمام اعداد مختلط گسترش می‌دهد و با استفاده از آن تلاشی برای اثبات ”قضیه اعداد اول” می‌کند:

قضیه. (قضیه اعداد اول) فرض کنید x یک عدد حقیقی مثبت باشد و تابع $\pi(x)$ را برابر با تعداد اعداد اول از ۱ تا x تعریف کنید. در این صورت داریم:

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

که این یعنی $\frac{\pi(x)}{x/\log x} \rightarrow 1$ وقتی x به بی‌نهایت میل می‌کند.

ابتدا ریمان تابع ζ را به اعداد مختلط s با $\operatorname{Re} s > 1$ گسترش می‌دهد. در واقع سری $\sum \frac{1}{n^s}$ برای محدوده‌ی $\operatorname{Re} s > 1$ به طور مطلق همگراست و تابع زتا را در این ناحیه می‌توان گسترش داد. ریمان در آنالیز مختلط بسیار قوی بوده و توانست تابع زتا را به شکلی انتگرالی به کل صفحه‌ی مختلط گسترش دهد و حدس اویلر (که اکنون به معادله تابعی تابع زتا معروف است) را با دو روش اثبات کند.

قضیه. (ریمان) تابع زتای اویلر را می‌توان به صفحه مختلط گسترش داد بطوری که بجز یک قطب ساده با مانده‌ی ۱ در نقطه $s = 1$ ، در بقیه نقاط تحلیلی باشد.

همچنین با قضیه نسبتاً ساده‌ای در آنالیز مختلط می‌توان نتیجه گرفت که این گسترش یکتا نیز هست.

^۹Riemann Hypothesis (RH)

^{۱۰}Logarithmic integral

^{۱۱}Meromorphic

منظور از "حلقه اعداد صحیح یک میدان عددی"، مجموعه‌ی اعداد صحیح موجود در آن میدان است. می‌توانید بررسی کنید که حلقه اعداد صحیح در یک میدان عددی، با جمع و ضرب معمولی اعداد مختلط، ساختار یک حلقه را تشکیل می‌دهند. "حلقه اعداد صحیح میدان اعداد گویا" همان اعداد صحیح معمولی، \mathbb{Z} هستند و در این حالت \mathbb{Z} خواص بسیاری مانند تجزیه به اعداد اول و... را دارد. ولی برخلاف این حالت خاص، اعداد صحیح در یک میدان عددی لزوماً به اعداد اول موجود در آن حلقه تجزیه نمی‌شوند، بلکه تجزیه یکتا برای ایدال‌های حلقه اعداد صحیح درست است:

قضیه. فرض کنید $\mathbb{Q} \subseteq K$ یک میدان عددی و R_K حلقه‌ی اعداد صحیح موجود در آن میدان باشد. در این صورت هر ایدال ناصفر $I \subseteq R_K$ را می‌توان به شکل زیر نوشت.

$$I = \mathfrak{P}_1^{\alpha_1} \mathfrak{P}_2^{\alpha_2} \dots \mathfrak{P}_n^{\alpha_n}$$

که \mathfrak{P}_i ها ایدال‌هایی اول از R_K و α_i ها اعداد صحیح مثبت هستند. این تجزیه در حد جایگشت یکتاست.

برهان. رجوع شود به [۷].

حال فرض کنید $\mathbb{Q} \subseteq K$ یک توسیع میدان عددی و R_K حلقه اعداد صحیح موجود در آن میدان باشد و $p \in \mathbb{Z}$ یک عدد اول گویا (منظور عدد اولی در \mathbb{Z} است)، در این صورت pR_K یک ایدال ناصفر در R_K تشکیل می‌دهد و ما علاقه مند به تجزیه این ایدال به ایدال‌های اول موجود در R_K هستیم. این ایدال در R_K مثلاً به شکل زیر تجزیه می‌شود:

$$pR_K = \mathfrak{P}_1^{e_{\mathfrak{P}_1/p}} \mathfrak{P}_2^{e_{\mathfrak{P}_2/p}} \dots \mathfrak{P}_n^{e_{\mathfrak{P}_n/p}}$$

که \mathfrak{P}_i ها ایدال‌های اول در R_K هستند و $e_{\mathfrak{P}_i/p}$ ها اعداد صحیح مثبت. ایدال‌های اول \mathfrak{P}_i ، ایدال‌های اول روی p نامیده می‌شوند. به عدد اول $p \in \mathbb{Z}$ ، شاخه‌ای گوئیم اگر برای i ای، $1 < e_{\mathfrak{P}_i/p}$ و

حدس. (فرض تعمیم یافته ریمان^{۱۲}) اگر χ یک مشخصه دیریکله باشد و صفری از تابع $L(s, \chi)$ روی نوار بحرانی $\{s \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re} s < 1\}$ قرار داشته باشد، آن‌گاه آن صفر روی خط بحرانی $\{ \frac{1}{2} + it \mid t \in \mathbb{R} \}$ قرار گرفته است.

۶ نظریه جبری اعداد

نظریه جبری اعداد قسمتی از نظریه اعداد است که با استفاده از تکنیک‌های جبر مجرد، به مطالعه‌ی اعداد صحیح، اعداد گویا و توسیع‌های آن‌ها می‌پردازد. سوالات نظریه اعداد را می‌توان با استفاده از نظریه جبری اعداد فرمول بندی جدیدی کرد و با استفاده از خواص جبری ساختارهای جبری متنوع به بررسی آن‌ها پرداخت. نظریه جبری اعداد مخصوصاً در حل بسیاری از معادلات دیوفانتی^{۱۳} کمک می‌کند.

در این جا فرض می‌کنیم خواننده با بعضی ایده‌ها و ساختارهای جبری معمولی مثل حلقه، ایدال، میدان، توسیع میدان‌ها، نظریه گالوا^{۱۴} آشنا است.

خواننده برای درک این مفاهیم می‌تواند به [۶] رجوع کند. برای سادگی ما فقط با توسیع‌های اعداد گویا کار می‌کنیم و تعریف می‌کنیم:

تعریف. منظور از یک میدان عددی جبری، توسیعی متناهی از میدان اعداد گویا است.

مثال‌هایی مهم از میدان‌های عددی، میدان‌های $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ ، $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ هستند که d یک عدد صحیح و ζ_n یک ریشه‌ی n -ام اولیه واحد است. این میدان‌ها در حل بسیاری از معادلات دیوفانتی مثل قضیه آخر فرما کمک می‌کنند.

تعریف. به $z \in \mathbb{C}$ یک عدد صحیح جبری می‌گوئیم هرگاه در یک چندجمله‌ای به فرم زیر صدق کند:

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 \quad (a_i \in \mathbb{Z})$$

^{۱۲}Generalized Riemann Hypothesis (GRH)

^{۱۳}Diophantine equations

^{۱۴}Galois

اتومورفیسم از $Gal(\frac{R}{\mathfrak{P}_i}/\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}})$ تعریف کرد. همچنین می‌توان ثابت کرد که f پوشاست.

حال گروه دیگری را با استفاده از این همومورفیسم می‌توان تعریف کرد (این گروه در تعریف مولفه‌های شاخه‌ای L -توابع آرتین به کار می‌آید):

تعریف. گروه اینرسی^{۱۶} \mathfrak{I} را برابر با هسته‌ی همومورفیسم f تعریف می‌کنیم و با $I_{\mathfrak{P}}$ نشان می‌دهیم. در واقع:

$$I_{\mathfrak{P}} = \{\sigma \in D_{\mathfrak{P}} \mid \forall r \in R_K, \sigma(r) - r \in \mathfrak{P}\}$$

با استفاده از قضیه اول یکرختی داریم:

$$\frac{D_{\mathfrak{P}}}{I_{\mathfrak{P}}} \cong Gal(\frac{R}{\mathfrak{P}_i}/\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}})$$

همچنین به سادگی می‌توان دید که $D_{\mathfrak{P}_i}$ ($I_{\mathfrak{P}_i}$) مزدوج $D_{\mathfrak{P}_j}$ ($I_{\mathfrak{P}_j}$) است برای همه i, j ها. همچنین قضیه زیر را داریم:

$$|D_{\mathfrak{P}}| = e_{\mathfrak{P}/p} f_{\mathfrak{P}/p} \text{ و } |I_{\mathfrak{P}}| = e_{\mathfrak{P}/p}$$

حال در موقعیتی هستیم که اتومورفیسم فروبنیوس را تعریف کنیم:

معمول است که $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ را با \mathbb{F}_p نمایش دهند. پس $\frac{R}{\mathfrak{P}_i}/\mathbb{F}_p$ یک توسیع متناهی از میدان‌های متناهی است و با نظریه میدان‌های متناهی می‌توان نشان داد که این توسیع‌ها همواره گالوا هستند و گروه گالوای آن‌ها دوری است و با عنصر $\sigma : x \mapsto x^p$ تولید می‌شود. به این عنصر، اتومورفیسم فروبنیوس این توسیع گفته می‌شود. پس $Gal(\frac{R}{\mathfrak{P}_i}/\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}})$ گروهی دوری است که با $\text{Frob}_{\mathfrak{P}_i/p} : x \mapsto x^p$ تولید می‌شود. حال فرض کنید p عدد اولی غیرشاخه‌ای باشد و مانند قبل $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots, \mathfrak{P}_n$ ایدال‌های اول روی p باشند. در این صورت از قضیه بالا $I_{\mathfrak{P}_i} = \{1\}$ برای همه i ها و داریم:

$$Gal(K/\mathbb{Q}) \supseteq D_{\mathfrak{P}_i} \cong Gal(\frac{R}{\mathfrak{P}_i}/\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}})$$

در غیر این صورت به آن عدد اول، غیر شاخه‌ای گوییم. همچنین به اعداد $e_{\mathfrak{P}_i/p}$ اندیس انشعاب \mathfrak{P}_i روی p گفته می‌شود. می‌توان ثابت کرد که تعداد اعداد اول شاخه‌ای در یک توسیع متناهی، متناهی است. همچنین عدد مهم دیگری در نظریه انشعاب وجود دارد به نام درجه مانده‌ای \mathfrak{P}_i روی p ، که به این شکل تعریف می‌شود:

تعریف. اگر \mathfrak{P} روی p باشد، آن گاه $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \subseteq R_K/\mathfrak{P}$ میدانی‌هایی متناهی خواهند بود و $[R_K/\mathfrak{P} : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]$ درجه مانده‌ای \mathfrak{P} روی p گفته می‌شود و با $f_{\mathfrak{P}/p}$ نمایش داده می‌شود.

از این‌جا به بعد، فرض می‌کنیم K/\mathbb{Q} توسیعی گالوا باشد. در این حالت می‌توان اثبات کرد که درجه مانده‌ای و اندیس انشعاب، برای همه ایدال‌های اول روی p عددی ثابت است. به عبارت دیگر با نمادگذاری بالا:

$$e_{\mathfrak{P}_i/p} = e_{\mathfrak{P}_j/p}, \quad f_{\mathfrak{P}_i/p} = f_{\mathfrak{P}_j/p}$$

برای همه i, j ها.

حال گروه‌هایی را تعریف می‌کنیم که در نظریه انشعاب نقش مهمی را ایفا می‌کنند:

تعریف. فرض کنید $Gal(K/\mathbb{Q})$ گروه گالوای توسیع K/\mathbb{Q} باشد و $pR_K = \mathfrak{P}_1^{e_{\mathfrak{P}_1/p}} \mathfrak{P}_2^{e_{\mathfrak{P}_2/p}} \dots \mathfrak{P}_n^{e_{\mathfrak{P}_n/p}}$ تجزیه عدد اول p به ایدال‌های اول R_K باشد. در این صورت برای هر \mathfrak{P}_i گروهی به نام گروه تجزیه^{۱۵} به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$D_{\mathfrak{P}_i} = \{\sigma \in Gal(K/\mathbb{Q}) \mid \sigma(\mathfrak{P}_i) = \mathfrak{P}_i\}$$

حال می‌توان همومورفیسم $f : D_{\mathfrak{P}_i} \rightarrow Gal(\frac{R}{\mathfrak{P}_i}/\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}})$ را در نظر گرفت که به شکل زیر تعریف می‌شود:

فرض کنید $\sigma \in D_{\mathfrak{P}_i}$ در این صورت σ ، \mathfrak{P}_i را ثابت نگه می‌دارد و پس اتومورفیسمی از R/\mathfrak{P}_i می‌دهد بطوری که $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ را ثابت نگه می‌دارد. پس می‌توان عضو $f(\sigma)$ را برابر با این

^{۱۵}Decomposition group

^{۱۶}Inertia group

برای تابع زتای ددکیند، نیز به دلیل ضربی بودن تابع نرم می توان تجزیه ای به فرم اویلر پیدا کرد:
قضیه. برای s مختلط با $Re s > 1$ داریم:

$$\zeta_K(s) = \prod_{P \subseteq R_K} \left(\frac{1}{1 - N_{K/\mathbb{Q}}(P)^{-s}} \right)$$

که P روی ایدال های اول ناصفر R_K حرکت می کند.

هکه^{۱۹} توانست این تابع را به کل صفحه مختلط به طور مرمورفیک گسترش دهد و همچنین معادله ای تابعی برای آن پیدا کند و پس حدسی مانند فرض ریمان برای آن فرمول بندی شد: حدس. (فرض ریمان گسترش یافته) برای هر میدان عددی K ، اگر صفری از $\zeta_K(s)$ در $\{s \in \mathbb{C} \mid 0 < Re s < 1\}$ باشد، آن گاه آن صفر روی خط $Re s = \frac{1}{2}$ قرار دارد.

۸ نمایش خطی گروه های متناهی

ما برای تعریف L -توابع آرتین به یک توسیع از مشخصه های دیریکله به نام نمایش های خطی گروه ها نیاز داریم که در این بخش به مقدمات آن پرداخته می شود.

در این بخش همیشه فرض می کنیم G یک گروه متناهی است.

تعریف. منظور ما از یک نمایش خطی از G ، یک عمل خطی گروه G بر یک فضای برداری V متناهی بعد روی اعداد مختلط است. به عبارت دیگر، یک نمایش خطی گروه G یک همومورفسم $\rho: G \rightarrow GL_n(V)$ است. به V ، یک G -فضا گفته می شود.

درجه یک نمایش خطی، طبق تعریف، بُعد V است. نمایش (ρ, V) یک نمایش تحویل ناپذیر است هرگاه هیچ زیرفضای سره پایا تحت عمل G نداشته باشد. دو نمایش خطی (ρ, V) و (ρ', V') معادل نامیده می شوند هرگاه V و V' به عنوان G -فضا یکی باشند، این مفهوم به این معناست که یک ایزومورفسم خطی $f: V \rightarrow V'$

پس می توان اتومورفسم موجود در $Gal(\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Q}}/\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}})$ را به عنوان عنصری در $Gal(K/\mathbb{Q})$ نگاه کرد و از آنجایی که $D_{\mathbb{Q}}(i) \leq 0$ (مزدوج یکدیگرند، پس مولد های آنها نیز مزدوج یکدیگرند و می توان اتومورفسم فروبنیوس عدد اول p (به ایدال اول روی p وابسته نیست) را برابر با آن مولفه ی ازدواج در $Gal(K/\mathbb{Q})$ تعریف کرد که ما با $Frob_p$ نشان می دهیم.

۷ توابع زتای ددکیند

ددکیند تابع زتای ریمان را برای میدان های عددی گسترش داد و با استفاده از آن تعدادی از خواص موجود در اعداد صحیح را به حلقه اعداد صحیح میدان های عددی گسترش داد. همچنین فرض ریمان گسترش یافته^{۱۷} نیز برای آن فرمول بندی شده است که نتایجی در نحوه ی تجزیه اعداد اول به ایدال های اول در آن میدان عددی دارد. برای تعریف تابع زتای ددکیند ابتدا باید مفهومی به نام نرم^{۱۸} را تعریف کنیم:

تعریف. فرض کنید K یک میدان عددی با حلقه اعداد صحیح R_K باشد و I یک ایدال ناصفر R_K . در این صورت منظور از نرم I ، اندیس I در R_K است و با $N_{K/\mathbb{Q}}(I)$ نمایش داده می شود.

حال می توان تابع زتای ددکیند را تعریف کرد:

تعریف. تابع زتای ددکیند برای میدان عددی K ، به شکل زیر تعریف می شود:

$$\zeta_K(s) = \sum_{I \subseteq R_K} \frac{1}{(N_{K/\mathbb{Q}}(I))^s}$$

که I روی ایدال های ناصفر R_K حرکت می کند.

این تابع برای s مختلط با $Re s > 1$ همگراست.

اولا به سادگی می توان دید که در حالت $K = \mathbb{Q}$ تابع زتای ددکیند، همان تابع زتای ریمان است.

^{۱۷}Extended Riemann Hypothesis (ERH)

^{۱۸}Norm

^{۱۹}Hecke

باشد بطوری که:

است و می توان "چندجمله ای مشخصه" اتومورفیسم $\text{Frob}_{\mathfrak{F}/p}$ را با تابع زیر تعریف کرد:

$$f \circ \rho(g) = \rho'(g) \circ f$$

$$\text{Charpol}(\text{Frob}_{\mathfrak{F}/p})(t) = \text{Det}(I - t\text{Frob}_{\mathfrak{F}/p})$$

تعریف می کنیم. از بخش های قبل می دانیم که $\text{Frob}_{\mathfrak{F}/p}$ در حد ازدواج با خود p مشخص می شود. پس از آنجا که چندجمله ای مشخصه ماتریس های مزدوج یکی است، پس این چندجمله ای مشخصه، فقط با p مشخص می شود و به انتخاب ایدآل اول روی آن بستگی ندارد.

حال می توان L -توابع آرتین را تعریف کرد:

تعریف. فرض کنید K/\mathbb{Q} یک توسیع گالوای متناهی با گروه گالوای G باشد. فرض کنید (ρ, V) یک نمایش خطی G با تابع مشخصه χ باشد. آن گاه L -تابع آرتین وابسته به ρ یا χ با فرم ضربی زیر تعریف می شود:

$$L(s, \chi, K/\mathbb{Q}) = \prod_{\text{اول } p} \frac{1}{\text{Charpol}(\text{Frob}_p)(N(p)^{-s})}$$

برای هر $\delta > 0$ ، L -تابع آرتین به طور یکنواخت و مطلق روی ناحیه $\text{Re } s \geq 1 + \delta$ همگراست.

قضیه. (۱) برای مشخصه χ اصلی $\chi \equiv 1$ ، تابع زتای ریمان را دریافت می کنیم:

$$L(s, \chi_0, K) = \zeta(s)$$

(۲) اگر $\mathbb{Q} \supseteq K \supseteq L$ توسیع های گالوای \mathbb{Q} باشند، آن گاه

$$L(s, \chi, K/\mathbb{Q}) = L(s, \chi, L/\mathbb{Q})$$

که مشخصه χ از $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ را به عنوان یک مشخصه از $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ ببینیم.

هر نمایش خطی (ρ, V) به جمع مستقیم نمایش های تحویل ناپذیر خطی تجزیه می شود. به عبارت دیگر:

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_s$$

که V_i ها G -فضا هستند و V_i ها نمایش هایی تحویل ناپذیرند.

مشخصه χ یک نمایش (ρ, V) برابر با تابع زیر است:

$$\chi : G \rightarrow \mathbb{C}, \quad \chi(\sigma) = \text{Tr}(\rho(\sigma))$$

است که از آن جایی که اثر χ یک ماتریس فقط به مولفه χ ازدواج آن بستگی دارد، پس χ در حد ازدواج ثابت می ماند. دو نمایش معادلند اگر و تنها اگر مشخصه های آن ها مساوی باشند. مشخصه ای که همواره برابر ۱ است، مشخصه χ اصلی χ_0 نامیده می شود.

۹ L -توابع آرتین

فرض کنید K/\mathbb{Q} یک توسیع گالوا با گروه گالوای G باشد و فرض کنید (ρ, V) یک نمایش خطی از G باشد. برای $\sigma \in G$ و $v \in V$ ، عمل $\rho(\sigma)v$ را با σv نمایش می دهیم.

فرض کنید $p \in \mathbb{Z}$ یک عدد اول و \mathfrak{F} یک ایدآل اول روی p باشد. در این صورت اگر $D_{\mathfrak{F}}$ گروه تجزیه و $I_{\mathfrak{F}}$ گروه اینرسی \mathfrak{F}/p باشد، آن گاه از نتایج بخش های قبل، $D_{\mathfrak{F}}/I_{\mathfrak{F}}$ با عنصر فروبنیوس $\text{Frob}_{\mathfrak{F}/p}$ تولید می شود و پس اتومورفیسم فروبنیوس یک درون ریختی فضای متناهی بعد

$$V^{I_{\mathfrak{F}}} := \{v \in V \mid \forall i \in I_{\mathfrak{F}}; iv = v\}$$

^{۲۰} Trace

^{۲۱} Principal character

می‌کنند، L -توابع آرتین در حل قضیه دیریکله گسترش یافته (قضیه چگالی چبوتاروف^{۲۲}) کاربرد دارند. همچنین آن‌ها در مشخص کردن توسیع‌های جبری میدان‌های عددی، با استفاده از ایدال‌های موجود در خود آن میدان عددی کمک می‌کنند. این برنامه توسط کرونگر^{۲۳} پیشنهاد شده بود و کاربردهای زیادی در نظریه جبری اعداد و نظریه تحلیلی اعداد دارند و نتایجی دارند که به فرمول بندی یک برنامه بسیار فعال در نظریه اعداد به نام "برنامه لنگلندز^{۲۴}" منجر می‌شوند.

قدردانی

با تشکر از محمدمین حیدرشاهی برای کمک به حروفچینی مطالب.

References

- [1] Euler L. *Introduction to Analysis of the Infinite - Book I*, Springer, 1988.
- [2] Riemann B. *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe*, 1859.
- [3] Artin E. *Über eine neue art von L-Reihen*, 1923.
- [4] Apostol T. M. *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer, 1976.
- [5] Shoenfeld, L. *Sharper bounds for the Chebyshev functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$. II*, Mathematics of Computation, **30** (134): 337 - 360.
- [6] Hungerford, W. H. *Algebra*, Springer, 1974.
- [7] Samuel P. *Algebraic Theory of Numbers*, Translated by Allan J. Silberger. Mineola, NY: Dover, 2008.
- [8] Neukirch J. *Class Field Theory*, Springer, 1986.

(۳) اگر χ_1 و χ_2 دو مشخصه از $Gal(K/\mathbb{Q})$ باشند، آن‌گاه

$$L(s, \chi_1 + \chi_2, K/\mathbb{Q}) = L(s, \chi_1, K/\mathbb{Q})L(s, \chi_2, K/\mathbb{Q})$$

(۴) اگر χ_α ها مشخصه‌های تحویل ناپذیر نمایش‌های $Gal(K/\mathbb{Q})$ باشند، آنگاه $r_\alpha \in \mathbb{C}$ وجود دارند بطوری که:

$$\zeta_K(s) = \zeta(s) \prod L(s, \chi_\alpha, K/\mathbb{Q})^{r_\alpha}$$

برهان. رجوع شود به قضیه ۴,۲ از فصل ۵ در [۸].

L -تابع آرتین در حالتی که توسیع آبلی باشد (توسیع گالوای متناهی با گروه گالوای آبلی)، با L -تابع دیریکله یکسان می‌شود اما از آنجایی که اثبات آن به کمی نظریه میدان‌های رده‌ای نیاز دارد خواننده علاقمند می‌تواند به کتاب [۸] رجوع کند.

همچنین L -توابع آرتین به طور مرموزفیک به صفحه مختلط گسترش می‌یابد و یک معادله‌ی تابعی مانند معادله‌ی تابعی زتا دارند. همچنین حدس آرتین ادعا می‌کند که اگر مشخصه غیر اصلی باشد، آنگاه L -تابع آرتین وابسته به آن به طور تحلیل گسترش می‌یابد:

حدس. (آرتین) برای هر مشخصه تحویل ناپذیر غیراصلی، L -تابع آرتین $L(s, \chi, K/\mathbb{Q})$ یک گسترش تحلیلی به کل صفحه مختلط دارد.

حدس آرتین در صورت درست بودن، نتایج بسیار زیادی دارد، مثلاً تحلیلی بودن $\frac{\zeta_L(s)}{\zeta_K(s)}$ برای توسیع L/K از میدان‌های عددی. همچنین L -توابع آرتین کاربردهای بسیار زیادی دارد. مثلاً همان‌گونه که L -توابع دیریکله در اثبات قضیه دیریکله به ما کمک

^{۲۲}Chebortaryov

^{۲۳}Kronecker

^{۲۴}Langlands program

یک گره (یا فضای برداری)، به صورت ناوردا، نسبت دهیم و سپس به کمک این ساختار ساده‌تر در مورد یکی بودن یا نبودن دو لینک قضاوت کنیم.

گاهی این ساختارها ساختارهایی ساده‌اند، مثلاً می‌توان به هر گره یک عدد نسبت داد که به نوعی پیچیدگی آن گره را بیان می‌کند (شبه روشی که برای رده‌بندی رویه‌های همبند و فشرده استفاده می‌شود) اما در مورد گره‌ها ناوردهای عددی به اندازه کافی گره‌ها را از هم تمییز نمی‌دهند. می‌توان از ساختارهای پیچیده‌تری استفاده کرد تا بتوان گره‌های بیشتری را از هم تمییز داد. اما آنگاه پیچیدگی‌های خود ساختار باعث سختی مطالعه خواهند شد. برای نمونه گره بنیادی فضای مکمل گره ناوردای قدرتمندی در مطالعه گره‌هاست اما تصور کنید این گره را برای دو گره حساب کرده‌اید. حال خود این سوال که آیا گره‌های بدست آمده یکی‌اند یا نه، سوال مشکلی محسوب می‌شود.

در این نوشته در گام اول سه ناوردای عددی در نظریه گره‌ها، یعنی عدد باز شدن گره، گونای سافرت گره^۲ و گونای چهار بعدی گره را معرفی خواهیم کرد. سپس به سراغ ناوردهای چندجمله‌ای در نظریه گره‌ها می‌رویم و در انتها نیز یک ناوردای همولوژیک در نظریه گره‌ها معرفی می‌کنیم. این ناوردها نه تنها در تمییز دادن گره‌های مختلف از هم کاربرد دارند بلکه اطلاعات توپولوژیکی از گره‌ها و فضای مکمل‌شان نیز در خود ذخیره می‌کنند.

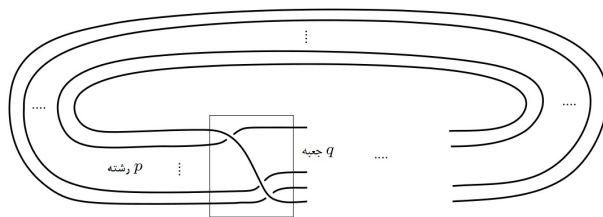
۲ ناوردهای عددی در نظریه گره‌ها

یک دیاگرام برای لینک L در نظر بگیرید. یک تقاطع خاص از این دیاگرام را انتخاب کنید. تصور کنید می‌توانید در این تقاطع رشته‌های گره را از هم عبور داده، شکل ۴، به دیاگرام جدیدی برسید که خارج از دیسک نمایش داده شده با دیاگرام قبلی یکی است و درون دیسک تقاطع آن تغییر یافته، از روگذر به زیرگذر یا برعکس.

گره چنبره‌ای. اگر دو عدد صحیح $p, q > 1$ نسبت به هم اول باشند، گره چنبره‌ای $T_{p,q}$ به صورت مجموعه نقاط زیر تعریف می‌شود،

$$\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 = 1, z_1^p + z_2^q = 0\} \subset S^3. \quad (1)$$

این گره را می‌توان روی یک چنبره استاندارد گره نخورده رسم کرد بطوریکه طول جغرافیایی را q بار و عرض جغرافیایی را p بار قطع می‌کند. یک دیاگرام برای گره چنبره‌ای $T_{p,q}$ را در تصویر ۳ می‌بینید.



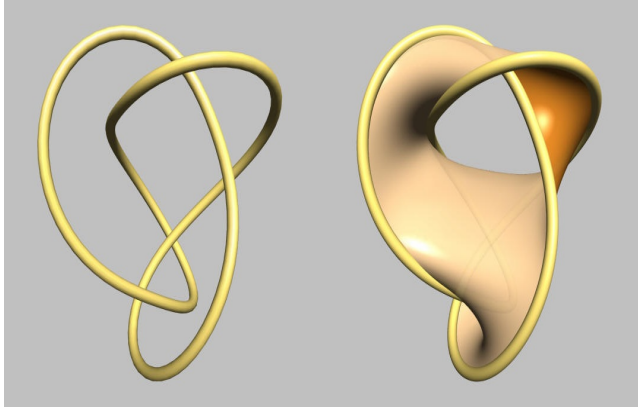
تصویر ۳. گره چنبره‌ای $T_{p,q}$.

$T_{2,3}$ را گره سه پر می‌نامیم، دیاگرامی برای تریفویل را در سمت چپ تصویر ۲ مشاهده می‌کنید. بعلاوه $T_{p,q}$ گره بدیهی است اگر و فقط اگر $p = \pm 1$ یا $q = \pm 1$.

یکی از اهداف عمومی ریاضی، طبقه‌بندی و شناخت ساختارهای مختلف هندسی و جبری است. در توپولوژی گاهی این طبقه‌بندی برای خمینه‌ها ذاتی (در حد هومئومورفیسم در کتگوری خمینه‌های توپولوژیک، هومئومورفیسم قطعه قطعه خطی در کتگوری خمینه‌های قطعه قطعه خطی و دیفیومورفیسم در کتگوری خمینه‌های هموار) است. گاهی نیز به مطالعه زیرخمینه‌های یک خمینه پرداخته و آن‌ها را در حد ایزوتوپی‌های محیطی بررسی می‌کنیم. بنابراین در هر حالت مفهومی از معادل بودن داریم که نتیجه آن تشکیل کلاس‌های هم‌ارزی از این اشیا خواهد بود. به ویژگی‌هایی علاقه‌مندیم که روی هر کلاس مقدار ثابتی اختیار می‌کنند.

وقتی با اشیا پیچیده از جمله لینک‌ها روبه‌رو هستیم تکنیک‌مان برای مطالعه‌شان معمولاً این است که آن‌ها را در فضاهای ساده‌تری کد کنیم. مثلاً به هر لینک یک عدد یا یک ساختار جبری (مثل

^۲Seifert Genus of Knot



تصویر ۵. یک رویه سایفرت برای گره .

گونای سایفرت گره K ، که آن را با $g(L)$ نشان می‌دهیم را برابر با کمینه گونای همه رویه‌های سایفرت گره K تعریف می‌کنیم. از صورت تعریف واضح است که گونای سایفرت، ناوردای گره است.

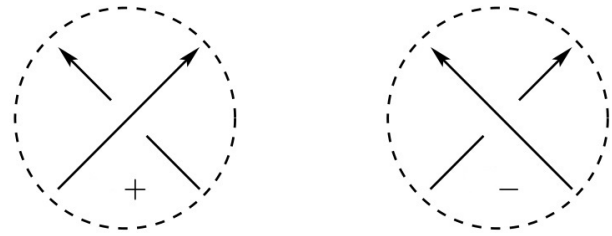
مشابه با آنچه در مورد عدد باز شدن گره دیدیم، سختی محاسبه گونای سایفرت در این است که نشان دهیم برای گره داده شده K هیچ رویه‌ای سایفرتی با گونای کمتر وجود ندارد. گره بدیهی تنها گره با گونای صفر است.

قضیه ۲. گونای سایفرت گره چنبره‌ای $T_{p,q}$ که $(p, q) = 1$ برابر است با $g(T_{p,q}) = \frac{(p-1)(q-1)}{4}$

یافتن رویه‌ای با گونای $\frac{(p-1)(q-1)}{4}$ چندان مشکل نیست (تمرین). به کمک مطالعه چندجمله‌ای الکساندر گره‌های چنبره‌ای نشان خواهیم داد این کمینه گونای ممکن برای این گره‌هاست.

یک ناوردای دیگر برای مطالعه گره‌ها گونای چهاربعدی گره است. فرض کنید گره K در \mathbb{R}^3 نشسته باشد. با افزودن یک نقطه در بی‌نهایت \mathbb{R}^3 به S^3 تبدیل شده و گره در S^3 می‌نشیند. گونای چهار بعدی گره K که آن را با $g_4(K)$ نمایش می‌دهیم اینگونه تعریف می‌شود:

رویه همبند، فشرده، جهت‌پذیر و هموار F که به صورت $(F, \partial F) \subset (D^4, \partial D^4 = S^3)$ در D^4 نشسته است و مرز آن برابر

تصویر ۴. L_+ (سمت چپ)، L_- (سمت راست).

برای هر گره K با تعداد منتهای تغییر تقاطع، می‌توان به گره بدیهی رسید. کمترین تعداد مورد نیاز برای رسیدن به گره بدیهی را، عدد باز شدن گره K می‌نامیم و آن را با $u(K)$ نمایش می‌دهیم. سختی محاسبه $u(K)$ در این است که نمی‌دانیم چه دیاگرامی از گره K است که مقدار کمینه این کمیت را بدست می‌دهد.

قضیه ۱ (صورت ضعیف حدس میلنور^۳). عدد باز شدن گره چنبره‌ای $T_{p,q}$ که $(p, q) = 1$ برابر است با $u(T_{p,q}) = \frac{(p-1)(q-1)}{4}$.

نسبتاً ساده است که نشان دهیم گره چنبره‌ای را می‌توان با تغییر تقاطع به گره بدیهی تبدیل کرد (تمرین). اما اینکه اثبات کنیم هیچ روشی برای باز کردن گره چنبره‌ای با تعداد کمتری تغییر تقاطع وجود ندارد مساله چالش برانگیز است. این حدس میلنور (سال ۱۹۶۸) نخستین بار توسط کرونهاایمر^۴ و مروکاه^۵ (سال ۱۹۹۲) به کمک ابزارهای نظریه پیمانهای اثبات شد. طرحی از یک اثبات برای این حقیقت به کمک اطلاعات ذخیره شده در همولوژی شبکه‌ای ارائه خواهیم کرد.

گره‌ها و لینک‌ها را می‌توان به کمک رویه‌هایی که کران می‌کنند مطالعه کرد. برای هر گره K همواره رویه مرزدار، فشرده و هموار در \mathbb{R}^3 وجود دارد بطوریکه مرز آن همان K باشد. آن را یک رویه سایفرت برای گره K می‌نامیم، تصویر ۵. برای هر گره رویه‌های سایفرت مختلفی موجود است، با گوناوای مختلف.

^۳Milnor's Conjecture^۴Peter Kronheimer^۵Tomasz Mrowka

۳ چندجمله‌ای الکساندر

جیمز الکساندر^۶ در سال ۱۹۲۳ ناوردای قدرتمندی در نظریه گره‌ها یافت. وی توانست به هر لینک یک چندجمله‌ای لوران نسبت دهد که با اینکه قابل محاسبه از روی یک دیاگرام آن می‌باشد اما به دیاگرامی که لینک را نمایش می‌دهد وابسته نیست. شاید این اولین روش سیستماتیک در تمییز دادن لینک‌ها از یکدیگر بود. برای نمونه چندجمله‌ای الکساندر گره بدیهی ۱ است و چندجمله‌ای الکساندر تریفول $1 - t + t^{-1}$. در نتیجه این دو گره با هم ایزوتوپیک نیستند. هر چند با گذر زمان روش‌های الگوریتمی برای محاسبه چندجمله‌ای الکساندر بر حسب یک دیاگرام داده شده لینک بدست آمد، اما تعریف اولیه جیمز الکساندر ذاتی توپولوژیک داشت. در این‌جا ابتدا به طور مختصر تعریف کلاسیک آن را ارائه می‌دهیم. هر چند خواننده می‌تواند این بخش را رد کرده و تنها روش محاسبه این چندجمله‌ای را مشاهده کند.

فرض کنید L لینکی در S^3 باشد، یک همسایگی باریک آن را با $nd(L)$ نمایش می‌دهیم. $nd(L)$ اجتماع مجزایی از تعدادی چنبره توپر است. بستار مکمل یک همسایگی لینک L یعنی $X = \overline{nd(L)} - nd(L)$ را بیرون لینک می‌نامیم. اگر F یک رویه سایفرت برای لینک L باشد، قسمتی از آن که در ناحیه بیرون لینک قرار می‌گیرد (بعد از بستار گیری) با خود F دیفیومورفیسم است. از همین جهت رویه اخیر را نیز با همان F نمایش می‌دهیم. یک همسایگی این رویه را در X در نظر بگیرید، $[-1, +1] \times F$ ، که خود F در لایه $\{0\} \times F$ قرار گرفته است. حال اصطلاحاً X را از روی F می‌بریم، یعنی ابتدا $X - F$ را در نظر گرفته سپس از آن بستار می‌گیریم. این کار شبیه به آن است که به جای F یک همسایگی باز F ، مثلاً $(-1, +1) \times F$ را از X کم کنیم، خمینه سه بعدی مرزدار فشرده بدست آمده را Y می‌نامیم.

در Y دونسخه مشابه F ، یعنی $\{+1\} \times F$ و $\{-1\} \times F$ وجود دارند. این‌ها مولفه‌های مرزی Y هستند. این رویه‌ها را با F_+ و F_- نشان می‌دهیم. اجتماع مجزای بی‌نهایت شمارا نسخه Y را در نظر بگیرید. این نسخه‌ها را با اعداد صحیح اندیس‌گذاری کنید. برای

با گره K است، $\partial F = K$ ، را یک رویه برشی برای گره K می‌نامیم. برای هر گره رویه‌های برشی مختلفی وجود دارد.

عدد صحیح

$$(۲) \quad \{ \text{یک رویه برشی برای } K \text{ است} \mid g(F) \} = g_s(K)$$

را گونای چهار بعدی گره K می‌نامیم. گره K را برشی (یا برای تاکید به طور هموار برشی) می‌گوییم اگر $g_s(K) = 0$ ، یعنی دیسک هموار رویه برشی K است.

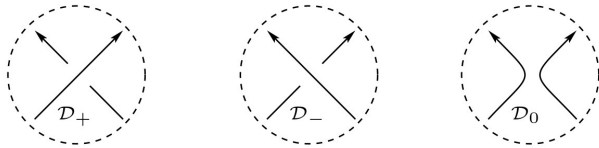
اگر شرط هموار بودن را ضعیف کنیم و همه رویه‌های توپولوژیک را در تعریف دخیل کنیم، دیسک توپولوژیک رویه برشی‌ای برای تمام گره‌ها خواهد بود و برای هر گره K گونای صفر بدست می‌آید. اما می‌توان شرط میانه‌ای برگزید. گره K را در حد توپولوژیک برشی می‌گوییم اگر دیسک توپولوژیک D در D^* موجود باشد که $D \cap S^3 = K$ و بعلاوه در هر نقطه دیسک D در D^* یک راستای D^2 عمود موجود باشد.

برای هر گره K در \mathbb{R}^3 با رویه سایفرت F ، بعد از افزودن یک نقطه در بی‌نهایت و انتقال K و F به S^3 ، می‌توان یک رویه برشی ساخت. S^3 مرز D^4 است. کافی است درون رویه F (و نه مرز آن) را کمی به درون D^4 (به صورت هموار) هل دهید تا به یک رویه برشی برای گره K برسید. پس $g_s(K) \leq g(K)$. از طرفی با هر بار تغییر تقاطع گونای چهار بعدی حداکثر یک واحد تغییر می‌کند در نتیجه $g_s(K) \leq u(K)$.

قضیه ۳ (صورت قوی حدس میلنور). گونای چهار بعدی گره چنبره‌ای $T_{p,q}$ که $(p, q) = 1$ برابر است با $\frac{(p-1)(q-1)}{4}$. $g_s(T_{p,q}) = \frac{(p-1)(q-1)}{4}$. برهان کرونهایمر و مروکا این گزاره را نیز اثبات می‌کند. ما نیز کلیت برهانی برای این قضیه به کمک همولوژی شبکه‌ای ارائه می‌دهیم.

یکی از موثرترین ابزارها در نظریه گره‌ها در تمییز لینک‌ها از یکدیگر و محاسبه کمیت‌های عددی‌شان، ناوردهای چندجمله‌ای هستند.

^۶James Alexander



تصویر ۶.

در واقع داشتن این رابطه به همراه این نکته که $\Delta_0(t) = 1$ برای محاسبه چندجمله‌ای الکساندر هر لینکی کافی است.

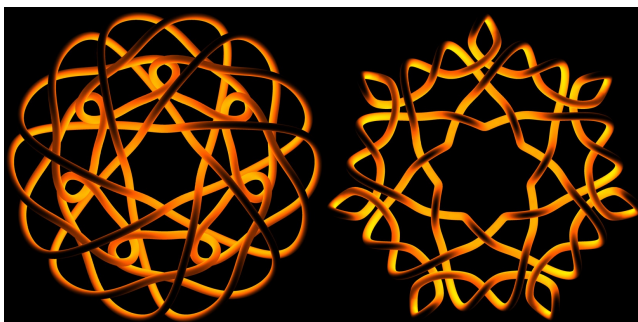
همانطور که گفتیم این چندجمله‌ای حاوی اطلاعات توپولوژیک درباره لینک و مکمل آن است.

قضیه ۴. اگر K گره‌ای در \mathbb{R}^3 با چندجمله‌ای الکساندر $\Delta_K(t)$ درجه $d(K)$ و گونای سایفرت $g(K)$ باشد آنگاه $g(K) \geq d(K)$.

در نتیجه به کمک محاسبه چندجمله‌ای الکساندر می‌توان کران پایینی برای گونای سایفرت گره ارائه کرد، هر چند می‌توان نشان داد می‌توان مقدار $d(K) - g(K)$ می‌تواند به هر اندازه دلخواه بزرگ شود.

قضیه ۴، قضیه ۲ را نتیجه می‌دهد چراکه چندجمله‌ای الکساندر گره چنبره‌ای $T_{p,q}$ برابر است با $\Delta_{T_{p,q}} = t^k \frac{(t^{pq}-1)(t-1)}{(t^p-1)(t^q-1)}$. در نتیجه $g(T_{p,q}) = \frac{(p-1)(q-1)}{4}$.

در ادامه ابزار قدرتمندتری برای مطالعه گره‌ها معرفی می‌کنیم. تمرین. با ابزارهایی که تا به این‌جا معرفی شد گره‌های زیر را بررسی کنید.



تصویر ۷.

هر i صحیح، مرز F_+ از نسخه‌ای از Y که اندیس i دارد را به مرز F_- از نسخه‌ای از Y که اندیس $i+1$ دارد می‌چسبانیم. از آنجایی که این دو مولفه مرزی هر دو یک کپی از F هستند یک نگاشت طبیعی میان‌شان موجود است. چسباندن را به کمک همین نگاشت انجام می‌دهیم. بعد از انجام این (بی‌نهایت) عمل یک خمینه سه بعدی همبند فشرده بدون مرز خواهیم داشت. این خمینه را با X_∞ نمایش می‌دهیم. یک خود-هومومرفیسم نسبتاً طبیعی روی این خمینه بسته سه بعدی موجود است، $t: X_\infty \rightarrow X_\infty$ ، هر نقطه x از X_∞ یک اندیس را مشخص می‌کند و آن هم‌اندیس نسخه Y ای است که پیش از عمل چسباندن، در آن Y زندگی می‌کرده است. مگر نقاطی که روی مرز Y بوده‌اند، این نقاط دواندیس متوالی را مشخص می‌کنند. معادل همین نقطه در خمینه بانندیس یکی بیشتر را در نظر بگیرید (در مورد نقاط مرزی نیز همین کار را انجام دهید)، آن را با y نشان می‌دهیم. قرار می‌دهیم $t(x) = y$. همولوژی اول X_∞ با ضرایب صحیح، $H_1(X_\infty; \mathbb{Z})$ ، را در نظر بگیرید. نگاشت t یک نگاشت در سطح همولوژی القا می‌کند، یا معادلاً این نگاشت القایی روی گروه همولوژی عمل می‌کند. بعلاوه \mathbb{Z} نیز روی هر گروه آبدلی عمل می‌کند. در نتیجه $\mathbb{Z}[t^{-1}, t]$ (چندجمله‌های لوران با ضرایب صحیح) روی گروه همولوژی عمل می‌کند. پس $H_1(X_\infty; \mathbb{Z})$ یک $-\mathbb{Z}[t^{-1}, t]$ مدول است. یک ماتریس نمایش این مدول را در نظر بگیرید. دترمینان این ماتریس در حد یک ضریب $\pm t^{\pm n}$ ، برای یک عدد طبیعی n ، ناوردای لینک است، یعنی به رویه سایفرت انتخاب شده، یا نمایش انتخاب شده برای مدول بستگی ندارد. می‌توان با ضرب در توان مناسبی از t (با علامت مثبت یا منفی) این چندجمله‌ای را نرمال کرد (بطوریکه هم متقارن باشد و هم مقدار آن در ۱ برابر با ۱ شود). چندجمله‌ای بدست آمده را چندجمله‌ای الکساندر متقارن می‌گوییم. چندجمله‌ای الکساندر لینک L را با $\Delta_L(t)$ نمایش می‌دهیم.

جان کانوی نشان داد چندجمله‌ای الکساندر متقارن در رابطه $\Delta_{L_+}(t) - \Delta_{L_-}(t) = (t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}})\Delta_L(t)$ صدق می‌کند، که L_+ ، L_- و L_0 لینک‌هایی هستند که دیاگرام‌شان، D_+ ، D_- و D_0 ، خارج یک دیسک مشابه هم و داخل دیسک آن‌چنان است که در تصویر ۶ نشان داده شده.

۴ همولوژی فلور گره

همولوژی شبکه‌ای، چندجمله‌ای به نام چندجمله‌ای پوانکاره نسبت می‌دهیم که بعد فضاهای برداری را در خود ذخیره می‌کند.

$$P_K(q, t) = \sum_{d, s \in \mathbb{Z}} \dim_{\mathbb{F}} \widehat{GH}_d(K, s) \cdot t^s q^d.$$

این چندجمله‌ای تمام اطلاعات موجود در همولوژی شبکه‌ای را در خود دارد. همانطور که دانستن بعد یک فضای برداری روی یک میدان \mathbb{F} در حد یکرختی آن فضا را مشخص می‌کند، این جا نیز دانستن بعد تک‌تک فضاهای برداری (یا به طور معادل دانستن چندجمله‌ای پوانکاره) در حد یکرختی همولوژی شبکه‌ای را مشخص می‌کند. حال اگر از بخشی از اطلاعات این چندجمله‌ای دو متغیره صرف نظر کنیم و قرار دهیم $q = -1$ ، به یک چندجمله‌ای یک متغیره می‌رسیم که آن را مشخصه اوایلر مدرج همولوژی شبکه‌ای می‌نامیم،

$$\chi(\widehat{GH}(L)) = P_K(-1, t) = \sum_{d, s \in \mathbb{Z}} (-1)^d \dim_{\mathbb{F}} \widehat{GH}_d(L, s) \cdot t^s \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]. \quad (۳)$$

حال نکته جالب این است که این چندجمله‌ای (مشخصه اوایلر مدرج) برابر است با چندجمله‌ای الکساندر متقارن لینک. این نشان می‌دهد که همولوژی شبکه‌ای حداقل به اندازه چندجمله‌ای الکساندر در خود اطلاعات دارد. در حقیقت اطلاعات بسیار بیشتری در همولوژی شبکه‌ای موجود است.

۱.۴ کاربردهای همولوژی شبکه‌ای

همولوژی شبکه‌ای ابزار مناسبی برای مطالعه ناوردهای عددی گره، از جمله گونای سایفرت و گونای چهار بعدی آن است. همانطور که گفتیم اطلاعات زیادی در مورد گره در همولوژی شبکه‌ای ذخیره می‌شود اما گاهی تفسیر این اطلاعات خود کار مشکلی است.

^۷Heegaard Floer Homology

^۸Peter Ozsváth

^۹Zoltan Szabo

^{۱۰}Jacob Rasmussen

^{۱۱}Sucharit Sarkar

^{۱۲}Ciprian Manolescu

همولوژی هیگارد فلور^۷، که نخستین بار توسط پیتر اوجوات^۸ و سلطان سابو^۹ معرفی شد، نارودایی برای مطالعه خمینه‌های ۳ بعدی بسته و جهت‌پذیر است که به کمک منتقل کردن تکنیک‌های هندسه هممتافته به نمودارهای هیگارد تعریف شد. جیکوب راسموسن^{۱۰} و به طور مستقل اجوات و سابو نسخه‌ای از این ناوردا را برای لینک‌های درون خمینه‌های سه بعدی ارائه دادند، این ناوردا که همولوژی فلور گره نامیده می‌شود به هر لینک (که در گروه بنیادی بدیهی است) درون یک خمینه سه بعدی تعدادی گروه همولوژی نسبت می‌دهد که این گروه‌ها ناوردای این لینک هستند.

مدتی بعد سوچاریت سازکار^{۱۱} و سپس چیپریان مانولسکیو^{۱۲} راه‌هایی یافتند تا این ناوردا را برای لینک‌های درون \mathbb{R}^2 (یا S^2) به صورت ترکیباتی تعریف و محاسبه کنند. به این نسخه ترکیباتی، همولوژی شبکه‌ای گفته می‌شود هر چند که با نسخه اصلی همولوژی فلور گره یکرخت است.

ساده‌ترین نسخه همولوژی شبکه‌ای برای لینک L در S^3 ، یعنی $\widehat{GH}(L)$ ، یک فضای برداری متناهی بعد روی میدان $\mathbb{F} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ است که به یک مدرج‌سازی دوگانه مجهز شده است یعنی $\widehat{GH}(L) = \bigoplus_{d, s \in \mathbb{Z}} \widehat{GH}_d(L, s)$. همولوژی شبکه‌ای $\widehat{GH}(L)$ همولوژی همبافتی مجهز به مدرج‌سازی دوگانه است، $\widehat{GC}(\mathbb{G}, \hat{\partial})$ ، که $\widehat{GC}(\mathbb{G}) = \bigoplus_{d, s \in \mathbb{Z}} \widehat{GC}_d(\mathbb{G}, s)$. این همبافت از روی نوع خاصی از دیاگرام، به نام دیاگرام شبکه‌ای \mathbb{G} از لینک L قابل محاسبه است و

$$\hat{\partial} : \widehat{GC}_d(\mathbb{G}, s) \rightarrow \widehat{GC}_{d-1}(\mathbb{G}, s).$$

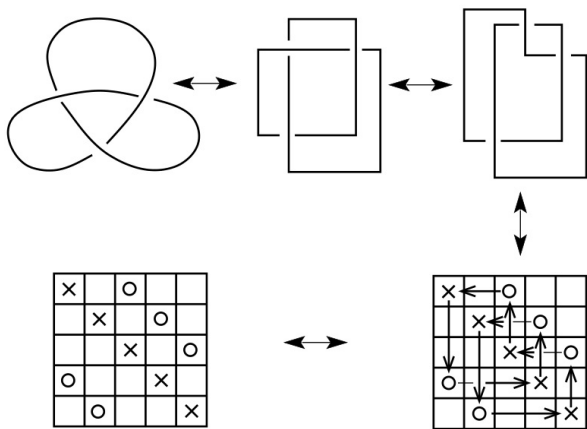
نکته جالب این است که می‌توان این ناوردای همولوژیک را تعمیمی از چندجمله‌ای الکساندر در نظر گرفت. به خانواده‌ای از فضاهای برداری با بعد متناهی که دارای مدرج‌سازی دوگانه‌اند، مثل

(۲- G) در هر ستون دقیقاً یک خانه علامت X دارد و دقیقاً یک خانه علامت O .

(۳- G) هیچ خانه‌ای دارای هر دو علامت X و O نیست. n را عدد شبکه‌ای \mathbb{G} می‌نامیم.

دیاگرام شبکه‌ای \mathbb{G} نمایش دهنده لینک L (با یک جهت روی آن) است که به این صورت ساخته می‌شود:

در هر ستون پاره‌خط جهت‌داری رسم کنید که خانه با علامت X را به خانه با علامت O وصل می‌کند. در هر سطر نیز پاره‌خط جهت‌داری رسم کنید که خانه با علامت O را به خانه با علامت X وصل می‌کند. قرارداد می‌کنیم که همواره خطوط عمودی از روی خطوط افقی رد شوند. در این وضعیت \mathbb{G} را یک دیاگرام شبکه‌ای برای لینک L گوئیم که به یک جهت نیز مجهز شده است، تصویر ۸. هر لینک جهت‌دار در \mathbb{R}^2 (یا S^2) را می‌توان توسط یک دیاگرام شبکه‌ای نمایش داد.



تصویر ۸. نحوه ساختن یک دیاگرام شبکه‌ای برای تریفویل.

به زودی در خواهیم یافت که نشان دادن دیاگرام شبکه‌ای مان روی چنبره مفید خواهد بود. اینکار را با یکی کردن مرز بالایی دیاگرام با مرز پایینی آن و مرز چپی دیاگرام با مرز راستی آن انجام می‌دهیم. چنبره بدست آمده جهت خود را از جهت صفحه به ارث می‌برد. این شی را دیاگرام شبکه‌ای چنبره‌ای می‌نامیم. خطوط عمودی و افقی دیاگرام مسطح روی چنبره تبدیل به دایره‌های عمودی و افقی می‌شوند (ما

برای نمونه دیدیم درجه چند جمله‌ای الکساندر متقارن کرانی پایین برای گونای گره است. یافتن این اطلاعات در گروه‌های همولوژی می‌تواند کار مشکلی باشد. خواهیم دید از همولوژی شبکه‌ای می‌توان یک ناوردای عددی، که آن را ناوردای τ می‌نامیم، بدست آورد. این ناوردا کران پایینی برای گونای چهار بعدی (و در نتیجه عدد باز شدن گره و گونای سایفرت گره) است. در نتیجه با محاسبه همولوژی شبکه‌ای گره، کران پایینی برای گونای چهار بعدی آن می‌یابیم. به کمک این روش می‌توان اثباتی برای حدس میلنور ارائه کرد. به کمک ناوردای τ همچنین اثباتی برای وجود ساختارهای نامتعارف روی \mathbb{R}^4 می‌دهیم.

کاربرد دیگر همولوژی شبکه‌ای تشخیص دقیق گونای سایفرت گره است. در واقع مقدار گونای گره K ، در $\widehat{GH}(K)$ ذخیره می‌شود. در نتیجه با محاسبه $\widehat{GH}(K)$ ، $g(K)$ هم محاسبه می‌گردد، هر چند این محاسبه NP-Complete است. یک نتیجه ساده این قضیه این است که همولوژی شبکه‌ای گره بدیهی را تشخیص می‌دهد. جالب است که هنوز اثباتی برای این قضیه، بر اساس تعریف ترکیباتی همولوژی شبکه‌ای یافت نشده است.

قضیه ۵. اگر گره‌ای در S^3 باشد، گونای سایفرت گره K برابر است با بزرگ‌ترین اندیس s که $\widehat{GH}_*(K, s)$ ناصفر است.

در بخش بعدی توصیفی از ساختار همولوژی شبکه‌ای ارائه می‌دهیم.

۲.۴ ساختن همولوژی شبکه‌ای

برای تعریف همولوژی شبکه‌ای از نوع خاصی از دیاگرام لینک، به نام دیاگرام شبکه‌ای استفاده می‌کنیم.

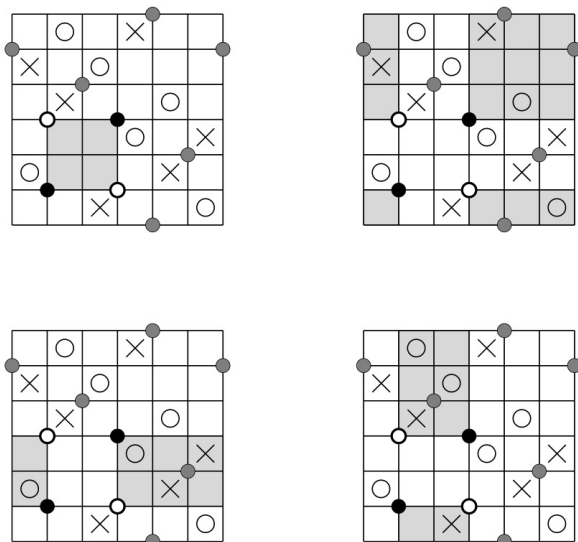
تعریف ۶. یک دیاگرام شبکه‌ای مسطح \mathbb{G} یک جدول $n \times n$ است که روی صفحه قرار گرفته یعنی یک مربع با n سطر و n ستون. بعلاوه n تای این خانه‌ها با علامت X و n تای دیگرشان با علامت O پر شده‌اند. این علامت‌ها طوری قرار گرفته‌اند که:

(۱- G) در هر سطر دقیقاً یک خانه علامت X دارد و دقیقاً یک خانه علامت O .

نشسته روی چنبره که اضلاع آن روی دایره‌های افقی و عمودی قرار دارد را در نظر بگیرید به طوریکه مجموعه‌های x و y در $n - 2$ عضو روی چنبره اشتراک دارند و چهار نقطه باقی‌مانده، چهار گوشه مستطیل را تشکیل می‌دهند. بعلاوه جهت روی چنبره، جهتی روی مستطیل القا می‌کند و در نتیجه مرز مستطیل، یعنی اضلاع آن نیز جهتی خواهند داشت. گوییم مستطیل از x به y می‌رود اگر جهت اضلاع افقی مستطیل از عضوهای x به سوی عضوهای y باشند و اضلاع عمودی مستطیل از اعضای y به x ، تصویر ۱۰. اگر $x, y \in S(\mathbb{G})$ ، منظور از $Rect(x, y)$ مجموعه مستطیل‌های از x به y است. این مجموعه یا تهی است یا دو عضو دارد که در این صورت $Rect(y, x)$ هم دو عضو خواهد داشت. به مستطیل $r \in Rect(x, y)$ مستطیل تهی می‌گوییم اگر

$$x \cap \text{int}(r) = y \cap \text{int}(r) = \emptyset.$$

مجموعه مستطیل‌های تهی از x به y را با $Rect^\circ(x, y)$ نمایش می‌دهیم.

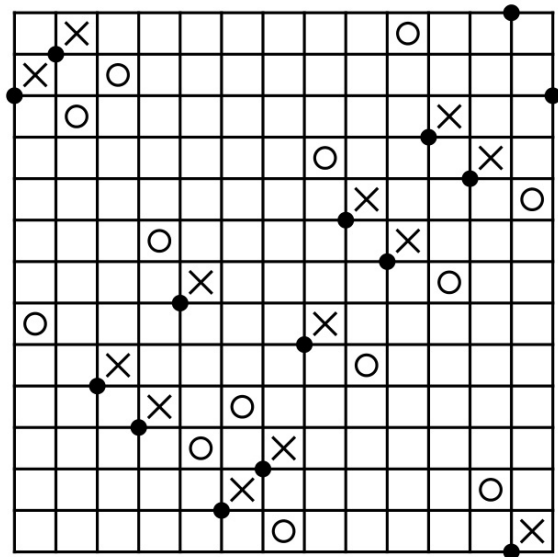


تصویر ۱۰. مستطیل‌های واسط میان دو حالت شبکه‌ای.

همبافت‌های شبکه‌ای مجهز به دو مدرج‌سازی هستند به نام‌های مدرج‌سازی ماسلوف و مدرج‌سازی الکساندر که هر دو توسط توابعی صحیح مقدار روی حالت‌های شبکه‌ای یک دیاگرام شبکه‌ای

آن‌ها را این چنین می‌نامیم). برای گره K یک دیاگرام شبکه‌ای چنبره‌ای با عدد شبکه‌ای n در نظر بگیرید، n پاره‌خط افقی دیاگرام شبکه‌ای که به n دایره روی چنبره می‌روند را با $\alpha = \{\alpha_i\}_{i=1}^n$ و n پاره‌خط عمودی که آن‌ها نیز به n دایره روی چنبره می‌روند را هم با $\beta = \{\beta_i\}_{i=1}^n$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۷. یک حالت شبکه‌ای برای دیاگرام شبکه‌ای چنبره‌ای \mathbb{G} با عدد شبکه‌ای n یک تناظر یک‌به‌یک میان دایره‌های افقی و دایره‌های عمودی آن است. در واقع یک حالت شبکه‌ای یک مجموعه n عضوی از نقاط $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ روی چنبره است، با این ویژگی که هر عضو x دقیقاً روی یک دایره افقی و یک دایره عمودی است، تصویر ۹. مجموعه حالت‌های شبکه‌ای دیاگرام \mathbb{G} را با $S(\mathbb{G})$ نمایش می‌دهیم.



تصویر ۹. نقاط سیاه عضوهای یک حالت شبکه‌ای را تشکیل می‌دهند.

همبافت نسبت داده شده به یک دیاگرام شبکه‌ای توسط حالت‌های شبکه‌ای تولید می‌شود و نگاشت مرزگیری این همبافت توسط شمارش مستطیل‌های واصل میان این حالت‌های شبکه‌ای تعریف می‌شود. مفهوم مستطیل میان دو حالت شبکه‌ای را این چنین تعریف می‌کنیم:

تعریف ۸. دو حالت شبکه‌ای $x, y \in S(\mathbb{G})$ همراه با مستطیلی

۳.۴ ناوردای τ و حدس میلنور

فرض کنید K_+ گره‌ای با یک تقاطع مشخص شده مثبت باشد و K_- همان گره که تقاطع مشخص شده آن به یک تقاطع منفی تغییر یافته است.

قضیه ۱۰. نگاشت‌های $\mathbb{F}[U]$ -مدول زیر موجوداند،

$$C_- : GH^-(K_+) \rightarrow GH^-(K_-) \quad (5)$$

$$C_+ : GH^-(K_-) \rightarrow GH^-(K_+),$$

C_- یک نگاشت با مدرج‌سازی دوگانه (نگاشتی که درجه‌های ماسلوف و الکساندر را حفظ می‌کند) و C_+ یک نگاشت همگن از درجه $(-1, -2)$ است (درجه ماسلوف را ۲ واحد و درجه الکساندر را ۱ واحد کاهش می‌دهد) بطوریکه

$$C_- \circ C_+ = U \quad C_+ \circ C_- = U. \quad (6)$$

تعریف دقیق این نگاشت‌ها را بیان نخواهیم کرد چرا که فرض وجودشان برای اثبات حدس میلنور کفایت می‌کند.

برای هر مدول M روی $\mathbb{F}[U]$ منظور از زیر مدول تابدار $Tors(M)$ از M ،

$$Tors(M) = \{m \in M \mid \exists p \in \mathbb{F}[U] \setminus \{0\}, p \cdot m = 0\}$$

است. قضیه اخیر نشان می‌دهد برای هر گره K ، $GH^-(K)/Tors(GH^-(K)) \cong \mathbb{F}[U]$ (تمرین). در نتیجه برای هر گره K عضوهای همگن غیر تابدار در $GH^-(K)$ وجود دارند. تعریف ۱۱ (ناوردای τ). برای هر گره K ، $\tau(K)$ را -1 برابر بزرگ‌ترین عدد صحیح i تعریف می‌کنیم که برای این i ، عضو غیر تابدار همگنی با درجه الکساندر i در $GH^-(K)$ وجود دارد.

با توجه به قضیه ۱۰ می‌توان بررسی کرد با هر تغییر تقاطع ناوردای τ چقدر تغییر می‌کند.

قضیه ۱۲. اگر K_+ گره‌ای با یک تقاطع مشخص شده مثبت و K_- همان گره که تقاطع مشخص شده آن به تقاطع منفی تغییر یافته است، باشد؛ آن‌گاه $0 \leq \tau(K_+) - \tau(K_-) \leq 1$ است. در نتیجه برای هر گره K ، $|\tau(K)| \leq u(K)$.

چنبره‌ای القا می‌شوند. در این‌جا وارد جزئیات تعریف این دو نگاشت صحیح مقدار نمی‌شویم.

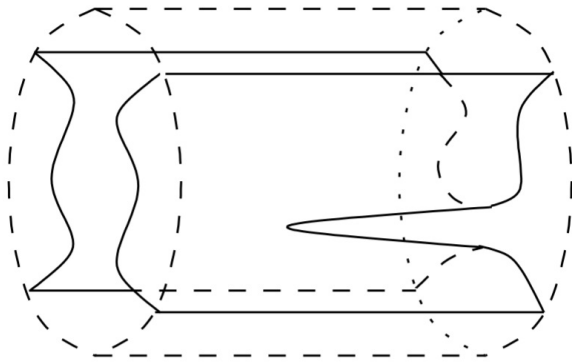
فرض کنید $R = \mathbb{F}[V_1, \dots, V_n]$ و $\mathbb{O} = \{O_i\}_{i=1}^n$ ، یک تناظر یک‌به‌یک میان نشان‌های O و مولدهای V_i از جبر چندجمله‌ای‌های R موجود می‌باشد. به بیان غیر رسمی همبافت شبکه‌ای GC^- یک R -مدول، تولید شده توسط حالت‌های شبکه‌ای است، مجهز به نگاشت مرزگیری $\partial_{\mathbb{X}}^-$ که مستطیل‌های تهی‌ای را می‌شمارد که می‌توانند شامل علامت O باشند ولی X نه. تکرر $O_i(r)$ برای مستطیل r در نقطه O_i را برابر با 0 یا 1 تعریف می‌کنیم به ترتیب اگر شامل O_i باشد یا نباشد. این تکرر توان متغیر فرمال V_i خواهد بود.

تعریف ۹. همبافت شبکه‌ای $GC^-(\mathbb{G})$ مدول آزاد تولید شده روی حلقه R توسط $S(\mathbb{G})$ ، مجهز به اندومورفیسم R -مدول‌هاست که مقدار آن روی هر $x \in S(\mathbb{G})$ توسط رابطه زیر داده شده است،

$$\partial_{\mathbb{X}}^-(x) = \sum_{y \in S(\mathbb{G})} \sum_{\{r \in \text{Rect}^\circ(x, y) \mid r \cap \mathbb{X} = \emptyset\}} V_1^{O_1(r)} \dots V_n^{O_n(r)} \cdot y. \quad (4)$$

فرض کنید \mathbb{G} دیاگرام یک گره باشد. برای یک $i \in \{1, \dots, n\}$ ، همولوژی همبافت بالا روی حلقه $\mathbb{F}[U]$ برای $U = V_i$ یک ناوردای گره است، هرچند که این R -مدول‌های همولوژی به کمک یک دیاگرام شبکه‌ای گره محاسبه شده‌اند. در صورتی که L یک لینک l -مولفه‌ای باشد که O_{i_1}, \dots, O_{i_l} روی l مولفه مختلف آن قرار گرفته‌اند، ابتدا باید به همبافت خارج‌قسمتی $\frac{GC^-(\mathbb{G})}{V_{i_1} \dots V_{i_l}}$ برویم. همولوژی این همبافت روی حلقه $\mathbb{F}[U]$ برای $U = V_i$ ، $i \in \{1, \dots, n\}$ ، یک ناوردای لینک است.

اگر قرار دهیم $U = 0$ به فضاهای برداری همولوژی \widehat{GH} می‌رسیم که در بخش پیش معرفی کردیم. آن‌ها ساختار ساده‌تری دارند (فضای برداری‌اند)، ساده‌تر محاسبه می‌شوند اما اطلاعات کمتری نیز دربردارند. برای نمونه برای محاسبه گونای ساینفرت گره کافی‌اند (قضیه ۵)، اما اثبات حدس میلنور به کمک نسخه مدولی همولوژی شبکه‌ای ممکن خواهد بود.



تصویر ۱۱. بخشی از یک کوپوردیسم میان دو گره.

۵ ساختارهای هندسی در ابعاد پایین^{۱۳}

در این بخش \mathbb{R}^4 را به عنوان یک فضای توپولوژیک با توپولوژی استاندارد اقلیدسی آن، به یک ساختار هموار نامتعارف مجهز می‌کنیم. منظور از یک ساختار هموار نامتعارف روی \mathbb{R}^4 ، ساختار همواری غیر از ساختار هموار استاندارد اقلیدسی آن است. در نتیجه خمینه‌ای خواهیم داشت که در حد توپولوژیک با \mathbb{R}^4 یکی است (هومئومورفیک است) اما دیفیومورفیک نیست.

این مساله که با چه شرایطی یک خمینه توپولوژیک M ، ساختاری غنی‌تر، یعنی قطعه‌قطعه خطی یا هموار می‌پذیرد، مساله چالش برانگیزی است. بر حسب بعد M این مساله را در سه بخش بررسی می‌کنیم.

۱.۵ ساختارهای قطعه‌قطعه خطی و هموار روی

خمینه‌های با بعد $n = 3$

در دنیای خمینه‌های سه بعدی ساختارهای توپولوژیک، قطعه‌قطعه خطی و هموار تفاوتی با هم ندارند.

قضیه ۱۵ (مویز^{۱۴}). فرض کنید M یک خمینه توپولوژیک سه بعدی باشد. در اینصورت M دارای یک اطلس هموار (قطعه‌قطعه)

^{۱۳} بخش‌های ۱، ۵، ۲، ۵ و ۳، ۵ به نقل از کتاب داستان توپولوژی بعد پایین نوشته نوشته ایمان افتخاری می‌باشند.

^{۱۴} Edwin Moise

دیدیم گره‌های چنبره‌ای را می‌توان در $\frac{(p-1)(q-1)}{4}$ گام باز کرد. از طرفی ناوردای τ برای گره‌های شبکه‌ای دقیقا برابر است با $\frac{(p-1)(q-1)}{4}$ (برای محاسبه این ناوردا حتی لازم نیست همولوژی شبکه‌ای را به طور کامل محاسبه کنیم)، که صورت ضعیف حدس میلنور را نتیجه می‌دهد.

گزاره زیر صورت قوی حدس میلنور را اثبات می‌کند.

قضیه ۱۳. برای هر گره K در \mathbb{R}^3 (یا S^3)، $\tau(K) \leq g_s(K)$.

برای دیدن صحت این گزاره، بایستی به مطالعه تغییرات ناوردای τ هنگامی که توسط یک کوپوردیسم با گونای g از گره K_0 به گره K_1 می‌رویم پرداخت. منظور از یک کوپوردیسم میان دو گره K_1 و K_2 ، رویه‌ای فشرده، هموار و مرزدار مثل S در $S^3 \times [0, 1]$ است که $\partial S \subset \{0, 1\} \times S^3$ و $\partial S \cap (\{i\} \times S^3) = K_i$ برای $i \in \{0, 1\}$. هر گاه بتوان دو گره را توسط یک کوپوردیسم (مشابه آنچه توصیف شد) با گونای g به هم وصل کرد آنگاه $|\tau(K_0) - \tau(K_1)| \leq g$ برای دیدن این نامساوی باید کوپوردیسم موجود را به کوپوردیسم‌های مقدماتی شکست و تغییرات τ را تحت کوپوردیسم‌های مقدماتی مطالعه کرد. محاسبه دقیق این تغییرات و در نتیجه اثبات صورت قوی حدس میلنور نتیجه گزاره زیر است که از ارائه تعریف دقیق نگاشت‌های موجود در آن خودداری می‌کنیم. بعلاوه با اینکه حکم نهایی در مورد گره‌هاست، مسیر اثبات آن از مطالعه همولوژی شبکه‌ای لینک‌ها می‌گذرد.

قضیه ۱۴. اگر لینک L' توسط یک کوپوردیسم زینی، تصویر ۱۱، از لینک L بدست آمده باشد بطوریکه تعداد مولفه‌های L' یکی از تعداد مولفه‌های L بیشتر باشد، در این صورت نگاشت‌های $\mathbb{F}[U]$ -مدول زیر موجوداند،

$$\sigma : GH^-(L) \otimes W \rightarrow GH^-(L') \quad (V)$$

$$\mu : GH^-(L') \rightarrow GH^-(L) \otimes W,$$

که $W = \mathbb{F}_{(0,0)} \oplus \mathbb{F}_{(-1,-1)}$. بعلاوه نگاشت σ همگن و از مرتبه $(-1, 0)$ و نگاشت μ همگن و از مرتبه $(-1, -1)$ است و $\mu \circ \sigma$ هر دو برابرند با ضرب در U .

ماکسیمال است. به علاوه هر دو ساختار هموار (قطعه‌قطعه خطی) ماکسیمال M با هم معادل‌اند.

نتیجه قضیه مویز این است که برای هر خمینه توپولوژیک سه بعدی می‌توان ساختاری هموار (قطعه‌قطعه) در نظر گرفت. همانطور که خواهیم دید این قضیه در سایر ابعاد صحیح نیست.

۲.۵ ساختارهای قطعه‌قطعه خطی و هموار روی خمینه‌های با بعد $n < 4$

در ابعاد بزرگ‌تر از ۴، اولین قدم مهم را رابین کرامول کربی^{۱۵} و کارل سیبنمان^{۱۶} برداشتند. ناوردای کربی-سیبنمان^{۱۷} در واقع تنها مانع وجود ساختار قطعه‌قطعه خطی را برای دسته‌ای از خمینه‌ها مشخص می‌کند. یک خمینه بسته M دارای یک ساختار قطعه‌قطعه خطی است اگر و فقط اگر ناوردای کربی-سیبنمان در $H^4(M, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ صفر شود. برای بررسی یکتایی یا عدم یکتایی ساختار قطعه‌قطعه خطی آن‌ها کلاس مانع دیگری در $H^3(M, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ ارائه کردند که باز هم برای خمینه‌های با بعد بزرگ‌تر از ۴ مانع کاملی است.

وجود ساختارهای قطعه‌قطعه خطی روی یک خمینه توپولوژیک M شرطی قوی‌تر از وجود یک مثلث‌بندی روی M است. به کمک ناوردای مطرح شده می‌توان خمینه‌های توپولوژیک بسته‌ای ارائه کرد که ساختار قطعه‌قطعه خطی نمی‌پذیرند اما اینکه آیا خمینه‌ای وجود دارد که نتوان روی آن یک مثلث‌بندی نیز ارائه کرد، سوال دیگری است.

حدس مثلث‌بندی بیان می‌کند که اگر M یک خمینه توپولوژیک بسته باشد آنگاه روی M یک مثلث‌بندی موجود است.

در سال ۲۰۱۶ چپیریان مانولسکیو به کمک نظریه زایبرگ-ویتن^{۱۸}

نشان داد این حدس صحیح نیست.

قضیه ۱۶ (مانولسکیو). برای هر عدد صحیح $n > 4$ خمینه توپولوژیک بسته n بعدی وجود دارد که هیچ مثلث‌بندی‌ای نمی‌پذیرد.

سوال مشابه دیگری در مورد وجود ساختار هموار روی یک خمینه قطعه‌قطعه خطی نیز مورد بررسی قرار گرفته و رویکرد ارائه کلاس‌های مانع در این مورد نیز، قبل از کارهای کربی و سیبنمان، توسط جیمز مانکرز^{۱۹} و موریس هرش^{۲۰} مطرح شده است. ژان سرف^{۲۱} براساس نظریه کلاس‌های مانع قضیه‌ای برای خمینه‌های با بعد حداقل ۷ اثبات کرد.

قضیه ۱۷. روی هر خمینه قطعه‌قطعه خطی M از بعد $n \leq 7$ یک ساختار هموار سازگار با ساختار قطعه‌قطعه خطی آن وجود دارد. اگر بعد اکیدا از ۷ بزرگ‌تر باشد این ساختار یکتاست.

یکتایی برای $n = 7$ صحیح نیست. جان میلنور^{۲۲} در سال ۱۹۵۶ نشان داد در این بعد اتفاق ویژه‌ای رخ می‌دهد.

قضیه ۱۸. روی کره S^7 دقیقاً ۲۸ ساختار هموار مختلف وجود دارد.

در سال ۱۹۶۳ میلنور و میشل کروایر^{۲۳} نشان دادند ساختارهای هموار مختلف روی S^n برای هر n مخالف ۴ به همراه جمع همبند، یک گروه متناهی و جابه‌جایی تشکیل می‌دهند، این گروه را با \mathcal{S}_n نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱۹. برای همه اعداد صحیح و مثبت $n \neq 4$ ، \mathcal{S}_n یک گروه آبدی متناهی است. برای ابعاد کمتر از ۱۹ این گروه توسط جدول ۱۲ مشخص می‌شود. در این جدول منظور از \mathbb{F}_k ، $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ و منظور از $\langle 1 \rangle$ گروه بدیهی است.

^{۱۵}Robion Kirby

^{۱۶}Carl Siebenmann

^{۱۷}Kirby-Siebenmann Invariant

^{۱۸}Seiberg-Witten Invariant

^{۱۹}James Munkres

^{۲۰}Morris Hirsch

^{۲۱}Jean Cerf

^{۲۲}John Milnor

^{۲۳}Michel Kervaire

روی این خمینه بی‌نهایت ساختار هموار متمایز وجود دارد. ساختن بی‌نهایت ساختار هموار متمایز روی یک خمینه توپولوژیک پدیده‌ای کاملاً خاص است که بعد ۴ را از سایر ابعاد متمایز می‌کند.

این حکم برای \mathbb{R}^4 نیز صحیح است. در واقع \mathbb{R}^n برای هر $n \neq 4$ ساختار هموار یکتا دارد. \mathbb{R}^4 نا شمارا ساختار هموار متمایز می‌پذیرد. بعلاوه این سوال، یعنی وجود ساختار همواری غیر از ساختار هموار استاندارد، در مورد S^4 باز است.

۴.۵ ساختن \mathbb{R}^4 های نامتعارف به کمک گره‌های غیر برشی در حد توپولوژیک برشی

در ادامه اثباتی برای وجود یک ساختار هموار نامتعارف روی \mathbb{R}^4 ارائه می‌دهیم. گزاره‌های زیر حقایق استاندارد در مطالعه خمینه‌های ۳ بعدی و ۴ بعدی هستند که ما نیز آن‌ها را فرض می‌کنیم و به اثبات‌شان نمی‌پردازیم.

- (مویز) هر خمینه ۳ بعدی توپولوژیک یک ساختار هموار یکتا (در حد دیفیومورفیسم) می‌پذیرد و هر همومورفیسم میان دو خمینه ۳ بعدی با یک دیفیومورفیسم میان‌شان ایزوتوپ است.
- (فریدمن) هر گره $K \subset S^3$ با $\Delta_K(t) = 1$ ، در حد توپولوژیک برشی است.
- (فریدمن و کویین) هر خمینه همبند و غیر فشرده ۴ بعدی توپولوژیک (احتمالاً مرزدار) ساختار هموار می‌پذیرد.

فرض کنید X_K یک خمینه مرزدار ۴ بعدی فشرده و هموار باشد که توسط چسباندن یک ۲-دسته ۴ بعدی به D^4 در راستای K با عدد قاب‌بندی صفر بدست آمده است. یعنی X_K با چسباندن D^4 به $D^2 \times D^2$ حاصل شده به طوریکه

$$nd(K) \cong S^1 \times D^2 \subset S^3 = \partial D^4$$

با $(\partial D^2) \times D^2 = S^1 \times D^2$ توسط قاب‌بندی سایفرت روی K یکی شده باشد.

\mathcal{S}_n	n	\mathcal{S}_n	n
\mathbb{F}_6	۱۰	$\langle 1 \rangle$	۱
\mathbb{F}_{992}	۱۱	$\langle 1 \rangle$	۲
$\langle 1 \rangle$	۱۲	$\langle 1 \rangle$	۳
\mathbb{F}_2	۱۳	??	۴
\mathbb{F}_2	۱۴	$\langle 1 \rangle$	۵
$\mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_{8128}$	۱۵	$\langle 1 \rangle$	۶
\mathbb{F}_2	۱۶	\mathbb{F}_{28}	۷
$\mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_8$	۱۷	\mathbb{F}_2	۸
$\mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_8$	۱۸	$\mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2$	۹

تصویر ۱۲. ساختارهای هموار روی S^n .

همانطور که در جدول ۱۲ دیده می‌شود در بعد ۱۲ هم حدس پوانکاره^{۲۴} در کنگوری هموار صحیح است. در مورد $n = 61$ نیز چنین است. در واقع حدس میلنور بیان می‌کند گروه \mathcal{S}_n برای $n \geq 6$ به جز ابعاد ۱۲ و ۶۱ نابدیهی است.

قضیه ۲۰. فرض کنید M خمینه‌ای قطعه‌قطعه خطی و بسته از بعد $n > 4$ باشد. در این صورت تعداد ساختارهای هموار مختلف M متناهی‌اند و برابراند با تعداد اعضای \mathcal{S}_n .

روش‌هایی که برابر حل این مسائل به کار رفته است برای مطالعه خمینه‌های ۴ بعدی کارایی نداشته و ایده‌های کاملاً متفاوتی برای پرداختن به بعد ۴ لازم است.

۳.۵ ساختارهای هموار در بعد ۴

سایمون دونالدسون^{۲۵} با استفاده از معادلات یانگ-میلز^{۲۶} دو ساختار هموار متمایز روی $(\mathbb{C}P^2 \# (\mathbb{C}P^2))$ ، $X(1,9)$ که خمینه‌ای بسته و همبند ساده است ارائه کرد. پس از مدتی اثبات شد

^{۲۴}Poincare's Conjecture

^{۲۵}Simon Donaldson

^{۲۶}Yang-Mills Equations

آن K است. پس تصویر این دیسک تحت نشانند X_K در \mathbb{R}^4 یک دیسک برشی برای K می‌باشد.

قضیه ۲۱. فرض کنید $K \subset S^3$ گره‌ای است با چندجمله‌ای الکساندر $\Delta_K(t) = 1$ و $\tau(K) \neq 0$. خمینه R_K با \mathbb{R}^4 استاندارد اقلیدسی هومئومورفیک است ولی دیفیومورفیک نیست.

برهان. با توجه به قضیه فریدمن K در حد توپولوژیک برشی است پس خمینه R_K بعدی R_K هومئومورفیک با \mathbb{R}^4 موجود است که یک نسخه هموار از X_K دارد. از آنجایی که $\tau(K) \neq 0$ ، $g_s(K) \geq 0$ و در نتیجه گره K در حد هموار برشی نیست پس خمینه X_K به طور هموار در \mathbb{R}^4 نمی‌نشیند.

قضیه ۲۲. روی \mathbb{R}^4 یک ساختار نامتعارف موجود است.

برهان ۲۳. گره $W_-(T_{-2,2})$ که دیاگرام شبکه‌ای آن را در تصویر ۹ مشاهده می‌کنید، را در نظر بگیرید. چندجمله‌ای الکساندر این گره برابر با ۱ است. اثبات اینکه این گره برشی نیست با محاسبه $\tau(W_-(T_{-2,2})) \leq -1$ نشان داده می‌شود. که بر اساس قضیه فوق نشان از وجود یک ساختار ناهموار روی \mathbb{R}^4 دارد.

۶ منابعی برای مطالعه بیشتر

- داستان توپولوژی بعد پایین نوشته ایمان افتخاری
- برای مطالعه تاریخچه توپولوژی بعد پایین می‌توانید به این کتاب مراجعه کنید. این کتاب که شامل شش فصل است با مطالعه تاریخچه و سرآغاز نظریه گره‌ها شروع می‌شود. فصل دوم کتاب به مطالعه حدس پوانکاره در مورد خمینه‌های سه بعدی و حدس هندسی سازی ترستن^{۲۷} می‌پردازد. فصل سوم که به لحاظ تاریخی نیز ادامه فصل قبلی است داستان کارهای ریچی^{۲۸}، همیلتون^{۲۹} و پرلمان^{۳۰} را در مورد خمینه‌های سه بعدی بیان می‌کند. فصل چهارم کتاب در مورد تعمیم حدس پوانکاره به ابعاد

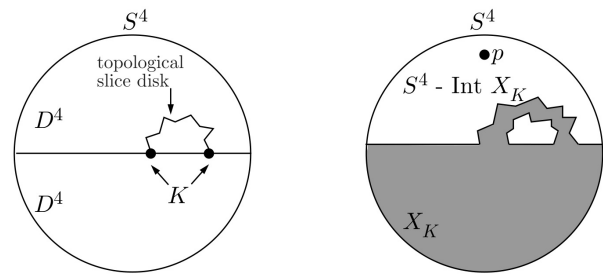
^{۲۷}William Thurston

^{۲۸}Gregorio Ricci-Curbastro

^{۲۹}Richard Hamilton

^{۳۰}Grigori Perelman

برای هر گره در حد توپولوژیک برشی $K \subset S^3$ ، یک خمینه $R = R_K$ بعدی هومئومورفیک با \mathbb{R}^4 موجود است به طوری که X_K به طور هموار در آن می‌نشیند. چرا که می‌توان S^4 را به عنوان اجتماع دو D^4 در نظر گرفت که که یک همسایگی استوانه‌ای از گره برشی K از درون یکی درآمده و به D^4 دیگر چسبانده شده، تصویر ۱۳.



تصویر ۱۳. در آوردن یک دیسک برشی توپولوژیک از یکی از دو نسخه D^4 در S^4 .

خمینه بدست آمده با X_K هومئومورفیک است و به یک نشانند توپولوژیک درون $S^4 = \mathbb{R}^4 \setminus \{p\}$ نیز مجهز شده است. با توجه به قضیه فریدمن و کوین می‌توان یک ساختار هموار برای $\mathbb{R}^4 \setminus \text{int}(X_K)$ در نظر گرفت. از طرفی بنابر قضیه مویس، یکسان‌سازی ∂X_K با $\partial(\mathbb{R}^4 \setminus \text{int}(X_K))$ را تحت ایزوتوپ می‌توان به یک دیفیومورفیسم تبدیل کرد. با چسباندن هموار به یک خمینه هموار R می‌رسیم که با \mathbb{R}^4 هومئومورفیک است و با توجه به ساختن آن X_K نیز به طور هموار درون R می‌نشیند.

از طرفی اگر برای $K \subset S^3$ ، X_K به طور هموار در \mathbb{R}^4 بنشیند آنگاه K به طور هموار برشی است.

برای دیدن صحت این ادعا فرض کنید $D_\epsilon \subset D^4$ گویی به شعاع ϵ حول مبدا باشد. برای هر نگاشت هموار $\phi: D^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ با مشتق ناصفر در مبدا، برای ϵ به اندازه کافی کوچک مکمل $\phi(D_\epsilon)$ با $D^4 \setminus \mathbb{R}^4$ دیفیومورفیک است.

برای هر ϵ ، یک نسخه از K در $D^4 \subset \mathbb{R}^4$ وجود دارد که مرز و یک دیسک 2 بعدی هموار در $\mathbb{R}^4 \setminus \text{int}(D_\epsilon)$ وجود دارد که مرز

و ارتباطشان با خمینه‌های سه بعدی می‌توانید به این کتاب مراجعه کنید.

● *Holomorphic disks and topological invariants for closed three manifolds* by P. Ozsvath and Z. Szabo

● *Holomorphic disks and knot invariants* by P. Ozsvath and Z. Szabo

نوشته‌های بالا، به ترتیب، نسخه اصلی مطرح شده از همولوژی هیگارد فلور و همولوژی فلور گره اند، که در این نوشته از بیان تعریف آن‌ها خودداری کردیم.

● *Grid homology for knots and links* by P. Ozsvath and Z. Szabo

این کتاب درباره همولوژی شبکه‌ای و کاربردهای آن می‌باشد.

● *The geometry of four – manifolds* by Peter B. Kronheimer and S. Donaldson

برای مطالعه بیشتر در مورد مقدمات هندسه و توپولوژی خمینه‌های چهار بعدی می‌توانید به کتاب بالا مراجعه کنید.

بالتر به خصوص بعد چهار است. در این فصل مساله ساختارهای قطعه‌قطعه خطی و هموار روی خمینه‌های چهار بعدی مورد کنکاش قرار گرفته و ناوردهای زایبرگ-ویتن مطرح می‌شوند. موضوع فصل پنجم این کتاب نظریه فلور^{۳۱} و اثبات حدس آرنولد^{۳۲}، ناوردهای دونالدسون و نظریه توپولوژیک میدان‌های کوانتومی $TQFT$ ، همولوژی تقاطع‌های لاگرانژی فلور، همولوژی هیگارد فلور و معرفی برخی از کاربردهای توپولوژیک این ناوردهاست. در این فصل ارتباط‌هایی میان توپولوژی بعد پایین و فیزیک نظری نیز دیده می‌شود. فصل ششم کتاب باز به نظریه گره‌ها باز گشته تا نشان دهد ابزارهای جدید، که در فصل‌های قبل توسعه یافته‌اند تا چه حد در نظریه گره‌ها کارساز خواهند بود. در این فصل با همولوژی فلور گره و همینطور همولوژی خواناتوف نیز آشنا می‌شویم.

● *An introduction to knot theory* by R. Lickorish

برای آشنایی با نظریه گره‌ها، به خصوص ناوردهای چندجمله‌ای تعریف شده در این زمینه یعنی چندجمله‌ای جونز، چندجمله‌ای الکساندر و چندجمله‌ای $HOMFLY$

^{۳۱}Floer Theory

^{۳۲}Arnold's Conjecture

دینامیک همسان‌ریختی‌های روی دایره

سمیه یاسمن

چکیده

در بررسی بسیاری از پدیده‌های فیزیکی و پدیده‌های مشاهده شده در طبیعت، بررسی دینامیکی همسان‌ریختی‌های روی دایره کاربرد زیادی دارد. برای بررسی همسان‌ریختی‌های روی دایره به عنوان یک سیستم دینامیکی گسسته، ابزاری به نام عدد چرخشی^۱ در سال ۱۸۸۵ توسط پوانکاره معرفی شد. در این نوشتار، ابتدا عدد چرخشی معرفی می‌شود و سپس با ذکر قضایایی، شرایطی را بیان می‌کنیم که تحت آن شرایط، ویژگی‌های مهم دینامیکی یک همسان‌ریختی با توجه به گویا یا گنگ بودن عدد چرخشی به صورت کامل مشخص می‌شود.

۱ مقدمه

قبل از این که بخواهیم در مورد عدد چرخشی صحبت کنیم، ابتدا کمی مقدمات و مفاهیم اولیه را بیان می‌کنیم. نگاشت

$$\begin{cases} f : X \mapsto X \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$$

(که X یک فضای متریک است) را در نظر بگیرید. می‌توان f را به عنوان یک سیستم در نظر گرفت که x را به عنوان ورودی می‌گیرد و $f(x)$ را به عنوان خروجی تحویل می‌دهد. اگر f یک همسان‌ریختی X باشد، می‌توان آن را به عنوان یک سیستم دینامیکی گسسته در

نظر گرفت که هر مدار جواب با شروع از x به صورت

$$x, f(x), f^2(x) = f \circ f(x), \dots, f^k(x), \dots$$

است که $f^k(x)$ نمایشگر k بار ترکیب نگاشت f با خودش است. به این مدار جواب، مدار پیش‌رو x گویند و با $O(x)$ نمایش می‌دهند. همچنین به مجموعه‌ی

$$x, f^{-1}(x), f^{-2}(x), \dots$$

مدار پس‌رو x گویند. در میان خانواده‌ی همه‌ی همسان‌ریختی‌ها، خانواده‌ی همسان‌ریختی‌های روی دایره واحد، S^1 ، کاربرد زیادی دارند. برای مطالعه این همسان‌ریختی‌ها، می‌توان از \mathbb{R}/\mathbb{Z} که با S^1 یکی است استفاده کرد. پس، از این‌جا به بعد، از همسان‌ریختی‌های

$$\begin{cases} f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \pmod{1} \end{cases}$$

استفاده می‌کنیم. همچنین متر روی S^1 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$d(x, y) = \min\{|\gamma| \mid \gamma : [0, 1] \mapsto S^1, \gamma(0) = x, \gamma(1) = y, \gamma \in C([0, 1])\}$$

که منظور از $|\gamma|$ طول خم متناظر با γ روی S^1 است.

^۱Rotation number(Winding number)

۲ دینامیک نگاشت دوران

یکی از همسان‌ریختی‌هایی که می‌توان روی این فضا تعریف کرد، نگاشت دوران

$$\begin{cases} R_a : \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}} \mapsto \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}} \\ x \mapsto x + a \pmod{1} \end{cases}$$

که $a \in \mathbb{R}$ است. از این جا به بعد $\pmod{1}$ را در نوشتن حذف می‌کنیم مگر اینکه نیاز به تصریح آن باشد. ما علاقه‌مند به این هستیم که بدانیم تکرارهای زیاد نگاشت دوران وقتی از x شروع می‌شوند به کجا ختم می‌شوند. در ادامه می‌بینیم که گویا یا گنگ بودن a می‌تواند به طور کامل دینامیک نگاشت دوران را مشخص کند.

قضیه ۱. اگر $a \in \mathbb{Q}$ ، آنگاه برای هر x ثابت، $o(x)$ متناهی است. به عبارت دقیق‌تر

$$R_a : \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}} \mapsto \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}$$

تناوبی است.

اثبات. فرض کنید $a = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ که p, q اعداد صحیح و نسبت به هم اول هستند. در این صورت داریم:

$$\forall x \in \mathbb{R} : R_a^q(x) = x + q \times \frac{p}{q} = x + p = x \pmod{1}$$

در نتیجه R_a تناوبی با دوره تناوب q است. \square

در حالتی که $a \in \mathbb{Q}^c$ ، مسئله اینقدر ساده نیست. به عبارت دقیق‌تر، در این حالت هر یک از مدارها با شروع از $x \in S^1$ به طور یکنواخت روی S^1 توزیع می‌شود. در این حالت، دو سوال به ذهن می‌رسد:

۱. برای هر دو نقطه‌ی $x, y \in S^1$ ، آیا مدار x شامل نقطه‌ای به دلخواه نزدیک به y است؟

۲. دو بازه‌ی دلخواه در S^1 با طول‌های متفاوت را در نظر بگیرید.

آیا بازه‌ی بزرگتر، شامل تعداد بیشتری از نقاط مدار x است

یا خیر؟

۲ به قضیه‌ی وایل، قضیه‌ی هم توزیع یا Equidistributed هم گفته می‌شود.

این دو سوال در قضیه‌ی زیر پاسخ داده می‌شوند:

قضیه ۲. (Weyl-Laplace) نگاشت دوران R_a را در نظر بگیرید که $a \in \mathbb{Q}^c$. همچنین فرض کنید U بازه‌ای به فرم $[c, d]$ باشد که $0 \leq c < d \leq 1$. تعریف کنید

$$T(x, n) = \#\{1 \leq k \leq n \mid R_a^k(x) \in U\}$$

که $\#A$ نشان‌دهنده‌ی تعداد اعضای مجموعه A است. آنگاه داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T(x, n)}{n} = d - c$$

یادداشت. قضیه‌ی وایل در واقع می‌گوید که با تکرارهای هرچه بیشتر R_a ، میانگین تعداد نقاطی که در یک بازه‌ی دلخواه قرار می‌گیرند برابر با طول بازه است. ۲ اکنون که مهم‌ترین ویژگی‌های دینامیکی نگاشت دوران مشخص شد، می‌توان این سوال را پرسید که آیا پارامتری شبیه به a در نگاشت دوران برای یک همسان‌ریختی دلخواه f روی دایره قابل تعریف است که با توجه به گویا یا گنگ بودن آن، بتوان دینامیک f را تعیین کرد. در قسمت بعد تلاش می‌شود تا به این سوال، با تعریف مفهومی جدید به نام عدد چرخشی پاسخ داده شود.

۳ عدد چرخشی

در این بخش می‌خواهیم پارامتری به نام عدد چرخشی معرفی کنیم که بر اساس آن می‌توان ویژگی‌های مهم دینامیکی یک همسان‌ریختی دلخواه روی دایره را تعیین کرد. فرض کنید همسان‌ریختی دلخواه

$$f : S^1 \mapsto S^1$$

به ما داده شده است. همچنین فرض کنید همسان‌ریختی

$$h : S^1 \mapsto S^1$$

وجود دارد که

$$R_a \circ h = h \circ f$$

قضیه‌ی زیر ما را قادر می‌سازد که عدد چرخشی را برای همسان‌ریختی جهت نگه‌دار $f : S^1 \mapsto S^1$ تعریف کنیم.

قضیه ۳. فرض کنید $f : S^1 \mapsto S^1$ یک همسان‌ریختی جهت نگه‌دار باشد و $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ یک ترفیع آن باشد. برای $x \in \mathbb{R}$ تعریف کنید:

$$\tau(F) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (F^n(x) - x)$$

آنگاه برای هر $x \in \mathbb{R}$ این حد وجود دارد و مقدار آن، مستقل از x است. به علاوه، تفاوت $\tau(F)$ برای دو ترفیع متفاوت f به اندازه یک عدد صحیح می‌باشد. [۴]

تعریف ۲. عدد چرخشی همسان‌ریختی جهت نگه‌دار $f : S^1 \mapsto S^1$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tau(f) := \pi(\tau(F)) \quad (1)$$

که F یک ترفیع f است.

یادداشت. با توجه به قضیه قبل، عدد چرخشی که به صورت (۱) تعریف می‌شود خوش تعریف است.

۱.۳ عدد چرخشی گویا

بر اساس آنچه تا پیش از این گفتیم، اکنون می‌توانیم احکام زیر را راجع به عدد چرخشی گویا بیان کنیم.

قضیه ۴. اگر f یک همسان‌ریختی جهت نگه‌دار روی S^1 باشد، آنگاه:

$\tau(f)$ گویاست اگر و فقط اگر f یک نقطه تناوبی داشته باشد.

اثبات. فرض کنید $\tau(f) = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ که p و q اعداد صحیح و نسبت به هم اول باشند. داریم

$$\tau(f^m) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (F^{mn}(x) - x) = m\tau(f)$$

بنابراین $\tau(f^q) = 0$. بنابراین کفایت نشان دهیم که اگر $\tau(f) = 0$ آنگاه f یک نقطه ثابت دارد.

به ازای یک $a \in \mathbb{R}$. به عبارت دیگر $a \in \mathbb{R}$ موجود است که f با R_a مزدوج توپولوژیک است. در نتیجه برای $x \in S^1$ داریم

$$\begin{aligned} f^k(x) &= \overbrace{h^{-1} \circ R_a \circ h \circ \dots \circ h^{-1} \circ R_a \circ h}^{k \text{ مرتبه}} \\ &= h^{-1} \circ R_a^k \circ h(x) \end{aligned}$$

بنابراین با توجه به دینامیک R_a ، دینامیک f را می‌توان تعیین کرد. به عنوان مثال فرض کنید $a \in \mathbb{Q}$ که $a = \frac{p}{q}$. در این صورت R_a تناوبی با دوره تناوب q است. در این صورت داریم

$$\begin{aligned} \forall x : R_a^q(x) = x &\Rightarrow f^q(x) = h^{-1} \circ R_a^q \circ h(x) \\ &= h^{-1} \circ h(x) = x \end{aligned}$$

در نتیجه f نیز تناوبی با دوره تناوب q است. بنابراین در حالتی که $a \in \mathbb{R}$ موجود باشد که f با R_a مزدوج توپولوژیک است، ویژگی‌های دینامیکی f با توجه به گویا و یا گنگ بودن R_a به طور کامل مشخص می‌شود.

حال فرض کنید f یک همسان‌ریختی دلخواه روی دایره باشد که با نگاشت دوران، مزدوج توپولوژیک نیست. در این حالت، می‌توان برای f ، عدد چرخشی را طوری تعریف کرد که گویا یا گنگ بودن این عدد، در شرایطی، دینامیک f را بتواند به طور کامل مشخص کند. در ادامه برآنیم که عدد چرخشی را معرفی کنیم.

همسان‌ریختی دلخواه $f : S^1 \mapsto S^1$ و تابع تصویر

$$\begin{cases} \pi : \mathbb{R} \mapsto \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}} \\ x \mapsto x + \mathbb{Z} \end{cases}$$

را در نظر بگیرید. بنابراین می‌توان هر تابع $f : S^1 \mapsto S^1$ را به همسان‌ریختی $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ ترفیع داد به طوری که $\pi \circ F = f \circ \pi$.

تعریف ۱. همسان‌ریختی $f : S^1 \mapsto S^1$ را جهت نگه‌دار 3 گویند اگر ترفیع یکنوای F از f موجود باشد که:

$$F(x+1) = F(x) + 1$$

از این جا به بعد منظور ما از تابع ترفیع F تابعی با شرایط بالاست.

³orientation-preserving

در حالتی که عدد چرخشی گویا باشد می‌توان ثابت کرد که مدارهای پیش‌رو و پس‌رو هر نقطه‌ی غیرتناوبی به مدارهای تناوبی میل می‌کنند. در قسمت بعد تلاش می‌کنیم احکامی راجع به همسان‌ریختی‌های با عدد چرخشی گنگ بیان کنیم.

۲.۳ عدد چرخشی گنگ

همان‌گونه که در قسمت قبل اشاره شد، در حالتی که عدد چرخشی گویا است رفتار نهایی هر یک از نقاط غیر تناوبی کاملاً مشخص است. هدف ما در این قسمت آن است که اطلاعاتی راجع به ساختار رفتار نهایی مدارها در حالتی که عدد چرخشی گنگ است به دست آوریم. ابتدا مجموعه‌ی w - حدی را برای یک سیستم دینامیکی تعریف می‌کنیم.

تعریف ۳. فرض کنید $f : S^1 \mapsto S^1$ یک تابع پیوسته و $x \in S^1$ باشد. در این صورت، مجموعه‌ی w - حدی x (یعنی $w(x)$) به صورت زیر تعریف می‌شود:

مجموعه‌ی w - حدی x شامل تمام نقاط $y \in S^1$ است که برای آن‌ها دنباله‌ی n_i موجود باشد که

$$n_1 < n_2 < \dots$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} n_i = \infty$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f^{n_i}(x) = y$$

به عبارت دیگر، مجموعه w - حدی x ، شامل تمام نقاطی است که مدار x به اندازه دلخواه به آن نقاط نزدیک می‌شود. توجه داشته باشید که تعریف فوق، به سادگی می‌تواند برای هر سیستم دینامیکی دلخواه نیز به کار گرفته شود.

مثال. $x \in S^1$ را در نظر بگیرید. اگر R_a نداشت دوران گنگ روی دایره باشد، ($a \in \mathbb{Q}^c$)، آنگاه طبق قضیه‌ی وایل مدارهای R_a در S^1 چگال هستند. در نتیجه برای هر $y \in S^1$ ، دنباله‌ی

$$n_1 < n_2 < \dots$$

از اعداد طبیعی وجود دارد که $\lim_{i \rightarrow \infty} f^{n_i}(x) = y$. پس مجموعه‌ی w - حدی نقطه x برابر با S^1 است. \square

فرض کنید $\tau(f) = 0$ و f نقطه ثابت نداشته باشد. در این صورت اگر F یک ترفیع f باشد که $F(0) \in [0, 1]$ و $x \in \mathbb{R}$ موجود باشد که $F(x) - x \in \mathbb{Z}$ آنگاه f حتماً نقطه ثابت دارد، زیرا در این صورت

$$\forall x \in \mathbb{R} : \pi(F(x) - x) = 0$$

$$\Rightarrow \pi(F(x)) - \pi(x) = 0$$

$$\Rightarrow f(\pi(x)) = \pi(x)$$

پس $\pi(x)$ نقطه ثابت f است.

اما اگر برای هر $x \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ ، $F(x) - x$ چون $F - Id$ پیوسته است، طبق قضیه‌ی مقدار میانی با توجه به اینکه $F(0) \in [0, 1]$ ، داریم:

$$F(1) = F(0 + 1) = F(0) + 1 \rightarrow F(1) - 1 = F(0).$$

در نتیجه برای هر $x \in (0, 1)$ داریم $0 < F(x) - x < 1$. چون $F - Id$ پیوسته است، بیشینه و کمینه خود را روی بازه فشرده $[0, 1]$ می‌گیرد. از طرفی می‌دانیم $F(x) - x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ ، بنابراین $\delta > 0$ موجود است که:

$$\forall x \in \mathbb{R} : 0 < \delta \leq F(x) - x \leq 1 - \delta < 1$$

پس برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$\delta \leq \frac{F^n(0)}{n} \leq 1 - \delta$$

در نتیجه:

$$\tau(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(0)}{n} = 0$$

بر عکس، فرض کنید x یک نقطه‌ی تناوبی F از مرتبه‌ی q باشد. در این صورت ثابت $p \in \mathbb{Z}$ وجود دارد که $F^q(x) = x + p$ اکنون داریم

$$\begin{aligned} & \frac{F^{mq}(x) - x}{mq} \\ &= \frac{1}{mq} \sum_{i=0}^{m-1} F^q(F^{iq}(x)) - F^{iq}(x) = \frac{p}{q} \\ &\rightarrow \tau(f) = \frac{p}{q}. \end{aligned}$$

قضیه ۷. فرض کنید f یک همسان‌ریختی جهت نگهدار روی دایره باشد که عدد چرخشی آن گنگ است. اگر هیچ مجموعه‌ی سرگردانی برای f موجود نباشد آنگاه برای هر $x \in S^1$ ، داریم: $w(x) = S^1$.

اکنون تا حدی به پاسخ سوال اولمان نزدیک شده‌ایم: آیا همسان‌ریختی جهت نگه‌دار f روی دایره با عدد چرخشی گنگ، با دوران گنگ مزدوج توپولوژیک است یا خیر؟ قضیه ۶ نشان می‌دهد که جواب این سوال همیشه مثبت نیست. به عبارت دیگر، می‌توان همسان‌ریختی‌هایی روی دایره واحد یافت که مجموعه‌ی $w -$ حدی هر نقطه‌ی x کل S^1 نیست. پوانکاره در قضیه‌ی زیر شرایطی را بیان می‌کند که تحت آن شرایط پاسخ به این سوال مثبت است.

قضیه ۸. فرض کنید f یک همسان‌ریختی جهت نگهدار روی S^1 باشد و f بازه‌های سرگردان نداشته باشد. آنگاه f با دوران گنگ مزدوج توپولوژیک است. [۲]

سوالی که در این جا پیش می‌آید این است که آیا راهکار یا شرایطی وجود دارد که از وجود بازه‌های سرگردان خودداری کنیم. ضرورتاً، دو پاسخ برای این سوال موجود است. اولین پاسخ، این است که نقاط بد مشخص را حذف کنیم و سعی کنیم نگاشت تزویج را مشخص کنیم. در واقع در این حالت، سعی می‌شود این نقاط به کمک فضای خارج قسمتی حذف شوند. پاسخ بیشتر راضی کننده، توسط Denjoy در سال ۱۹۳۲ داده شده است [۳].

قضیه ۹. فرض کنید $f : S^1 \rightarrow S^1$ یک واپس‌ساز C^1 باشد که $\tau(f) \in Q^C$. اگر مشتق f با تغییرات کراندار باشد، آنگاه f با دوران گنگ R_α مزدوج توپولوژیک است.

یادداشت. اگر در قضیه‌ی فوق به جای شرط با تغییرات کراندار بودن f ، شرط C^2 بودن f را قرار دهیم، حکم برقرار است. برای اثبات می‌توانید به [۷] رجوع کنید.

Denjoy با ارائه یک مثال نشان داد که شرط C^1 بودن f با عدد چرخشی گنگ، تضمین نمی‌کند که f با دوران گنگ مزدوج توپولوژیک است. قضیه زیر که در [۵] آمده است، این مطلب را دقیق‌تر بیان می‌کند.

مثال قبل می‌گوید که برای دوران گنگ، $w(x)$ مستقل از انتخاب x است. قضیه‌ی بعد، نتیجه‌ای مشابه این مطلب را برای هر همسان‌ریختی جهت نگهدار $f : S^1 \rightarrow S^1$ با عدد چرخشی گنگ بیان می‌کند.

قضیه ۵. فرض کنید $f : S^1 \rightarrow S^1$ یک همسان‌ریختی جهت نگه‌دار باشد و عدد چرخشی f نیز گنگ باشد. آنگاه برای هر $x, y \in S^1$ داریم: $w(x) = w(y)$.

ما در این جا نمی‌خواهیم اثبات این قضیه را بیان کنیم. اما توجه کنید که مهم‌ترین قسمت در اثبات این قضیه آن است که نشان دهیم برای همسان‌ریختی‌های با عدد چرخشی گنگ، مدار x در نهایت هر بازه‌ی دلخواه را ملاقات می‌کند.

تعریف دیگری که در ادامه، مورد استفاده قرار می‌گیرد، تعریف مجموعه‌های سرگردان است.

تعریف ۴. مجموعه‌ی باز ناتهگون $U \subset S^1$ و تابع پیوسته $f : S^1 \rightarrow S^1$ را در نظر بگیرید. مجموعه U را تحت تابع f سرگردان گوئیم هرگاه، $\forall n \in \mathbb{N} : f^n(U) \cap U = \emptyset$ و نیز $\bigcup_{x \in U} w(x)$ یک مدار تناوبی نباشد.

شرط دوم می‌گوید که تحت تکرارهای تابع f روی U ، نقاط U هیچ رفتار تناوبی‌ای از خود نشان ندهند. همچنین شرط اول این را می‌گوید که تحت تکرارهای تابع f ، باز U سرگردان شود و به خود U بازنگردد.

یادداشت. مجموعه‌ی ناسرگردان مجموعه‌ای است که سرگردان نباشد.

قضیه ۶. فرض کنید مجموعه کانتور $K \subset [0, 1]$ و عدد گنگ $\gamma \in (0, 1)$ به ما داده شده است. در این صورت، همسان‌ریختی

$$f : S^1 \rightarrow S^1$$

موجود است که $\tau(f) = \gamma$ و برای هر $x \in S^1$ ، داریم: $w(x) = k$.

اثبات این قضیه را می‌توان در [۶] یافت. عکس این قضیه نیز

بسیار مهم است:

^۴non-degenerate

قضیه (Denjoy). فرض کنید α یک عدد گنگ باشد. آنگاه وایرسانی جهت‌نگه‌دار C^1 روی دایره وجود دارد که عدد چرخشی آن α است و $w(x) \neq S^1$.

اثبات. فرض کنید L_n دنباله‌ای از اعداد حقیقی مثبت باشد که:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{n+1}}{L_n} = 1.1$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} L_n = 1.2$$

۳. برای هر $n \geq 0$ داشته باشیم: $L_n > L_{n+1}$.

۴. برای $n < 0$ داشته باشیم: $L_n < L_{n+1}$.

۵. برای $n \geq 0$ داشته باشیم: $L_{n+1} - L_n > 0$.

به عنوان مثال، اگر قرار دهید:

$$L_n = t(|n|+2)^{-1}(|n|+3)^{-1}T^{-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (|n|+r)^{-1}(|n|+3)^{-1}$$

آنگاه $\{L_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ در شرایط فوق صدق می‌کند.

بازه‌ی بسته‌ی I_n به طول L_n را در نظر بگیرید. فرض کنید

$$I_n = [a_n, b_n], \text{ پس } L_n = b_n - a_n \text{ و در نتیجه}$$

$$\int_{a_n}^{b_n} (b_n - t)(t - a_n) dt = \frac{L_n^2}{6}$$

بنابراین

$$\frac{\epsilon(L_{n+1} - L_n)}{L_n^2} \int_{a_n}^{b_n} (b_n - t)(t - a_n) dt = L_{n+1} - L_n$$

در نتیجه اگر تابع f را برای $x \in I_n$ به صورت زیر تعریف کنیم:

$$f(x) = a_{n+1} + \int_{a_n}^x \left(1 + \frac{\epsilon(L_{n+1} - L_n)}{L_n^2} (b_n - t)(t - a_n)\right) dt$$

آنگاه $f(b_n) = a_{n+1} + L_n + L_{n+1} - L_n = b_{n+1}$. همچنین f

روی I_n مشتق پذیر است و

$$f'(x) = 1 + \frac{\epsilon(L_{n+1} - L_n)}{L_n^2} (b_n - x)(x - a_n)$$

پس $f'(a_n) = 1 = f'(b_n)$. توجه کنید که برای $n < 0$ داریم:

$L_{n+1} - L_n > 0$ در نتیجه:

$$1 \leq f'(x) \leq 1 + \frac{\epsilon(L_{n+1} - L_n)}{L_n^2} \left(\frac{L_n}{2}\right)^2 = \frac{3L_{n+1} - L_n}{2L_n}, x \in I_n$$

همچنین برای $n > 0$ داریم:

$$0 < \frac{3L_{n+1} - L_n}{2L_n} \leq f'(x) \leq 1, x \in I_n.$$

بنابراین، برای $x \in I_n$ ، $f'(x)$ به طور یکنواخت به ۱ میل می‌کند

وقتی n به بینهایت میل می‌کند.

با توجه به آنچه تا به حال بدست آوردیم، می‌توان نتیجه گرفت

که درون هر یک از بازه‌های I_n ، تابع f به طور یکنواخت C^1 است و توسیع C^1 به کل S^1 نیز دارد. از طرفی می‌توان دید که

$$f''\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) = 0 \text{ و اگر } x \rightarrow a_n \text{ آنگاه } f''(x) \text{ به}$$

$$f''(a_n) = \frac{\epsilon(L_{n+1} - L_n)}{L_n^2} L_n = \frac{\epsilon(L_{n+1} - L_n)}{L_n} L_n^{-1}$$

میل می‌کند. همچنین، وقتی n به بینهایت میل کند $f''(x)$ بیکران می‌شود. بنابراین f تابعی C^2 نیست.

حال قرار دهید: $\Lambda = S^1 \cup_{n \in \mathbb{Z}} \text{int}(I_n)$. می‌توان دید که Λ

یک مجموعه کانتور است و برای هر $x \in \Lambda$ ، مدار x در Λ چگال است. چون هر بازه I_n هیچگاه با دینامیک حاصل از f به خودش

بر نمی‌گردد و به بقیه I_j ها می‌رود، برای هر $x \in \text{int}(I_n)$ داریم:

$x \notin w(x)$. همچنین $x \notin \Omega(f)$ که نقاط ناسرگردان f است.

در نتیجه برای هر $x \in S^1$ ، داریم: $\Lambda = w(x) = \Omega(f)$ و حکم

□

ثابت می‌شود.

تا این جا دیدیم که گویا و یا گنگ بودن عدد چرخشی می‌تواند

تا حد قابل توجهی دینامیک همسان‌ریختی متناظر را مشخص کند.

سوالی که در این جا مطرح می‌شود این است که تغییرات کوچک در

یک همسان‌ریختی، چه تاثیری روی عدد چرخشی آن می‌گذارد. در

قسمت بعد تلاش می‌شود که به این سوال پاسخ داده شود.

۴ زبان‌های آرنولد

فرض کنید $f: S^1 \rightarrow S^1$ یک همسان‌ریختی روی دایره باشد و تابع

τ^* را به صورت زیر تعریف کنید:

$$\begin{cases} \tau^*: S^1 \rightarrow S^1 \\ \alpha \mapsto \tau(R_\alpha \circ f) \end{cases}$$

لم ۲. فرض کنید که برای هر $\alpha \in [0, 1)$ و هر $m \in \mathbb{N}$ نگاشت f_α^m و نگاشت همانی با هم مساوی نباشند. آنگاه اگر $\alpha \in Q$ ، مجموعه‌ی $\tau^{*-1}(\alpha)$ درون ناتهی دارد. همچنین مجموعه‌ی

$$\{\alpha : \tau^*(\alpha) \in \mathbb{Q}^c\}$$

یک مجموعه‌ی هیچ‌جا چگال در S^1 است.

اثبات. قرار دهید $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ و همچنین فرض کنید $k_{\frac{r}{s}}$ شامل تمام α هایی باشد که $\tau(f_\alpha) = \frac{r}{s}$. پس:

$$k_{\frac{r}{s}} = \{\alpha \mid \exists x : f_\alpha^s(x) = x + r\}.$$

با توجه به پیوستگی و یکنوایی تابع τ^* ، می‌توان نتیجه گرفت که این مجموعه ناتهی است. تعریف کنید:

$$k_{\frac{r}{s}}^+ = \{\alpha \in k_{\frac{r}{s}} \mid f_\alpha^s(x) \geq x + r, \forall x\}$$

$$k_{\frac{r}{s}}^- = \{\alpha \in k_{\frac{r}{s}} \mid f_\alpha^s(x) \leq x + r, \forall x\}$$

مرور اثبات در لم قبل نشان می‌دهد که این دو مجموعه ناتهی هستند و هر دو شامل نقاط تنها هستند. از آنجایی که برای هر α ، x موجود است که $f_\alpha^s(x) \neq x + r$ پس $k_{\frac{r}{s}}^+$ و $k_{\frac{r}{s}}^-$ با یکدیگر یکی نیستند. در نتیجه $k_{\frac{r}{s}}$ یک بازه نابدهی است و بدین ترتیب حکم ثابت می‌شود. \square

اگر $\alpha \in k_{\frac{r}{s}}^+$ ، آنگاه f_α نقاط تناوبی با تناوب s دارد. همچنین اگر $\alpha \in k_{\frac{r}{s}}^+, k_{\frac{r}{s}}^-$ ، آنگاه هر یک از این نقاط تناوبی از یک سمت جاذب و از سمت دیگر دافع هستند. اگر α یک نقطه درونی $k_{\frac{r}{s}}^+$ باشد، آنگاه حداقل یکی از نقاط تناوبی f_α از هر دو سمت جاذب است.

می‌توان نتیجه‌ای مشابه لم ۲ برای هر خانواده از وابرسی‌های روی دایره که عدد چرخشی این خانواده غیر ثابت است بدست آورد. به عبارت دقیق‌تر، اگر $\mu \in \mathbb{R}^k$ و $\{f_\mu\}$ خانواده‌ای از وابرسی‌های روی دایره باشد، آنگاه برای هر α ، گویا، مجموعه‌ی $\{\mu \mid \tau(f_\mu) = \alpha\}$ مجموعه‌ای است که درون ناتهی دارد. همچنین این مجموعه در فضای پارامتری با تصویر دو تابع پیوسته محدود می‌شود. هر یک از این دو تابع پیوسته مربوط به مقادیری از پارامتر است که عدد چرخشی وابرسی متناظر با آن مقادیر برابر

تابع τ^* پیوسته است. قرار دهید: $f_\alpha = R_\alpha \circ f$ و همچنین فرض کنید \hat{f} و \hat{f}_α به ترتیب ترفیع‌های f و f_α باشند.

لم ۱. اگر $f : S^1 \mapsto S^1$ یک همسان‌ریختی دایره باشد که هیچ مدار تناوبی ندارد، آنگاه برای $\alpha > 0$ داریم: $\tau(R_\alpha \circ f) > \tau(f)$.

اثبات. فرض کنید $f : S^1 \mapsto S^1$ یک همسان‌ریختی باشد که مدار تناوبی ندارد. با استفاده از لم زرن^۵، می‌توان گفت که زیرمجموعه‌ی f -ناوردای K از S^1 موجود است که مینیمال است. چون K مینیمال است، هر مدار در K ، چگال در K است. بنابراین اگر $x \in K$ ، آنگاه دنباله‌ی $\{n_i\}$ موجود است که وقتی $n_i \rightarrow \infty$ داریم $x \rightarrow f^{n_i}(x)$. فرض کنید:

$$\begin{cases} \pi : \mathbb{R} \mapsto S^1 \\ y \mapsto y - [y] \end{cases}$$

تابع تصویر باشد. \hat{x} را به گونه‌ای انتخاب کنید که $x = \pi(\hat{x})$. بنابراین دنباله‌ای از اعداد صحیح مثبت، $\{p_i\}$ ، وجود دارد که:

$$\hat{f}^{n_i}(\hat{x}) - \hat{x} - p_i \rightarrow 0.$$

می‌توان با استقرا زیردنباله‌ای از این دنباله یافت که

$$\forall x \in \mathbb{N} : \hat{f}_\alpha^n(\hat{x}) \geq \hat{f}^n(\hat{x}) + \alpha.$$

از قضیه‌ی مقدار میانی و این که $\hat{f}_\alpha^n(\hat{x}) < \hat{x} + p_i$ ، نتیجه می‌شود که دنباله‌ی $\{\alpha_i\}$ موجود است به طوری که:

$$\alpha_i \leq \hat{x} + p_i - \hat{f}^{n_i}(\hat{x}) \quad \& \quad \hat{f}_{\alpha_i}^{n_i}(\hat{x}) = \hat{x} + p_i.$$

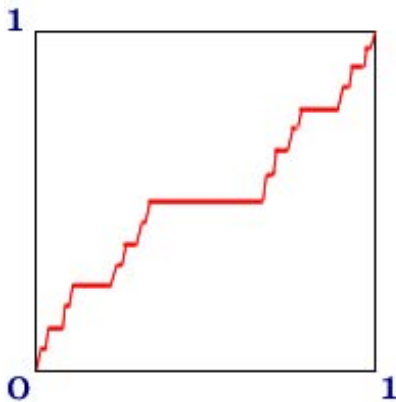
پس برای هر i ، x یک نقطه تناوبی f_{α_i} است. در نتیجه تابع $\tau^*(\alpha) \rightarrow \tau^*(\alpha)$ صعودی است و در نقاطی که $\tau^*(\alpha)$ گنگ باشد τ^* اکیدا صعودی است. \square

می‌توان ثابت کرد که برای β های گویا، $\tau^{*-1}(\beta)$ درون ناتهی دارد. همچنین، مجموعه‌ی $\{\alpha : \tau^*(\alpha) \in \mathbb{Q}^c\}$ مجموعه‌ی هیچ‌جا چگال در S^1 است. لم زیر این حکم را بیان می‌کند.

^۵Zorn's Lemma

مربوط به Ω است که از 0 تا 1 تغییر می‌کند. محور عمودی نیز مربوط به K است که از 0 تا 4π تغییر می‌کند. همچنین در این شکل دیده می‌شود که هر یک از این مناطق توسط منحنی دو تابع پیوسته در فضای پارامتری محدود می‌شود. همانطور که در این بخش گفته شد، هر یک از این دو منحنی متناظر با مقایری از پارامتر است که به ازای آن‌ها عدد چرخشی نگاشت یک عدد گنگ ثابت است.

مناطق سیاه‌رنگ در شکل ۱ زبانه‌های آرنولد در فضای پارامتری دو بعدی $\Omega - K$ را نشان می‌دهد. هر منطقه‌ی سیاه‌رنگ در شکل، متناظر با مقادیری از پارامترهای Ω و K است که برای آنها عدد چرخشی نگاشت $f_{\omega, K}$ یک عدد گویای ثابت است. همچنین در این شکل دیده می‌شود که هر یک از این مناطق توسط دو منحنی از توابع پیوسته محدود می‌شود. همانطور که در این بخش گفته شد، هر یک از این دو منحنی متناظر با مقایری از پارامتر است که به ازای آن‌ها عدد چرخشی نگاشت یک عدد گنگ ثابت است. همچنین اگر قرار دهیم $K = 1$ ، آن‌گاه منحنی تغییرات عدد چرخشی برحسب Ω به صورت شکل ۲ است که به آن پلکان شیطان^۹ می‌گویند. شکل ۲ پلکان شیطان را در این حالت نشان می‌دهد.



شکل ۲: پلکان شیطان. وقتی $k = 1$ محور افقی متناظر با Ω و محور عمودی متناظر با عدد چرخشی است.

^۶Brouwer Degree

^۷می‌توان دید که درجه‌ی براور همسان‌ریختی‌های جهت‌نگه‌دار برابر با یک است. همچنین خانواده‌ی همسان‌ریختی‌های جهت‌نگه‌دار، یک مولفه‌ی همبندی فضای توابع

^۸Standard Circle Map

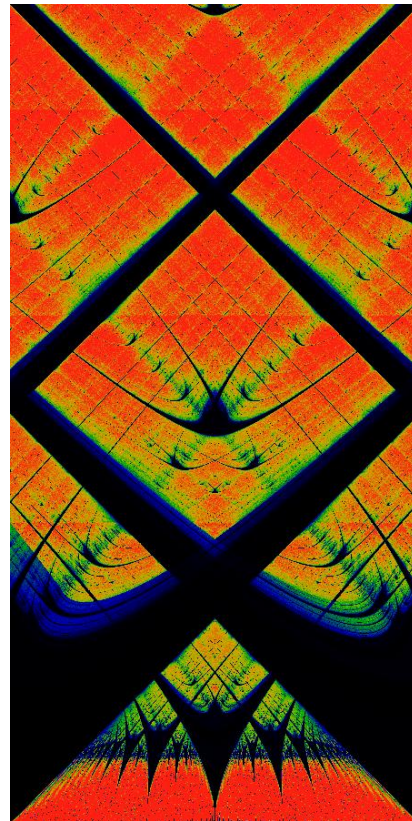
^۹Devil's Staircase

با یک عدد گنگ ثابت می‌باشد. به ناحیه‌ای در فضای پارامترها که در آن، تابع، عدد چرخشی ثابت گویایی دارد، زبانه‌ی آرنولد گفته می‌شود. فضای همه و ابرسانی‌های روی دایره در فضای همه همسان‌ریختی‌های جهت‌نگه‌دار روی دایره چگال است. بنابراین، آنچه که در این بخش گفتیم را می‌توان در مورد توابع پیوسته‌ای که درجه‌ی براور 6 آن‌ها یک می‌باشد 7 هم گفت.

مثال ۱. نگاشت دایره به صورت ^۸

$$f_{\omega, K}(\theta) = \theta + \Omega - \frac{K}{4\pi} \sin(4\pi\theta)$$

را در نظر بگیرید که در آن Ω و K پارامتر هستند.



شکل ۱: زبانه‌های آرنولد. در این شکل مناطق سیاه‌رنگ متناظر با مقادیری از پارامترهای Ω و K است که برای آنها عدد چرخشی نگاشت $f_{\omega, K}$ یک عدد گویا است. محور افقی در این شکل محور

پیوسته روی دایره را تشکیل می‌دهند.

- [4] Anatole Katok and Boris Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. Vol. 54. Cambridge university press, 1997.
- [5] David Chillingworth. *DYNAMICAL SYSTEMS: STABILITY, SYMBOLIC DYNAMICS AND CHAOS*. 1998.
- [6] Christian Kuehn. *An introduction to rotation theory*. 2007.
- [7] Welington De Melo and Sebastian Van Strien. *One-dimensional dynamics*. Vol. 25. Springer Science & Business Media, 2012.

References

- [1] Bansal, N. “Algorithmic Aspects of Combinatorial Discrepancy”. In: *A Panorama of discrepancy Theory*. Springer, 2014. Chap. 6, 425–457.
- [2] Henri Poincaré. “Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle (II)”. In: *Journal de mathématiques pures et appliquées* (1882), pp. 251–296.
- [3] Arnaud Denjoy. “Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore”. In: *Journal de mathématiques pures et appliquées* 11 (1932), pp. 333–376.

k - لیست یکتا رنگ پذیری در گرافها (قسمت اول)

محمد امین شعبانی

۱ مقدمه

گراف $G = (V, E)$ با مجموعه‌ی $L(v)$ از رنگها به ازای هر رأس $v \in V(G)$ در نظر بگیرید. تابع $c : V(G) \rightarrow \bigcup_{v \in V(G)} L(v)$ یک رنگ آمیزی معتبر است اگر شرایط زیر را داشته باشد:

$$v \in V(G) \Rightarrow c(v) \in L(v)$$

$$(u, v) \in E(G) \Rightarrow c(u) \neq c(v).$$

اگر دسته‌ای از مجموعه‌های $L = \{L(v) \mid v \in V(G)\}$ وجود داشته باشد که با استفاده از آنها تنها یک رنگ آمیزی معتبر برای G وجود داشته باشد، آن‌گاه گراف G - لیست یکتا رنگ پذیر نامیده می‌شود. در حالتی که اندازه‌ی تمامی لیست‌ها از اندازه k باشد، G را k - لیست یکتا رنگ پذیر یا به اختصار $UkLC$ می‌نامند. در مقابل گراف G خاصیت $M(k)$ را دارد اگر و تنها اگر $UkLC$ نباشد. برای مثال هر گرافی $U \setminus LC$ است و در نتیجه هیچ گرافی خاصیت $M(1)$ را ندارد.

در این قسمت از مقاله تعدادی از قضایا و نتایج بدست آمده بر روی گراف‌های لیست یکتا رنگ پذیر را بررسی کرده و خلاصه‌ای از مثال‌ها و قضایای مقالات را آورده‌ایم و در قسمت بعدی مقاله، نتایج جدیدتری که بدست آمده را به همراه اثبات آن‌ها بیان خواهیم کرد.

۲ نتایج و قضایای بدست آمده

$UkLC$ به طور جداگانه توسط محمودیان و مهدیان [۶]، و دینیتز و مارتین [۱] معرفی شد. محمودیان و مهدیان قضیه زیر را ثابت کردند.

قضیه ۱. گراف همبند G دارای خاصیت $M(2)$ است، اگر و تنها اگر هر بلاک در آن، یک دور، گراف کامل و یا یک گراف کامل دو بخشی باشند.

همچنین گراف‌های $U \setminus LC$ نیز به طور کامل در [۴، ۵، ۸، ۹] بررسی شده‌اند. مارکس [۷] نشان داد که برای هر $k \geq 3$ ، تشخیص $UkLC$ بودن گراف p -complete می‌باشد.

برای راحتی کار فرض کنید $m(G)$ برابر باشد با کمترین k به طوری که گراف G دارای خاصیت $M(k)$ باشد. به راحتی می‌توان نشان داد که برای هر گراف G ، $2 \leq m(G) \leq \min(\delta + 2, n - 1)$ است که در آن δ مینیمم درجه گراف G و n تعداد رئوس آن است. قضیه زیر نیز کران بالای دیگری برای $m(G)$ در هر گراف، با استفاده از k - لیست یکتا رنگ پذیری زیرگراف‌های القایی آن می‌دهد.

قضیه ۲. ([۳]) فرض کنید H زیرگراف القایی از گراف G با شرایط زیر باشد:

- H دارای خاصیت $M(k)$ باشد.

اثبات. همانند قضیه قبل با توجه به فرمول اوایلر می‌دانیم میانگین درجات هر گراف مسطح آزاد مثلث کمتر از ۴ بوده و در نتیجه دارای خاصیت $M(۳)$ هستند. □

۴ عدد رنگی $\chi_u(G)$

گراف G یک (k, t) - لیست رنگ‌پذیر است اگر بتوان لیست‌های k تایی بر روی رأس‌های G به صورتی قرار داد که در مجموع تمامی لیست‌ها از t رنگ استفاده شده باشد و یک رنگ‌آمیزی معتبر برای G وجود داشته باشد. $\chi_u(G)$ در [۳] به صورت زیر تعریف شده است:

تعریف ۱. برای گراف G و عدد صحیح و مثبت k ، $\chi_u(G, k)$ برابر است با کوچکترین عدد t به طوری که G ، (k, t) - لیست یکتا رنگ‌پذیر باشد. همچنین اگر G گرافی $UKLC$ نباشد، مقدار $\chi_u(G, k)$ برابر صفر در نظر گرفته می‌شود.

تعریف ۲. عدد لیست یکتا رنگی گراف G ، که با $\chi_u(G)$ نشان داده می‌شود، برابر است با $\max_{k \geq 1} \chi_u(G, k)$.

برای روشن‌تر شدن این مفهوم، می‌توان از قضیه زیر که در همان مقاله اثبات شده است استفاده کرد.

قضیه ۷. گراف G ۲ - لیست یکتا رنگ‌پذیر است اگر و تنها اگر $t = \max(۳, \chi(G))$.

با توجه به اینکه $\chi_u(G, ۲)$ همواره بزرگتر مساوی با $\chi(G)$ است، این قضیه نشان می‌دهد که $\chi_u(G, ۲)$ برابر است با $\max_{k \geq 1} \chi_u(G, k)$. همچنین حدس زیر نیز مطرح شده که تا به این لحظه در حالت‌های خاصی اثبات شده است و صورت کلی آن هنوز اثبات یا رد نشده است.

حدس ۱. برای هر گراف G داریم $\chi_u(G) \leq \Delta(G) + ۱$ و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر G گرافی کامل یا یک دور فرد باشد.

حدس بالا قضیه شناخته شده‌ی بروکس را هم پوشش می‌دهد، زیرا برای هر گراف G داریم $\chi(G) = \chi_u(G, ۱)$ و در نتیجه $\chi(G) \leq \chi_u(G)$ بنابراین، حدس بالا $\chi(G) \leq \Delta(G) + ۱$ را

• هر رأس گراف H حداکثر با l رأس دیگر از $V(G) \setminus V(H)$ همسایه باشد.

آنگاه G دارای خاصیت $M(k+l)$ می‌باشد.

در نهایت کران بالای بهتری برای تعیین $m(G)$ یک گراف G در مقاله [۲] با توجه به میانگین درجات گراف G داده شده است.

قضیه ۳. فرض کنید $\bar{d}(G)$ میانگین درجات گراف G باشد. آنگاه

$$m(G) \leq \lfloor \frac{\bar{d}(G)}{۲} \rfloor + ۲.$$

برای مثال فرض کنید G گرافی دوبخشی باشد و $n(G)$ تعداد رئوس آن باشد. می‌دانیم $\bar{d}(G) \leq n(G)/۲$ و بنابر قضیه بالا $m(G) \leq \lfloor n(G)/۴ + ۲ \rfloor$. قضیه زیر این کران را به کران لگاریتمی بهبود می‌دهد.

قضیه ۴. فرض کنید گراف G دوبخشی باشد. آنگاه کران بالای زیر برقرار است.

$$m(G) \leq ۲ + \log_۲ n(G)$$

برای جلوگیری از بالا رفتن حجم این مقاله، از آوردن اثبات‌ها در بیشتر موارد خودداری کرده‌ام؛ برای خواندن اثبات قضایا می‌توانید به مقاله‌های ارجاع داده شده مراجعه نمایید.

۳ گراف‌های مسطح

با توجه به قضیه‌های ذکر شده و ویژگی‌های گراف‌های مسطح، به راحتی می‌توان نتایج مستقیمی را برای آن‌ها به دست آورد که در ادامه به دو مورد از آن‌ها اشاره می‌کنیم.

قضیه ۵. هر گراف مسطح دارای خاصیت $M(۴)$ می‌باشد.

اثبات. با توجه به فرمول اوایلر در گراف‌های مسطح، برای هر گراف مسطح $G(V, E)$ ، $|E(G)| \leq ۳|V(G)| - ۶$. بنابراین میانگین درجات هر گراف مسطح کمتر از ۶ است و در نتیجه تمامی گراف‌های مسطح دارای خاصیت $M(۴)$ هستند. □

قضیه ۶. هر گراف مسطح آزاد مثلث دارای خاصیت $M(۳)$ است.

$c(w_i) = i$ از آنجایی که G یک L -یکتا رنگ‌پذیری دارد، با توجه به ساختار G^* ، c تنها t -رنگ‌پذیری G^* است. در نتیجه G^* یکتا t -رنگ‌پذیر است. از طرفی G^* دارای $n(G) + t$ رأس و $e(G) + \binom{t}{2} + \sum_{v \in V(G)} (t - f(v))$ یال است. بنابراین همانطور که در بالا اشاره شد:

$$e(G) + \binom{t}{2} + \sum_{v \in V(G)} (t - f(v)) \geq (n(G) + t)(t - 1) - \binom{t}{2}$$

که بعد از ساده کردن، قضیه بالا را نتیجه می‌دهد. \square

در پایان، حدس زیر را که به تازگی مطرح شده و هنوز حل نشده است می‌آوریم:

حدس ۲. هر گرافی با میانگین درجه $2k - 2$ دارای خاصیت $M(k)$ است.

این حدس، تکمیل‌کننده قضیه ۳ است که کران قوی‌تری را نتیجه می‌دهد.

References

- [1] JH Dinitz and WJ Martin. The stipulation polynomial of a uniquely list-colorable graph. *Austral. J. Combin.*, 11:105–115, 1995.
- [2] Ch. Eslahchi, M. Ghebleh, and H. Hajiabolhassan. Some concepts in list coloring. *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, 41:151–160, 2002.
- [3] Y. G. Ganjali, M. Ghebleh, H. Hajiabolhassan, M. Mirzazadeh, and B. S. Sadjad. Uniquely 2-list colorable graphs. *Discrete Appl. Math.*, 119(3):217–225, 2002.
- [4] M. Ghebleh and E. S. Mahmoodian. On uniquely list colorable graphs. *Ars Combin.*, 59:307–318, 2001.

حفظ می‌کند. همچنین اگر $\chi(G) = \Delta(G) + 1$ باشد، داریم $\chi_u(G) \leq \Delta(G) + 1$ و در نتیجه G یک گراف کامل یا یک دور فرد است.

۵ - f لیست یکتا رنگ‌پذیری

در بعضی از مقالات حالت‌های دیگری نیز مشابه k -لیست رنگ‌پذیری بررسی شده است که یکی از آن موارد در ادامه آمده است.

تعریف ۳. گراف G و تابع f از $V(G)$ به \mathbb{N} را در نظر بگیرید. یک f -لیست واگذاری L به G یک لیست واگذاری (لیست از رنگ‌ها به ازای هر رأس) است به صورتی که $|L(v)| = f(v)$ برای هر رأس v . گراف G f -یکتا رنگ‌پذیر ($UfLC$) شناخته می‌شود اگر f -لیست واگذاری L برای G وجود داشته باشد به صورتی که L -لیست یکتا رنگ‌پذیر باشد.

با توجه به تعریف بالا، اگر G f -لیست یکتا رنگ‌پذیر باشد، به صورتی که برای هر رأس v داشته باشیم $f(v) = k$ ، آنگاه G یک گراف $UkLC$ می‌باشد.

قضیه ۸. اگر G گرافی $UfLC$ باشد، آنگاه:

$$\sum_{v \in V(G)} f(v) \leq n(G) + e(G)$$

اثبات. فرض کنید L یک f -لیست واگذاری برای G با رنگ‌های $1, 2, \dots, t$ باشد، به صورتی که G یک L -لیست رنگ‌پذیری یکتا داشته باشد. حال گراف t -یکتا رنگ‌پذیر G^* را به صورت زیر می‌سازیم: $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ و گراف کامل K_t با مجموعه رئوس $\{w_1, w_2, \dots, w_t\}$ را در نظر بگیرید. حال برای G^* ، اجتماع گراف G و K_t را در نظر گرفته و یال‌های (v_i, w_j) را به ازای $n \geq i \geq 1, 1 \leq j \leq t$ به آن اضافه می‌کنیم.

یک t رنگ‌پذیری c از G^* را در نظر بگیرید. بدون کم شدن از کلیت مسئله می‌توانیم فرض کنیم که برای هر $1 \leq i \leq t$ داریم

- Theoret. Comput. Sci.*, 401(1-3):62–76, 2008.
- [8] Yufa Shen, Yanning Wang, Wenjie He, and Yongqiang Zhao. On uniquely list colorable complete multipartite graphs. *Ars Combin.*, 88:367–377, 2008.
- [9] Yongqiang Zhao, Wenjie He, Yufa Shen, and Yanning Wang. Note on characterization of uniquely 3-list colorable complete multipartite graphs. In *Discrete geometry, combinatorics and graph theory*, volume 4381 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 278–287. Springer, Berlin, 2007.
- [5] Wenjie He, Yufa Shen, Yongqiang Zhao, Yanning Wang, and Xinmiao Ma. On property $M(3)$ of some complete multipartite graphs. *Australas. J. Combin.*, 35:211–220, 2006.
- [6] E. S. Mahmoodian and M. Mahdian. On the uniquely list colorable graphs. In *Proceedings of the 28th Annual Iranian Mathematics Conference, Part 1 (Tabriz, 1997)*, volume 377 of *Tabriz Univ. Ser.*, pages 319–326. Tabriz Univ., Tabriz, 1997.
- [7] Dániel Marx. Complexity of unique list colorability.

توصیف‌گر ترکیبی ژرف

سامان جهانگیری

چکیده

۱ مقدمه

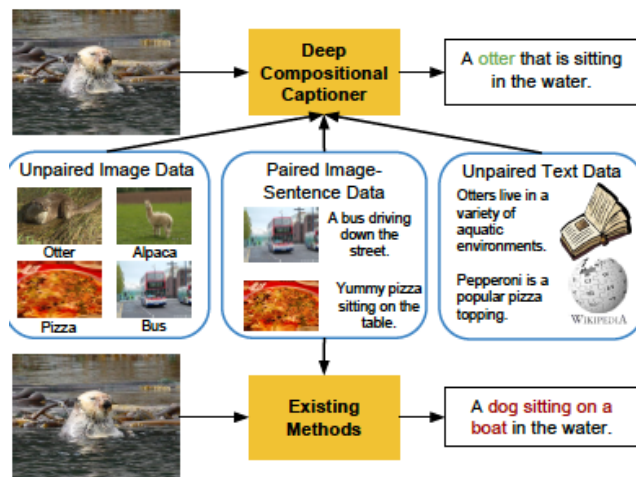


Figure ۱: مدل با ترکیب اطلاعات مربوط به داده های تصویری و منابع متنی مستقل، توصیفی برای عکسهای دیده نشده در منابع عکس-جمله ارائه می دهد.

در سالهای اخیر، شبکه های عصبی بازگشتی^۳ متعددی برای توصیف عکس معرفی شده اند که نتایج قابل قبولی به دست آورده اند [۲۹][۲۷][۳۲][۳۰][۳۶]. منابع گسترده جفت عکس و توصیف مانند MSCOCO و Flickr30k، از عوامل مهم موفقیت این روشها به شمار می روند. با این وجود، این مجموعه داده ها شامل تعداد کمتری از اشیاء به نسبت مجموعه داده های مربوط به

با وجود این که شبکه های عصبی که اخیراً در توصیف تصویر به کار گرفته شده اند، به نتایج قابل قبولی دست یافته اند، آن ها عمدتاً به منابع جفت عکس و جمله^۱ نیازمندند. در این جا، توصیف‌گر ترکیبی ژرف را معرفی خواهیم کرد تا روشی برای توصیف اشیاء جدیدی که در داده های جفت عکس-جمله وجود ندارند را ارائه کنیم. این کار، با استفاده از مجموعه داده های بزرگ مربوط به تشخیص اشیاء و منابع متنی غیر مرتبط، و با انتقال اطلاعات بین مفاهیم مشابه انجام می شود. سایر مدل های توصیف‌گر ژرف فعلی، با وجود این که با مجموعه داده های بزرگ تشخیص چهره، مانند ImageNet، پیش آموزش^۲ داده می شوند، تنها می توانند اشیایی را توصیف کنند که در منابع جفت عکس-جمله حضور دارند. برعکس، این مدل می تواند اشیاء جدید و روابط آنها با سایر اشیاء را توصیف کند. توانمندی مدل مان برای توصیف اشیاء جدید را با برآورد کردن عملکرد آن روی MSCOCO و نمایش کمی نتایج برای عکسهای ImageNet که هیچ داده جفتی از اشیاء داخل آنها موجود نیست نشان می دهیم. نتایج نشان می دهد که DCC مزایای ویژه ای نسبت به روشهای موجود توصیف اشیاء جدید داخل عکس دارد.

^۱ Paired image-sentence data

^۲ Pre-train

^۳ Recurrent Neural Networks

داده‌های غیر جفت موجودند انتقال داده می‌شود. همچنین از منابع متنی نامرتب برای ارتباط دادن اشیاء جدید به مفاهیم دیده شده در داده‌های جفت استفاده می‌شود.

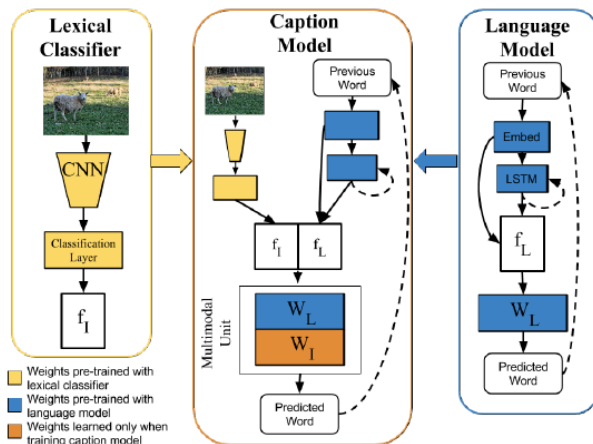


Figure ۲: DCC از یک دسته‌بندی‌گر لغت‌نامه‌ای، که پیکسل‌ها را به مفاهیم بصری می‌نگارد و فقط با داده‌های تصویری غیر جفت آموزش داده شده، و یک مدل زبانی که ساختار زبان طبیعی را یاد می‌گیرد و روی داده‌های متنی جفت نشده آموزش داده شده، تشکیل شده است. لایه چندگانه DCC، دسته‌بندی‌گر لغت‌نامه‌ای، و مدل زبانی را ترکیب می‌کند و روی داده‌های جفت عکس-جمله آموزش داده می‌شود.

۲ DCC

روش ما از سه گام تشکیل شده است: (۱) آموزش یک دسته‌بندی‌گر لغت‌نامه‌ای و یک مدل زبان ژرف، (۲) ترکیب دسته‌بندی‌گر لغت‌نامه‌ای و مدل زبان برای ایجاد یک مدل توصیف‌گر، و در نهایت، (۳) انتقال اطلاعات از کلماتی که در داده‌های جفت شده ظاهر شده‌اند به کلماتی که در این داده‌ها دیده نشده‌اند.

‡Recurrent

‡Convolutional

‡Lexical Classifier

‡Language Model

‡Multimodal Layer

تشخیص عکس، مانند ImageNet هستند.

بنابراین، با وجود این‌که سیستم‌های جدید تشخیص عکس قادر به تشخیص هزاران گونه از اشیاء هستند، بهترین روش‌های توصیف عکس، فاقد توانایی ترکیب مفاهیم مختلف برای توصیف اشیاء جدید با استفاده از مفاهیم شناخته شده هستند، بدون اینکه مثالی از جفت عکس و جمله‌ی مربوط به آن شیء را دیده باشند. به همین خاطر توصیف‌گر ترکیبی ژرف (DCC) را معرفی خواهیم کرد که می‌تواند عناصر بصری قسمت‌های لغت‌نامه‌ای را ترکیب کند تا توصیفاتی از اشیایی به دست آورد که در داده‌های جفت ناموجود، اما در منابع تشخیص عکس موجود هستند. عملکرد DCC مشابه مدل‌های توصیف‌گر اخیر [۲۹][۲۷][۳۲][۳۰][۳۶] است که شبکه‌های بازگشتی^۴ و پیچشی^۵ را با هم ترکیب می‌کنند، با این تفاوت که می‌تواند اشیاء جدید را با ترکیب آنها با عبارات داخل زبان که از داده‌های جفت یاد گرفته است، توصیف کند. برای مثال تصویر سمور در عکس ۱ را در نظر بگیرید. برای ارائه یک توصیف دقیق، یک مدل توصیف‌گر نیاز دارد تا اجزای بصری تشکیل دهنده عکس مانند "otter"، "water" و "sitting" را تشخیص دهد و آنها را ترکیب کند تا یک جمله قابل قبول به دست آید. با اینکه مدل‌های قبلی توصیف‌گرهای ژرف می‌توانند عناصر بصری را ترکیب کرده و جمله بسازند، DCC می‌تواند توصیفی برای یک شیء جدید مانند "otter" ارائه کند. به این ترتیب که می‌فهمد که کلمه "otter" مشابه "animal" است و بنابراین به همان روش می‌تواند در جملات مورد استفاده قرار گیرد. این مدل از چند عنصر کلیدی تشکیل شده است. یک دسته‌بندی‌گر لغت‌نامه‌ای^۶ و یک واحد زبانی^۷ که هر یک می‌توانند به طور جداگانه روی عکس و متن جفت نشده آموزش داده شوند، و همچنین توصیف‌گر ژرف که از ترکیب این دو به دست می‌آید و با داده‌های جفت عکس-توصیف آموزش داده می‌شود. مهمتر از همه، لایه چندگانه^۸ است که در آن اطلاعات مربوط به اشیاء شناخته شده در داده‌های جفت عکس-توصیف به اشیاء جدید که تنها در

۱.۲ دسته‌بندی‌گر لغت‌نامه‌ای ژرف

شده و خروج LSTM به یکدیگر الحاق میشوند تا بردار ویژگی زبانی، f_L را تشکیل دهند. f_L ورودی یک لایه ضرب داخلی است که خروجی‌اش کلمه بعدی در جمله تولید شده است. در زمان آموزش، همواره کلمه درست به عنوان ورودی به بخش زبانی داده می‌شود اما در زمان تست، کلمه قبلی پیش‌بینی شده توسط خود بخش زبانی به عنوان ورودی به آن داده می‌شود. همچنین با اضافه کردن این محدودیت که مدل نتواند یک کلمه را دو بار پشت سر هم پیش‌بینی کند، نتایج بهبود پیدا می‌کند.

۳.۲ مدل توصیف‌گر

مدل توصیف‌گر دسته بندی گر لغتنامه ای و مدل زبانی را ترکیب میکند تا یک مدل مشترک برای توصیف عکس را یاد بگیرد. همان‌طور که در عکس ۲ (وسط) نشان داده شده، واحد چندگانه در مدل توصیف‌گر بردار ویژگی تصویر، f_I ، و بردار ویژگی زبانی، f_L را ترکیب میکند. لایه چندگانه مورد استفاده، یک انتقال آفین از این دو بردار ویژگی است:

$$p_w = \text{softmax}(f_I W_I + f_L W_L + b)$$

که W_L ، W_I و b ماتریس‌های وزن‌های یاد گرفته شده هستند و p_w توزیع احتمال روی کلمات است. به طور شهودی، وزنهای W_I یاد می‌گیرند که مجموعه‌ای از کلمات را که احتمال بیشتری برای حضور در عکس - به شرط وجود عناصر بصری که توسط دسته بندی گر لغت نامه ای داده شده اند - دارند را پیش‌بینی کند. از طرف دیگر، W_L ساختار دنباله‌ای زبان را یاد می‌گیرد؛ با یاد گرفتن پیش‌بینی کلمه بعد با استفاده از کلمات قبل در یک دنباله داده شده. با جمع کردن $f_I W_I$ و $f_L W_L$ ، لایه چندگانه اطلاعات بصری به دست آمده از دسته بندی گر لغتنامه ای را با اطلاعات ساختاری زبان که از مدل زبانی یاد گرفته شده اند ترکیب میکند، که یک جمله منسجم راجع به عکس به دست آورد. هر دوی مدل توصیف‌گر و مدل زبانی آموزش می‌بینند که دنباله‌ای از کلمات را پیش‌بینی کنند،

دسته‌بندی‌گر لغت‌نامه‌ای (شکل ۲ چپ) یک CNN^۹ است که تصاویر را به مفاهیم معنایی می‌نگارد. برای آموزش دسته‌بندی‌گر، ابتدا مفاهیمی را که در داده‌های جفت متداول هستند را استخراج می‌کنیم. به این شکل که ابتدا نوع هر کلمه (فعل، اسم، ...) را پیدا می‌کنیم [۳] و سپس متداول‌ترین اسمها، صفتها و فعلها را انتخاب می‌کنیم. هیچ اصلاحی در مفاهیم ذخیره شده انجام نمی‌دهیم و بنابراین بعضی از مفاهیم مانند "use"، صرفاً بصری نیستند. علاوه بر مفاهیم متداول در داده‌های جفت، دسته‌بندی‌گر همچنین با اشیایی که خارج از داده‌های جفت شده هستند و میخواهیم توصیفشان کنیم نیز آموزش می‌بیند. دسته بندی گر با تنظیم^{۱۰} کردن یک CNN که با بخش training از مجموعه داده ILSVRC-2012 پیش آموزش داده شده، آموزش داده می‌شود. در توصیف تصاویر، مفاهیم بصری بسیاری بر توصیف اثر می‌گذارند. برای مثال در جمله "An alpaca stands in the green grass"، مفاهیم بصری "alpaca"، "stands"، "grass" و "green" نقش دارند. ما برای نسبت دادن چند برچسب به یک عکس، از cross-entropy sig-^{۱۱} mold loss استفاده می‌کنیم. بردار ویژگی عکس که همان خروجی دسته‌بندی‌گر لغت‌نامه‌ای است را با f_I نمایش می‌دهیم، که هر درایه آن بیانگر احتمال حضور یک مفهوم در عکس است.

۲.۲ مدل زبانی

مدل زبانی (شکل ۲ سمت راست)، ساختار جمله را تنها با استفاده از منابع متنی جفت نشده یاد می‌گیرد و شامل یک لایه نشانند^{۱۱} که نمایش one-hot-vector^{۱۲} کلمات را به یک فضای با بعد پایین‌تر می‌نگارد، یک LSTM و یک لایه پیش‌بینی کلمه است. مدل زبانی آموزش می‌بیند که که با استفاده از کلمات قبلی جمله، کلمه بعدی را پیش‌بینی کند. در هر گام، کلمه قبلی ورودی LSTM است که ساختار بازگشتی (وابستگی به قبل) زبان را یاد می‌گیرد. کلمه نشاننده

^۹ Convolutional Neural Network

^{۱۰} Fine-tuning

^{۱۱} Embedding

در این نمایش به هر یک از کلمات یک اندیس نسبت داده میشود و سپس برداری به کلمه نسبت داده میشود که تمام درایه‌های آن صفر است به جز درایه اندیس متناظر^{۱۲}

اندیس‌های کلمات "alpaca" و "sheep" در مجموعه کلمات ما باشند. با داشتن بردارهای ویژگی عکس و ویژگی زبانی، f_L و f_I ، احتمال پیش‌بینی کلمه "sheep" متناسب است با:

$$f_I W_I[:, v_s] + f_L W_L[:, v_s] + b[v_s]$$

برای ساختن جمله با "alpaca" به همان شکل که جمله‌های شامل "sheep" ساخته می‌شوند، ابتدا وزنه‌های $W_I[:, v_s]$ ، $W_L[:, v_s]$ و $b[v_s]$ (نشان داده شده با قرمز در شکل ۳) را به طور مستقیم به وزنه‌های $W_I[:, v_a]$ ، $W_L[:, v_a]$ و $b[v_a]$ انتقال می‌دهیم. علاوه بر این، انتظار داریم پیش‌بینی کلمه "sheep" وابستگی زیادی به احتمال حضور یک "sheep" در تصویر داشته باشد. به عبارت دیگر، انتظار داریم $W_I[:, c_s]$ نقش تعیین‌کننده‌ای در بخشی از خروجی دسته بندی گزینانه‌ی ای که مربوط به "sheep" است داشته باشد. از طرف دیگر، $W_I[:, c_a]$ باید در خروجی مربوط به کلمه "alpaca" تاثیر گذار باشد. برای ایجاد این شرایط قرار می‌دهیم: $W_I[r_a, c_a] = W_I[r_s, c_s]$ که r_s و r_a نشان دهنده اندیس‌های "sheep" و "alpaca" در بردار ویژگی‌های عکس هستند. در نهایت، انتظار نداریم که خروجی کلمه "alpaca" به حضور یک "sheep" در تصویر وابسته باشد و یا برعکس. پس قرار می‌دهیم

$$W_I[r_s, c_a] = W_I[r_a, c_s] = 0$$

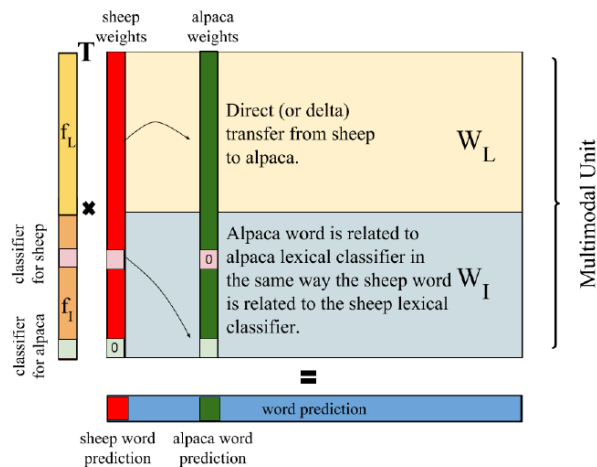


Figure ۳: شیوه انتقال اطلاعات از اشیاء دیده شده در منابع جفت عکس-جمله به اشیاء دیده نشده. برای جزئیات بیشتر بخش ۳،۴ را ببینید.

در حالی که دسته بندی گزینانه‌ی ای آموزش می‌بیند که مجموعه ای از عناصر بصری احتمالی داخل یک عکس را پیش‌بینی کند. در نتیجه، وزن‌های W_L ، که ویژگی‌های زبانی را به کلمه پیش‌بینی شده می‌نگارند، در زمان آموزش مدل زبانی یاد گرفته می‌شوند، اما وزن‌های W_I نه. وزن‌های داخل W_L با استفاده از داده‌های متنی جفت نشده آموزش داده می‌شوند؛ قبل از تنظیم شدن با داده‌های جفت عکس-جمله. اما W_I فقط با داده‌های عکس-جمله آموزش داده می‌شود. با اینکه در این‌جا از یک لایه چندگانه خطی استفاده می‌شود، نتایج به دست آمده با نتایج به دست آمده توسط سایر مدل‌ها که شامل یک لایه غیر خطی برای پیش‌بینی کلمه هستند، قابل مقایسه است. مدل توصیف‌گر به گونه‌ای طراحی شده است که انتقال وزن‌های یاد گرفته شده مربوط به کلمات موجود در داده‌های جفت، به وزن‌های مربوط به کلمات غایب در این مجموعه‌ها، به آسانی انجام شود. در ابتدا، با استفاده از دسته بندی گزینانه‌ی ای، ویژگی‌های عکس، دارای مفهوم مشخصی می‌شوند. بنابراین می‌توان به سادگی این ویژگی‌ها را گسترش داد تا شامل اشیاء جدید شوند و وزنه‌های مربوط به اشیاء مشخصی را تغییر داد. سپس، با یادگیری ویژگی‌های زبانی با استفاده از داده‌های متنی جفت نشده، مطمئن می‌شویم که مدل یک نشان‌دهنده خوب برای کلمات غایب پیدا می‌کند. در انتها، با استفاده از یک لایه چندگانه خطی، وابستگی بین ویژگی‌های زبانی و ویژگی‌های عکس و کلمه پیش‌بینی شده، به سادگی به دست می‌آید.

۴.۲ انتقال اطلاعات بین اشیاء

انتقال مستقیم

اولین روش انتقال وزن بین اشیاء که به بررسی آن می‌پردازیم، به طور مستقیم، وزنه‌های داخل W_L ، W_I و b را از اشیاء دیده شده در داده‌های جفت به اشیاء دیده نشده انتقال می‌دهد. به طور شهودی، روش انتقال مستقیم فرض می‌کند که یک کلمه جدید، مانند کلمه ای که از نظر معنایی به آن نزدیک است، توصیف می‌شود. برای مثال کلمه جدید "alpaca" که از نظر معنایی به کلمه شناخته شده "sheep" نزدیک است را در نظر بگیرید. فرض کنید v_a و v_s نشان دهنده

انتقال دلنا

۳ چارچوب عملی

۱.۳ مجموعه داده‌ها

برای اینکه در عمل برآوردی از عملکرد روشمان به دست آوریم، زیر مجموعه‌ای از مجموعه آموزش^{۱۳} MSCOCO میسازیم که فاقد هرگونه جفت عکس جمله است که حداقل یکی از هشت شیء خاص را توصیف میکنند. برای اینکه مطمئن شویم که اشیاء حذف شده شبیه حداقل یکی از اشیاء حذف نشده هستند، ۸۰ شیء مربوط به چالش مرزبندی MSCOCO^{۱۴} را با استفاده از نشاندن word2vec خوشه بندی^{۱۵} میکنیم و از هر خوشه یک شیء را حذف میکنیم. برای این کار، این کلمات انتخاب شدند: "bottle"، "bus"، "couch"، "microwave"، "pizza"، "racket"، "suitcase"، "zebra".

به طور تصادفی ۵۰ درصد از مجموعه ارزیابی^{۱۶} MSCOCO را برای ارزیابی انتخاب میکنیم و ۵۰ درصد دیگر را برای تست باقی میگذاریم. مفاهیم بصری داخل هر عکس را با استفاده از پنج موضوع اصلی قطعی^{۱۷} اشاره شده که در مجموعه داده MSCOCO در اختیار قرار داده شده است، برچسب گذاری میکنیم. اگر یکی از توضیحات قطعی مربوط به یک عکس، به یک شیء اشاره کنند، آن عکس یک مورد دارای آن شیء به حساب میاید. علاوه بر این، عملکرد DCC را هنگامی که شبکه‌های زبانی و دسته بندی گر بر روی مجموعه داده‌های جداگانه آموزش داده میشوند نیز بررسی میکنیم. به طور خاص، ۶۴۲ شیء از مجموعه داده تشخیص اشیاء ImageNet را، که در MSCOCO وجود ندارند، اما در مجموعه داده‌های متنی به دست آمده از صفحات وب وجود دارند، را انتخاب میکنیم. هیچ اصلاحی روی این مفاهیم به دست آمده انجام نمیدهیم و در نتیجه برخی از کلاسهای اشیاء شامل تعداد کم و برخی دیگر شامل تعداد زیادی عکس هستند. از 75 درصد عکسهای هر کلاس برای آموزش دسته بندی گر لغتنامه‌ای و از بقیه برای ارزیابی استفاده میکنیم. دقت کنید که هیچ توصیفی از این دسته‌ها نداریم.

به جای انتقال مستقیم وزن‌ها، میتوانیم تغییر وزن‌ها در طول آموزش با داده‌های جفت شده را انتقال دهیم. دوباره، انتقال کلمه "sheep" به کلمه "alpaca" را در نظر بگیرید. Δ_L را به این صورت تعریف میکنیم:

$$\Delta_L = W_{L-caption}[:, v_s] - W_{L-language}[:, v_s]$$

که $W_{L-caption}$ وزنهای یاد گرفته شده در زمان آموزش با عکس و جمله هستند و $W_{L-language}$ وزنهای یاد گرفته شده در مدل زبانی هستند. وزنهای مربوط به کلمه جدید "alpaca" به این صورت اصلاح میشوند:

$$W_{L-caption}[:, v_a] = W_{L-language}[:, v_a] + \Delta_L$$

انتقال دلنا میتواند بهتر عمل کند، زیرا برخلاف انتقال مستقیم، اطلاعات مربوط به وزنهای داخل W_L در طول انتقال از بین نمیرود. هنگامی که برای انتقال وزنهای W_L ، از انتقال دلنا استفاده میکنیم نیز، همچنان از انتقال مستقیم برای انتقال در W_I استفاده میکنیم.

تشخیص شباهت بین مفاهیم

تعیین اینکه کدام کلمات در داده‌های جفت عکس-جمله از نظر معنایی به کلمات خارج از داده‌های جفت شباهت دارند، یکی از مراحل مهم برای انتقال است. ما شباهت معنایی را با استفاده از مدل word2vec [۱۴] پیدا میکنیم. که با British National Corpus (BNC)، UkWaC و Wikipedia آموزش داده شده‌اند و فاصله بین دو کلمه (در فضای نشانده شده) با کسینوس زاویه بین آنها تعریف می‌شود.

^{۱۳}Training set^{۱۴}MSCOCO segmentation challenge^{۱۵}cluster^{۱۶}Validation set^{۱۷}Ground truth caption annotations

۲.۳ آموزش دسته بندی گر لغتنامه ای

همزمان آموزش میدهم.

Lexical classifier	Language model	B-1	METEOR	F1
MSCOCO	MSCOCO	64.40	21.00	39.78
Imagenet	MSCOCO	64.00	20.71	33.60
Imagenet	CaptionTxt	64.79	20.66	35.53
Imagenet	WebCorpus	64.85	20.66	34.94

جدول ۱: DCC بدون انتقال را با DCC با انتقال دلتا (ΔT)، DCC با انتقال مستقیم (DT) و یک مدل قدرتمند دیگر برای توصیف عکس (LRCN) مقایسه میکنیم. توانایی مدل برای به کارگیری کلمات جدید در جمله را با امتیاز F1 اندازه میگیریم. همچنین امتیازهای BLEU-1 و METEOR را گزارش میکنیم که بیانگر کیفیت کلی جمله هستند. DCC با موفقیت کلمات جدید را به کار میگیرد و کیفیت جملات آن به نسبت بالاتر است. (مقادیر به درصد هستند).

۵.۳ محک‌ها

برای اینکه روش انتقال را ارزیابی کنیم، باید یک محک که نشان دهد یک جمله تولید شده شامل یک شیء جدید هست یا نه را انتخاب کنیم. محک‌های متداول توصیف عکس عبارت‌اند از BLEU[2] و METEOR[4] که کلیت معنا و فصیح بودن جمله را میسنجند. با این وجود برای خیلی از اشیاء جدید میتوان بدون اشاره به آنها به امتیازات خوبی در این دو رسید. (برای مثال پسر در حال تنیس بازی کردن در شکل ۴) برای ارزیابی دقیق توانایی مدل در به دست آوردن مجموعه کلمات جدید، امتیاز F1 را نیز در نظر میگیریم. امتیاز F1، غلطهای مثبت (هنگامی که کلمه ای در یک جمله ظاهر میشود که نباید بشود)، غلطهای منفی (هنگامی که کلمه ای در جمله ظاهر نمیشود و باید بشود) و درست‌های مثبت (هنگامی که کلمه ای در جمله ظاهر میشود و باید بشود) را در نظر میگیرد. یک جمله تولید شده را مثبت (مثال مثبتی از یک کلمه خاص) میگیریم اگر شامل حداقل یک اشاره به یک کلمه کنار گذاشته شده داشته باشد و جملات قطعی را مثبت میگیریم، اگر به یک کلمه در یکی از توصیفهای قطعی آن اشاره شده باشد. مدلها با

ما هر دوی MSCOCO و ImageNet را به عنوان داده های عکسهای برچسب گذاری شده، برای آموزش دسته بندی گر لغتنامه ای در نظر میگیریم. برای تمام اشیاء داخل داده های جفت عکس-جمله، از عکسهای COCO که با ۴۷۱ مفاهیم بصری برچسب گذاری شده اند، برای آموزش دسته بندی گر لغتنامه ای استفاده میکنیم. برای هشت شیء‌ی که در داده های جفت ظاهر نمیشوند هم آموزش با MSCOCO و هم آموزش با ImageNet را در نظر میگیریم. دسته بندی گر لغتنامه ای با تنظیم یک شبکه پیچشی ژرف [35](VGG-16 layer)، که بر روی زیرمجموعه آموزش مربوط به تشخیص اشیاء ILSVRC-2012 از مجموعه ImageNet آموزش داده شده، آموزش میبیند.

۳.۳ آموزش مدل زبانی

سه منبع مختلف برای داده های متنی جفت نشده، برای آموزش مدل زبانی در نظر میگیریم: (۱) توصیفات داخل مجموعه آموزش MSCOCO (۲) متن های مربوط به توصیف عکس شامل سایر مجموعه داده های جفت عکس-توصیف: Flickr1M[5]، Flickr30k[21]، Pascal1k[8] و ImageCLEF-2012. این منبع شامل جملات MSCOCO نیست. (۳) متن های غیر مرتبط از صفحات وب که شامل ۶۰ میلیون جمله از British National Corpus (BNC)، UKWaC و Wikipedia است.

۴.۳ آموزش مدل توصیف‌گر

پس از آموزش دسته بندی گر لغتنامه ای و مدل زبانی، وزنه‌های لایه چندگانه مدل توصیف‌گر با داده های جفت عکس-جمله آموزش داده میشوند. برای روش انتقال مستقیم، تنها وزنه‌های داخل مدل چندگانه (W_L و W_I) را یاد میگیریم و سایر وزنه‌ها را ثابت نگه میداریم. برای روش انتقال دلتا، اگر وزنه‌های داخل W_L ، که با مدل زبانی پیش آموزش داده شده اند، از مقادیر اصلیشان زیاد تغییر کنند، انتقال خوب عمل نمیکند. در نتیجه، ابتدا وزنه‌های داخل W_L را ثابت نگه میداریم و فقط W_I را یاد میگیریم و سپس W_L و W_I را

	bottle	bus	couch	microwave	pizza	racket	suitcase	zebra	average
Pair Supervision	23.20	72.07	50.60	39.48	77.07	38.52	46.50	91.02	54.81
DT	4.63	29.79	45.87	28.09	64.59	52.24	13.16	79.88	39.78

جدول ۲: مقایسه امتیاز F1 برای انتقال مستقیم مدل (DT) DCC و یک مدلی که با مثالهای جفت عکس- جمله برای همه اشیاء آموزش داده شده است.

استفاده از Caffe آموزش داده میشوند. با جفت عکس- جمله برای هشت شیء کنار گذاشته شده، آموزش داده شده مقایسه میکنیم. برای تمام اشیاء، DCC میتواند جملاتی تولید کند که شامل آن شیء هستند.

۴ نتایج

همانطور که در شکل ۴ نشان داده شده، DCC میتواند کلمات جدید را به شکل درست وارد توصیف کند.

Lexical classifier	Language model	B-1	METEOR	F1
MSCOCO	MSCOCO	64.40	21.00	39.78
Imagenet	MSCOCO	64.00	20.71	33.60
Imagenet	CaptionTxt	64.79	20.66	35.53
Imagenet	WebCorpus	64.85	20.66	34.94

انتقال مستقیم در مقایسه با انتقال دلتا

شکل ۴: مقایسه اثر پیش آموزش دسته بندی گزینشگر لغتنامه ای و مدل زبانی با مجموعه داده های غیر جفت عکس و متن. همانطور که انتظار میرود بهترین نتیجه زمانی به دست می آید که از داده های داخل دامنه MSCOCO برای آموزش هر دوی دسته بندی گزینشگر لغتنامه ای و مدل زبانی استفاده شود. با این وجود، نتایج آموزش با منابع غیر مرتبط نیز قابل مقایسه است. (مقادیر به درصد هستند.)

جدول ۱ میانگین امتیاز F1 در بین هشت شیء کنار گذاشته شده در حالت انتقال مستقیم و غیر مستقیم مقایسه میکند. علاوه بر این LRCN([5]) را نیز با مجموعه داده کنار گذاشته شده MSCOCO آموزش میدهم. نتایج نشان میدهد که مدل ما در حالت بدون انتقال، با LRCN قابل مقایسه است و با انتقال، طبق هر محکی بهتر عمل میکند. همانطور که امتیاز F1 در جدول ۱ نشان میدهد، هر دوی انتقال دلتا و انتقال مستقیم میتوانند کلمات جدیدی را وارد دامنه لغات خود کنند. همچنین امتیاز BLEU-1 که بیانگر میزان هم پوشانی کلمات تولید شده و کلمات جمله مرجع است را نیز گزارش میکنیم. با اندازه گیری امتیاز METEOR، از فصاحت جملاتمان پس از اضافه شدن کلمات جدید، اطمینان حاصل میکنیم. DCC همواره امتیاز METEOR را افزایش میدهد که این نشان دهنده افزایش کیفیت کلی جملات با DCC است. روش انتقال مستقیم، همه امتیازات را به مقدار بیشتری نسبت به انتقال دلتا افزایش میدهد. یک نکته مهم این است که امتیازهای BLEU و METEOR برای اشیاء داخل مجموعه داده کنار گذاشته شده ها، کاهش پیدا نمیکند. برای روشن شدن اینکه مدل ما بر روی کدام کلمات بهتر کار میکند، امتیاز F1 را برای تمام اشیاء جدول ۲ گزارش میکنیم و با مدلی که

۵ جمع بندی

در این مقاله توصیف‌گر ترکیبی ژرف (DCC) را معرفی کردیم که میتواند برای توصیف اشیاء جدید که در منابع فعلی توصیفی حضور ندارند به کار رود. نتایج کمی و کیفی ما نشان دهنده توانایی این مدل برای استفاده از کلمات جدید در توصیف عکس با استفاده موثر از مجموعه داده های مربوط به عکس و داده های متنی غیر جفت است. با ترکیب داده های منابع مختلف و انتقال اطلاعات بین مفاهیمی که از نظر معنایی نزدیک هستند، DCC با تولید توصیفهایی غنی که محدود به در دسترس بودن منابع جفت عکس- جمله نیستند، مدل‌های فعلی توصیف عکس را بهبود میدهد.

ACL workshop on intrinsic and extrinsic evaluation measures for machine translation and/or summarization (2005).

- [5] M. J. Huiskes and M. S. Lew. "The mir flickr retrieval evaluation". In: *Proceedings of the 2008 ACM International Conference on Multimedia Information Retrieval, New York, NY, USA, 2008*. ACM (2008).
- [6] L. Davis. "Understanding videos, constructing plots learning a visually grounded storyline model from annotated videos". In: *CVPR* (2009).
- [7] L. Fei-Fei. "What does classifying more than 10,000 image categories tell us?" In: *ECCV* (2010).
- [8] J. Hockenmaier. "Collecting image annotations using amazon's mechanical turk". In: *Proceedings of the NAACL HLT 2010 Workshop on Creating Speech and Language Data with Amazon's Mechanical Turk* (2010).
- [9] B. Schiele. "What helps Where - and Why? Semantic Relatedness for Knowledge Transfer". In: *CVPR* (2010).
- [10] D. L. Chen and W. B. Dolan. "Collecting highly parallel data for paraphrase evaluation". In: *ACL* (2011).
- [11] D. Parikh and K. Grauman. "Relative attributes". In: *ICCV* (2011).
- [12] B. Thomee and A. Popescu. "Overview of the imageclef 2012 flickr photo annotation and retrieval task". In: *CLEF (Online Working Notes/Labs/Workshop)* (2012).



شکل ۵: مقایسه توصیف‌های تولید شده توسط مدل بدون انتقال، DCC با آموزش داخل دامنه، (MSCOCO) با آموزش خارج از دامنه، (ImageNet, WebCorpus) و یک مدل آموزش داده شده با جفت عکس - جمله برای تمام اشیاء. DCC MSCOCO میتواند جملاتی مشابه حالت آموزش دیده شده با جفت عکس - جمله تولید کند.

References

- [1] S. Hochreiter and J. Schmidhuber. "Long short-term memory". In: *Neural computation* (1997).
- [2] W.-J. Zhu. "BLEU: a method for automatic evaluation of machine translation". In: *ACL* (2002).
- [3] Y. Singer. "Feature-rich part-of-speech tagging with a cyclic dependency network". In: *NAACL* (2003).
- [4] S. Banerjee and A. Lavie. "An automatic metric for mt evaluation with improved correlation with human judgments". In: *Proceedings of the*

- [23] R. J. Mooney. "Integrating language and vision to generate natural language descriptions of videos in the wild". In: *COLING* (2014).
- [24] K. Saenko. "LSDA: Large scale detection through adaptation". In: *NIPS* (2014).
- [25] C. L. Zitnick. "Microsoft coco: Common objects in context". In: *ECCV* (2014).
- [26] M. Rohrbach A. Rohrbach and B. Schiele. "The long-short story of movie description". In: *GCPR* (2015).
- [27] T. Darrell. "Long-term recurrent convolutional networks for visual recognition and description". In: *CVPR* (2015).
- [28] A. Dick. "Image captioning with an intermediate attributes layer". In: *arXiv preprint arXiv:1506.01144* (2015).
- [29] D. Erhan. "Show and tell: A neural image caption generator". In: *CVPR* (2015).
- [30] A. Karpathy and L. Fei-Fei. "Deep visual-semantic alignments for generating image descriptions". In: *CVPR* (2015).
- [31] M. Mitchell. "Language models for image captioning: The quirks and what works". In: *ACL* (2015).
- [32] R. Salakhutdinov R. Kiros and R. S. Zemel. "Unifying visual-semantic embeddings with multimodal neural language models". In: *TACL* (2015).
- [33] K. Saenko. "Sequence to sequence - video to text". In: *ICCV* (2015).
- [13] T. Berg. "Babytalk: Understanding and generating simple image descriptions". In: *TPAMI* (2013).
- [14] J. Dean. "Efficient estimation of word representations in vector space". In: *ICLR Workshop* (2013).
- [15] "Devise: A deep visual-semantic embedding model". In: *NIPS* (2013).
- [16] A. Ng. "Zero-shot learning through cross-modal transfer". In: *NIPS* (2013).
- [17] K. Saenko. "Recognizing and describing arbitrary activities using semantic hierarchies and zero-shoot recognition". In: *ICCV* (2013).
- [18] S. Guadarrama. "Generating natural-language video descriptions using text-mined knowledge". In: *AAAI* (2013).
- [19] H. Nickisch C. Lampert and S. Harmeling. "Attributebased classification for zero-shot visual object categorization". In: *TPAMI* (2014).
- [20] T. Darrell. "Caffe: Convolutional architecture for fast feature embedding". In: *In Proceedings of the ACM International Conference on Multimedia* (2014).
- [21] J. Hockenmaier. "From image descriptions to visual denotations: New similarity metrics for semantic inference over event descriptions". In: *TACL* (2014).
- [22] "Imagenet large scale visual recognition challenge". In: *IJCV* (2014).

- [36] A. L. Yuille. "Learning like a child: Fast novel visual concept learning from sentence descriptions of images". In: *ICCV* (2015).
- [37] G. Zweig. "From captions to visual concepts and back". In: *CVPR* (2015).
- [34] K. Saenko. "Translating videos to natural language using deep recurrent neural networks". In: *NAACL* (2015).
- [35] K. Simonyan and A. Zisserman. "Very deep convolutional networks for large-scale image recognition". In: *ICLR* (2015).

آشنایی با روش چند- شبکه‌ای

سینا رسولی

rasoolibox193@gmail.com

۱ پیش‌گفتار

در یک قسمت از مطالعه‌ای در جریان، موفق به یافتن رابطه‌ای بین چند شاخص ارزی شدم. رابطه‌ی پیدا شده، بر حسب دو شاخص، مقداری تقریباً ثابت را معرفی می‌کرد.

$$\underbrace{f(x_1, x_2)}_{\text{فردا}} - \underbrace{f(x_1, x_2)}_{\text{امروز}} \approx 0$$

که در آن x_1 و x_2 شاخص‌های ارزی هستند، اندیس بالا زمان را بیان می‌کند و $0 \approx$ به معنی این است که تنها در ۴ درصد موارد یا به عبارت دیگر به طور متوسط هر ۲۵ روز مقدار این تابع در زمان تغییر می‌کند.

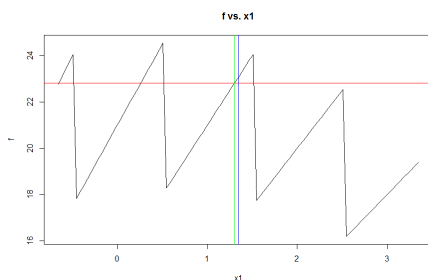


Figure ۱: نمودار تابع f و تلاش برای ریشه‌یابی

پیش‌بینی به کمک فرض کردن ثابت ماندن مقدار تابع f در روز آینده و یافتن ریشه‌های آن به ازای تنها یکی از شاخص‌های روز بعد است. به بیان ساده، باید محل تلاقی خط افقی (قرمز - مقدار تابع

هدف این مقاله، معرفی دسته‌ای از روش‌های تکراری^۱ به نام روش‌های چند- شبکه‌ای^۲ به دانشجویان، با هر پیش‌زمینه‌ای، است. به دلیل محدودیت حجم، دورنمای روشن‌گری از روش و ایده‌های اصلی، ارائه می‌شود. برای خواننده‌ای که با مطالب پیش برود، تعمیم و استنتاج حالت‌های کلی‌تر، دشوار نخواهد بود.

در صورت وجود هرگونه ابهام یا پرسش، از طریق پست الکترونیک با نویسنده در ارتباط باشید.

در دوره‌ی تحصیل خود، در دانشکده‌ی ریاضی (در میان دانشجویان کارشناسی)، به یاد ندارم فردی را علاقه‌مند به کارهای عددی و شبیه‌سازی معادلات دیفرانسیل دیده باشم. به جزئیات و تحلیل و ریشه‌یابی این مسئله در این‌جا نمی‌توان پرداخت. اما احساس کردم که به اشتراک گذاشتن تعدادی تجربه، شاید اهمیت این نوع مطالعه‌ها و درس‌هایی شبیه به آنالیز عددی را روشن‌تر کند.

۱.۱ ریشه‌ی تابع - پیش‌بینی شاخص‌های ارزی

جزئیات پیش رو، بیش‌ترین اطلاعات قابل بیان با حفظ محرمانگی اطلاعات پروژه هستند.

^۱ Iterative Methods

^۲ Multi-Grid Methods

پایین). همچنین در طول میله، در قسمت‌هایی منبع حرارت داریم (مثلا چند جای میله همواره گرم نگه داشته می‌شود و چند جای دیگر همواره سرد). جواب پایا^۴ یا جوابی که پس از زمان بی‌نهایت بدست می‌آید چه می‌شود؟

۲.۲ شکل ریاضی: پیوسته

صورت مسئله به شکل ریاضی و پیوسته:

$$\begin{cases} u_{xx}(x) = f(x) & \forall x \in (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

که در آن $u(x)$ تابع توصیف دما در مکان x ، $f(x)$ تابع توصیف اثر خارجی در دما و نماد u_x به معنی مشتق جزئی تابع u نسبت به پارامتر x است.

۳.۲ شکل ریاضی: گسسته

صورت مسئله به شکل ریاضی و گسسته شده برای یک N ثابت:

$$(1) \begin{cases} x_i = i \times \frac{1}{N} & i \in \{0, 1, 2, \dots, N\} \\ u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1}) = f(x_i) & i \in \{1, \dots, N-1\} \\ u(x_0) = u(x_N) = 0 \end{cases}$$

که با توجه به صفر بودن مقدار تابع $u(x)$ در مرزها، می‌توان مسئله را به شکل ماتریسی به شکل زیر بیان کرد:

$$-A_{(N-1) \times (N-1)} u_{(N-1) \times 1} = f_{(N-1) \times 1}$$

که در آن:

$$u_{(N-1) \times 1} = \begin{bmatrix} u(x_1) \\ u(x_2) \\ \vdots \\ u(x_{N-1}) \end{bmatrix}, f_{(N-1) \times 1} = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \end{bmatrix}$$

در روز قبل) و نمودار سیاه (نمودار تابع بر حسب یکی از پارامترها) پیدا شود.

در همین مثال، با خطای پایین در پارامترهای مسئله و مقدار تابع f (که البته درست است)، تلاش بر پیدا کردن ریشه‌های $g(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) - c$ به ازای c برابر با مقدار در روز قبل، است. پس به یک روش با دقت بالا برای پیدا کردن ریشه‌ی g نیاز داریم.

پیدا کردن ریشه‌ی یک تابع، نقطه‌ی شروع خوبی برای مواجهه با چالش‌های اصلی آنالیز عددی از جمله «عدد حالت»^۳ و «تاثیر انتخاب روش حل، در رفتار جواب» است.

۲.۱ نتیجه‌گیری غیررسمی

آنالیز عددی در کاربردهای روزمره چگال است. لطفاً با دید متفاوتی به سمت «او» حرکت کنید.

از موضوع اصلی نوشته فاصله نگیریم.

۲ مسئله‌ی مورد بررسی

در این نوشته به بررسی یک مسئله‌ی نسبتاً ساده به شکلی که در متن معرفی می‌شود می‌پردازیم. شروع به کار با یک مسئله‌ی ساده کمک می‌کند که «شهود و درک مسئله» در کنار «بررسی عمومی و نظری» در کنار هم وجود داشته باشند. این امر، شهود و درک در مسائل پیچیده را ممکن می‌سازد، قلمرویی که در آن تنها چراغ راه، ابزار انتزاعی و نظری است.

۱.۲ شکل کلامی

صورت مسئله به شکل کلامی و شهودی:

یک میله‌ی فلزی داریم که دو سر آن در دمای صفر قرار گرفته‌اند. ابتدا یک توزیع دما در میله تصور کنید (مثلاً ناحیه‌ی مرکزی دمای بالایی دارد و سایر نقاط دمای

^۳Condition Number

^۴Steady Solution

و

۱.۳ روش حل تکراری^۷

در این نوع روش‌ها تلاش می‌شود با ارائه‌ی عملگر مناسب، با اعمال متوالی آن عملگر به جواب نزدیک و نزدیک‌تر شد. به بیان دیگر:

$$\begin{cases} \{x_i\}, a \in \mathbb{R}^n, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ x_0 = a, x_{i+1} = g(x_i) \\ \lim_{j \rightarrow \infty} x_j = x^* \quad (*) \end{cases}$$

با شرایطی بر تابع g ، میتوان همگرایی از هر نقطه‌ی اولیه را تضمین کرد.

قضیه ۱ (استفاده از نقطه ثابت باناخ^۸ [۲]). اگر فاصله‌ی تصویر هر دو نقطه، اکیدا کمتر از فاصله‌ی آن دو نقطه شود (با ضریب ثابتی کراندار شود)، دنباله با شروع از هر نقطه‌ی اولیه به یک نقطه‌ی یکتا همگرا خواهد شد.

$$\exists \alpha \in [0, 1) : |g(x) - g(y)| < \alpha |x - y| \Rightarrow \exists! x^* : \lim_{j \rightarrow \infty} x_j = x^*$$

پس با تبدیل مسئله‌ی (۳) به یک مسئله‌ی تکراری به گونه‌ای که بتوان از قضیه‌هایی مانند نقطه‌ی ثابت باناخ استفاده کرد، می‌توان به جواب (۳) به شکل تکراری نزدیک شد. به طور معمول این کار با تجزیه‌ی (جمع‌ی) ماتریس A به شکل $A = M - N$ انجام می‌شود که در عبارت‌های زیر به طور خلاصه آمده است:

$$Au = 0 \Rightarrow \begin{cases} (M - N)u = 0 \rightarrow u = M^{-1}Nu \\ R = M^{-1}N \\ u^{new} = Ru^{old} \end{cases}$$

به شکلی که ماتریس R تعریف شده باشد و در شرایط «نقطه‌ی ثابت باناخ» صدق کند (به طور مثال شعاع طیفی آن کوچک‌تر از ۱ باشد).

^۵Sparse^۶Frequency^۷Iterative Method^۸Banach Fixed-Point Theorem^۹Weighted Jacobi Method^{۱۰}Jacobi Method

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}_{(N-1) \times (N-1)} \quad (2)$$

که در آن درایه‌هایی که حاضر نیستند، صفر هستند (ماتریس تنک^۵ است).

۳ روش حل تکراری: رفتار با بسامدهای^۶

مختلف

صورت مسئله‌ی گسسته‌سازی شده در قسمت قبل را، به شکل زیر تغییر می‌دهیم.

$$Au = 0 \quad (3)$$

که راه‌های تکراری برای حل این نوع معادله بسیار بررسی شده است. ارتباط معادله‌ی (۳) با معادله‌ی (۱) به این صورت است که در معادله‌ی ساده شده، تلاش بر صفر کردن خطا است و در معادله‌ی اصلی، تلاش برای نزدیک شدن به جواب مسئله. هر دو روش از یک نقطه‌نظر تحلیل می‌شوند:

حل تکراری استفاده شده با استفاده از ماتریس A ، کار را خراب نکند (که مستقل از f است).

دقت کنید که جواب بدیهی «همه جا صفر»، جواب نهایی است و این پاسخ را می‌دانیم اما تلاش برای یافتن روشی است که در مواقعی که این قدرت تحلیل را نداریم نیز کارا باشد.

پیش از توضیح روش‌های حل، مختصری در رابطه با «روش

تکراری» توضیح دهیم:

۲.۳ روش جاکوبی وزن‌دار^۹ [۱]

در روش جاکوبی^{۱۰} [۴]، ماتریس A به دو قسمت درایه‌های روی قطر $M = D(A)$ و درایه‌های خارج قطر $N = L(A) + U(A)$ تجزیه می‌شود، که در عبارتهای بالا:

- $D(A)$ درایه‌های روی قطر A
- $L(A)$ درایه‌های پایین قطر A
- $U(A)$ درایه‌های بالای قطر A

هستند.

به طور خلاصه اطلاعات روش را با نمادهای زیر نشان می‌دهیم:

$$R_J = D^{-1}(L + U), u_J^{new} = R_J u_J^{old} \quad (۴)$$

که در آن:

- R ماتریس حل تکراری
- اندیس پایین (J) نشان دهنده‌ی روش استفاده شده
- u بردار جواب تقریبی

روش جاکوبی وزن‌دار ماتریس حل تکراری با پارامتر حقیقی

ω به شکل زیر تعریف می‌کند:

$$R_{WJ} = (1 - \omega)I + \omega R_J \quad (۵)$$

که در آن I ماتریس همانی^{۱۱} است (حالت $\omega = 1$ همان روش جاکوبی است).

۳.۳ روش گاوس-سیدل^{۱۲} [۴]

در این روش، ماتریس حل تکراری به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$R_G = (D - L)^{-1}U \quad (۶)$$

حل بازگشتی را به شکل زیر بدست می‌دهد:

$$u_G^{new} = R_G u_G^{old}$$

۴.۳ تحلیل اولیه‌ی روش‌ها

با توجه به این‌که مسئله‌ی شرایط مرزی با مشتق‌های جزئی (۱) در واقع جواب پایای معادله‌ی حرارت^{۱۳} است، پس به بررسی نقطه‌های شروع خاص‌تری در تحلیل روش‌های بازگشتی می‌پردازیم:

$$u_j^*(x_i) = \sin(x_i \times j\pi) \quad (۷)$$

که در واقع هر اندیس j نماینده‌ی یک بسامد مختلف است.

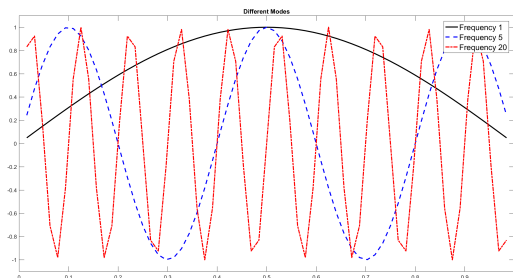


Figure ۲: بسامدهای مختلف

برای تحلیل نحوه‌ی عملکرد دو روش تکراری بیان شده، از نقطه‌های اولیه به شکل بالا، شروع می‌کنیم و نزدیکی به جواب نهایی (همه جا صفر) را پس از ۱۰۰ گام، مشاهده و مقایسه می‌کنیم:

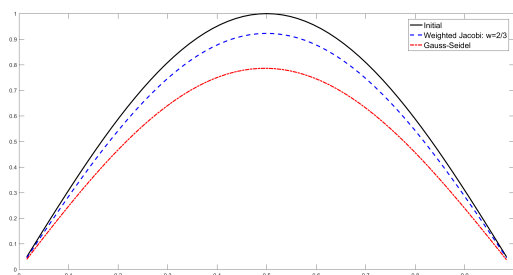


Figure ۳: نقطه‌ی شروع با بسامد ۱

^{۱۱} Identity Matrix

^{۱۲} Gauss-Seidel Method

^{۱۳} Heat Equation

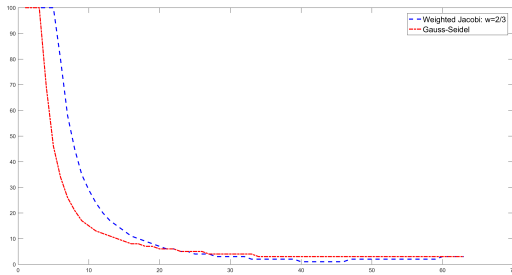


Figure ۶: تکرار لازم برای رسیدن به دقت ۰۸

در شکل بالا، محور افقی، بسامد نقطه‌ی اولیه و محور عمودی، تعداد تکرارها برای رسیدن به خطای ذکر شده، را نشان می‌دهد.

۴ تغییر اندازه‌ی شبکه: نسبی بودن بسامد

با توجه به تعریف x_i در (۱) و تعریف بسامد z در رابطه‌ی (۷)، می‌توان دید که بسامد یک جواب، به اندازه‌ی شبکه بستگی دارد. به این معنی که:

نقطه‌ی شروع با بسامد کم در یک شبکه، نقطه‌ی شروع با بسامد بیش‌تر در شبکه‌ای با اندازه‌ی بزرگ‌تر است.

این موضوع با توجه به شکل زیر و جمله‌ی کمکی بعد از آن واضح‌تر می‌شود:

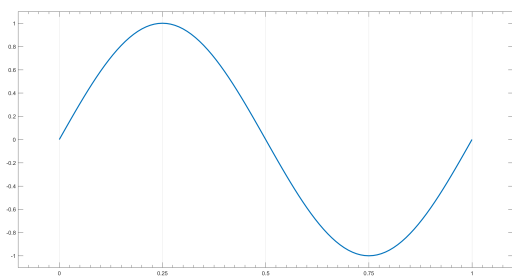


Figure ۷: تعداد نوسان‌ها در واحد طولی با اندازه‌ی ۰.۵، برابر ۰.۵ و برای واحد طول ۱ برابر ۱ است

با دو برابر کردن اندازه‌ی شبکه، فرکانس یک تابع سینوسی، دو برابر می‌شود.

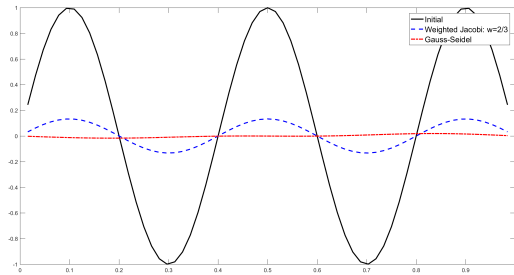


Figure ۴: نقطه‌ی شروع با بسامد ۵

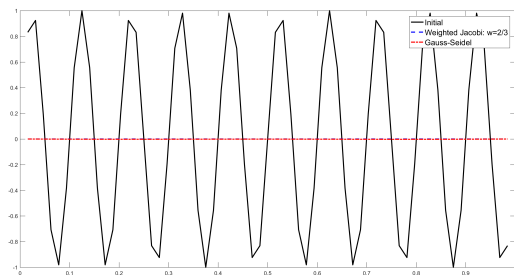


Figure ۵: نقطه‌ی شروع با بسامد ۲۰

در شکل‌های بالا چندین مشاهده‌ی عمومی نهفته است که در زیر به آن‌ها اشاره می‌کنیم:

- بسامدهای بالا: هر دو روش به شکل موفق در تکرارهای کم، به جواب نهایی نزدیک می‌شوند.
- بسامدهای پایین: هر دو روش در نزدیک شدن به جواب نهایی، بسیار کند هستند.
- بسامدهای میانی: برخورد با این دسته بسامدها با سرعتی نه بسیار زیاد و نه بسیار کم صورت می‌گیرد.

برای بررسی بازه‌ای از بسامدها، به نمودار زیر توجه کنید:

۱.۴ ایده: روش دو-شبکه‌ای^{۱۴}

نوشتن و راحتی بیان، می‌پردازیم.

- اندازه‌ی شبکه: اندازه‌ی شبکه‌ی اولیه $h = \frac{1}{N}$ و اندازه‌ی شبکه‌ی زمخت‌تر $2h$.
- ماتریس معادله: ماتریس معادله‌ی گسسته شده (۱) شبکه‌ی اولیه با A_h و شبکه زمخت‌تر را با A_{2h} نمایش می‌دهیم.
- بردار جواب: بردار جواب شبکه‌ی اولیه را با u_h و شبکه‌ی زمخت‌تر را با u_{2h} نمایش می‌دهیم.

۱.۵ گذار مکان [۳]

۱.۱.۵ ظریف^{۱۷} به زمخت

اگر به شکل زیر و بیان مسئله‌ی پیش رو در آن نگاه کنید، جواب تقریباً واضح می‌شود (مسئله پیدا کردن نقاط روی شبکه‌ی زمخت‌تر است).

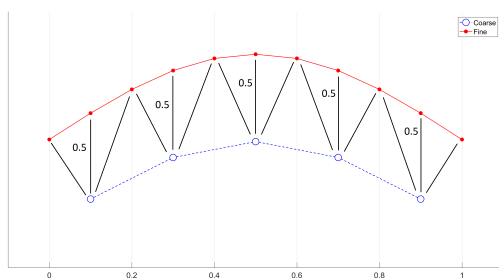


Figure ۸: گذار از شبکه‌ی ظریف به زمخت (وزن‌های نوشته نشده، برابر ۰/۲۵ هستند)

که با توجه به اینکه نقاط شبکه‌ی زمخت‌تر روی نقاط شبکه‌ی کوچک‌تر قرار می‌گیرند، تنها به یک نگاشت شمول^{۱۸} (که همان نگاشت همانی با دامنه‌ی کوچک شده است)، نیاز داریم و با ماتریس

^{۱۵}Coarser

^{۱۶}Scheme

^{۱۷}Fine

^{۱۸}Inclusion Map

ایده‌ای که به ذهن می‌رسد را به صورت کلامی می‌توان به شکل زیر بیان کرد:

۱. حذف فرکانس‌های بالا: ابتدا بر روی نقطه‌ی شروع، چندین بار، یکی از روش‌های تکراری را اعمال می‌کنیم (تا جواب‌های با بسامد بالا از میان بروند).

۲. گذار به شبکه‌ی زمخت‌تر^{۱۵}: ماتریس‌ها و بردارهای شبکه‌ی زمخت‌تر را با توجه به شبکه‌ی اولیه بدست می‌آوریم.

۳. حذف فرکانس‌های بالا: در شبکه‌ی زمخت‌تر با اعمال ماتریس روش تکراری، فرکانس‌های بالای به‌وجود آمده را حذف می‌کنیم.

۴. گذار به شبکه‌ی اولیه: بردارها و ماتریس‌های شبکه‌ی زمخت را به شبکه‌ی اولیه تبدیل می‌کنیم.

۵. حذف اختلال‌ها: گذار بین شبکه‌ها، ممکن است خطاهایی با فرکانس‌های بالا به‌وجود آورد. برای از بین بردن آن‌ها، روش تکراری را چندین بار اعمال می‌کنیم.

به شمایی^{۱۶} که در بالا برای حل ارائه شد، روش دو-شبکه‌ای گفته می‌شود.

توجه کنید که در مراحل بالا، تنها قدم‌هایی که نیاز به توضیح و بررسی دارند، (۲) و (۴) هستند. یعنی روش گذار اگر مشخص شود، در هر مرحله‌ی دیگر تنها اعمال روش بازگشتی (ضرب ماتریس R) باقی می‌ماند که ساده است.

۵ روش دو-شبکه‌ای

در این قسمت، چگونگی گذار که در قسمت قبل بیان شد را توضیح می‌دهیم. پیش از آن، ابتدا به معرفی چند نمادگذاری برای کوتاهی

به طور معمول، قدم‌های بالا را در دیاگرام‌ای ۲۰ به شکل زیر نمایش می‌دهند:

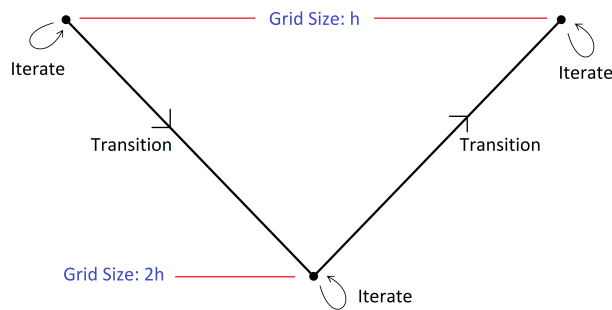


Figure ۱۰: نمودار شماتیک روش دو-شبکه‌ای

۴.۵ پیاده‌سازی روش دو-شبکه‌ای

روش گفته شده در قسمت‌های قبل را پیاده‌سازی می‌کنیم و نتایج آن را با نمودارهای روش‌های قبل مقایسه می‌کنیم:

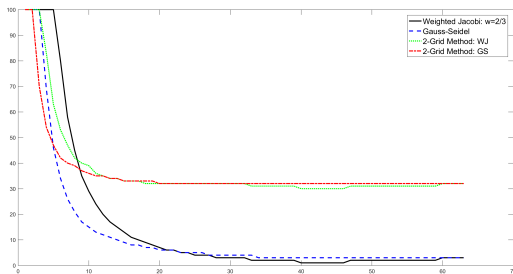


Figure ۱۱: عملکرد روش دو-شبکه با پایه‌های مختلف

نتیجه‌گیری: همان‌گونه که در شکل بالا مشاهده می‌کنید، از روش دو-شبکه‌ای می‌توان به کمک یک آستانه ۲۱ برای بسامد استفاده کرد و عملکرد بسیار بهتری در فرکانس‌های پایین گرفت. باید تاکید کنم که به پیاده‌سازی روش نیز بستگی دارد، روش پیاده‌سازی شده در نمودار بالا (روش در ضمیمه شرح داده شده است)، در فرکانس‌های پایین تنها برتری دارد. برای پیاده‌سازی بهتر می‌توان روشی (ساده) ارائه کرد که همواره عمل‌کردی بهتر از روش پایه‌ی تکراری (جاکوبی وزن‌دار یا گاوس-سیدل) داشته باشد.

^{۲۰} Diagram

^{۲۱} Threshold

برای نوشتن $A_{\nu h}^{2h}$ ، ابتدا به تعریف ضرب و عمل ماتریس نگاه می‌کنیم.

- گذار از شبکه‌ی ظریف به زمخت با ضرب ماتریس I_h^{2h} انجام می‌شود.
- مسئله در شبکه‌ی ظریف با ماتریس $A = A_h^h$ بیان می‌شود.
- گذار از شبکه‌ی زمخت به ظریف با ماتریس $I_{\nu h}^h$ انجام می‌شود.

شمای بالا این ایده را در مورد تعریف مسئله در شبکه‌ی زمخت به ما می‌دهد:

$$A_{\nu h}^{2h} = I_h^{2h} A_h^h I_{\nu h}^h$$

که می‌گوید مراحل بالا را به ترتیب انجام دهیم: (۱) بردار در شبکه‌ی زمخت را به شبکه‌ی ظریف ببریم، (۲) در شبکه‌ی ظریف ماتریس A_h^h را ضرب کنیم و (۳) بردار بدست آمده را به شبکه‌ی زمخت بازگردانیم.

۳.۵ شمای کامل روش دو-شبکه‌ای

برای نمایش کامل شمای حل، مراحل به ترتیب در زیر آمده است:

۱. ابتدا رابطه‌ی $A_h^h u_h = 0$ را به شکل تکراری با تعدادی قدم مشخص حل می‌کنیم.

۲. مسئله را به شبکه‌ی زمخت شده تبدیل می‌کنیم $A_{\nu h}^{2h} u_{2h} = 0$ (نقطه‌ی شروع، از تبدیل نقطه‌ی نهایی قسمت قبل می‌آید).

۳. در شبکه‌ی زمخت شده، به شکل تکراری با تعدادی قدم مسئله را حل می‌کنیم.

۴. مسئله را به شبکه‌ی ظریف باز می‌گردانیم (نقطه‌ی شروع، از تبدیل نقطه‌ی نهایی قسمت قبل می‌آید).

۵. در شبکه‌ی ظریف، مسئله را حل می‌کنیم (برای از بین بردن خطاهای ناشی از تبدیل مسئله).

تشکر

لازم دانستم که از دکتر رزوان به خاطر معرفی موضوع و راهنمایی در نگارش این متن تشکر کنم. همچنین از خانم هدی محمودی برای نقدهای محتوایی و ویرایشی ایشان، ممنون هستم.

- اندازه‌ی شبکه: تعداد قسمت‌های تقسیم‌بندی $N = 64$ که طول شبکه‌ی $h = 0.015625$ را بدست می‌دهد.
- تابع خطا: از نرم بیشینه ۲۵ استفاده شد یعنی بزرگ‌ترین قدر مطلق اختلاف از جواب (که بردار θ بود) در درایه‌ها.
- روش دو-شبکه‌ای استفاده شده: روش دو-شبکه‌ای استفاده شده برای رسم نمودارها، چرخه‌ی زیر را دارد:

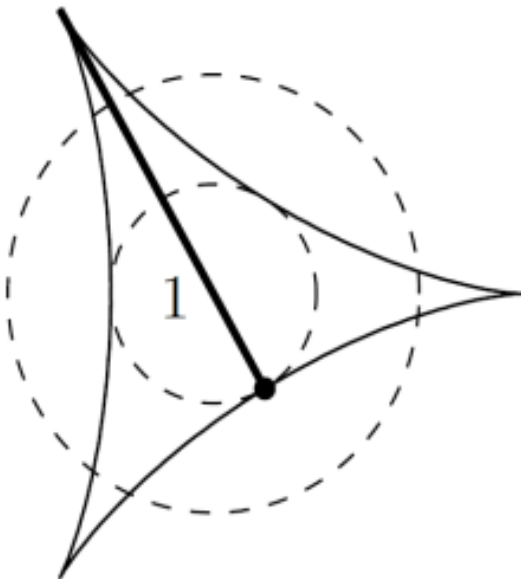
References

- [1] S. F. McCormick W. L. Briggs Van E. Henson. "A Multigrid Tutorial". In: (2000).
- [2] W. Han K. Atkinson. "Theoretical Numerical Analysis". In: (2009).
- [3] Van Emden Henson. "A Multigrid Tutorial, presented by Van Emden Henson". In: (2012).
- [4] Timothy Sauer. "Numerical Analysis". In: (2012).

۱. اعمال روش پایه با ۳ تکرار و انتقال به شبکه‌ی زمخت‌تر
 ۲. اعمال روش پایه با ۴ تکرار در شبکه‌ی زمخت‌تر و انتقال به شبکه‌ی اولیه
 ۳. اعمال روش پایه در شبکه‌ی اولیه با ۳ تکرار
- که در آن «روش پایه» یکی از «جاکوبی وزن‌دار» یا «گوس-سیدل» است.

مسئله کاکیا برای حالت متناهی

ترجمه: امیرحسین ذوالفقاری و شایان غلامی



«کمترین مقدار مساحت یک شکل در فضا، بطوری که یک سوزن به راحتی بتواند در آن چرخش کند، چقدر است؟»

این سوال زیبا در سال ۱۹۱۷ توسط ریاضی‌دان ژاپنی، سوئیچی کاکیا مطرح شد. این سوال بلافاصله برجستگی و شهرت زیادی بدست آورد و به همراه ابعاد بالاتر آن، باعث شد تا راهی جدید در هندسه آغاز شود که امروزه به نظریه اندازه هندسی معروف است. برای تعریف هرچه دقیق «چرخش کردن»، کاکیا حرکت مداوم سوزن را در ذهن خود جوری تصور کرد که سوزن به مکان اولیه خود باز می‌گردد اما جای ابتدا و انتهای آن عوض می‌شود مانند یک سامورایی که بدن خود را می‌چرخاند و به طور معکوس روی زمین قرار می‌گیرد! هر حرکت مداومی که توسط سوزن انجام می‌پذیرد باید داخل شکل باشد و نباید از شکل خارج شود.

بدیهی است که یک دایره به قطر ۱ متر (با مساحت $\frac{\pi}{4} \approx 0.785$) یک شکل با شرایط فوق است. همچنین یک مثلث متساوی الاضلاع به ارتفاع ۱ متر (با مساحت $\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.577$) نیز از جمله این اشکال است.

ژولیوس پال نشان داد که برای اشکال محدب این واقعیت کمترین مقدار ممکن را دارد اما در واقع ما می‌توانیم به اشکال بهتری نیز دست پیدا کنیم. شکل سه گوش ماندی که در ادامه آورده شده است نیز شکلی است با ویژگی‌هایی که کاکیا مدنظر داشت. مساحت این سه گوش مانند برابر با $\frac{\pi}{8} \approx 0.393$ است و کاکیا می‌اندیشید که این شکل کمترین مساحت را برای اشکال بسته دارد.

اما چند سال بعد از این که سوال طراحی شد، بسیار شگفت انگیز بود که آبرام بسیکوویچ مجموعه‌ای با مساحت به هر مقدار دلخواه کوچک تولید کرد. مثال او دارای تعداد زیادی سوراخ بود و همچنین قطر مجموعه بسیار بزرگ بود، که مثال نسبتاً پیچیده‌ای بود. اما مطلب قابل توجه این بود که فردریک کانینگهام نشان داد که حتی می‌توانیم مجموعه همبند ساده با مساحت به دلخواه کوچک در یک دایره به قطر ۲ برای مساله پیدا کنیم.

درواقع، بسیکوویچ در ابتدا از مطالب مربوط برای حل مسئله سوزن‌ها کاربرد داشت، لذت می‌برد. یک مجموعه فشرده $K \subseteq R^n$ را مجموعه کاکیا (یا به عبارت بهتر مجموعه بسیکوویچ)

داشته باشیم $|K| \geq c|F|^n$ «؟»

بدیهی است که این مسئله برای حالت $n = 1$ درست است و اثبات آن برای حالت $n = 2$ چندان مشکل نخواهد بود اما برای ابعاد بالاتر این موضوع مشکل بود تا زمانی که زیو دویر، راه حلی زیبا و فوق العاده و درعین حال ساده در پایان نامه سال ۲۰۰۸ خود، برای آن بیان نمود. ابتدا نیاز داریم که دو واقعیت را درباره چندجمله‌ای‌ها n متغیره بیان کنیم.

ابتدا چند موضوع را برای خودمان تعریف می‌کنیم. $F[x_1, x_2, \dots, x_n]$ را حلقه چندجمله‌ای $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ روی میدان متناهی F می‌نامیم. عبارت $x_1^{s_1} x_2^{s_2} \dots x_n^{s_n}$ یک تک جمله‌ای است و گاهی به صورت x^s نیز نمایش داده می‌شود و درجه آن برابر $\sum_{i=1}^n s_i$ است.

درجه چندجمله‌ای $p(x) = \sum a_s x^s$ برابر بیشترین درجه میان تک جمله‌ای‌های آن است که ضرایب‌شان ناصفر باشد. چندجمله‌ای صفر، چندجمله‌ای است که همگی ضرایب آن صفر باشد. همچنین چندجمله‌ای $p(x)$ روی $E \subseteq F^n$ «ناپدید» است اگر برای همه $a \in E$ داشته باشیم $p(a) = 0$.

حال دو واقعیت درباره چندجمله‌ای‌های تک متغیره که از مفروضات ما برای اثبات نکات بعدی است، بیان می‌کنیم:

۱. هر چندجمله‌ای از درجه نامنفی d ، حداکثر دارای d ریشه است.

۲. برای هر مجموعه $E \subseteq F$ با تعداد اعضای $|E| \leq d$ چندجمله‌ای ناصفر $p(x)$ از درجه حداکثر d وجود دارد که روی E ناپدید است.

برای مورد دوم کافی است $p(x) = \prod_{a \in E} (x-a)$ را در نظر بگیرید.

۱. اگر $|F| = q$ آنگاه هر چندجمله‌ای ناصفر $p(x) \in F[x_1, x_2, \dots, x_n]$ از درجه d حداکثر دارای dq^{n-1} ریشه است.

اثبات. حکم را با استقرا روی n نشان می‌دهیم. با فرض ۱ حکم برای حالت پایه بدیهی است. حال $p(x)$ را بر اساس چندجمله‌ای بر

می‌نامیم اگر این مجموعه در هر جهت، یک پاره خط به طول ۱ را شامل شود. بسیکوویچ یک نتیجه زیبا را ثابت کرد که در هر بعد، مجموعه‌ای کاکیا با اندازه (لبگ) صفر وجود دارد. اما چگونه؟ شهود ما به ما می‌گوید که این مجموعه باید به نحوی گسترش یابد چراکه در هر بعد یک پاره خط را در بر می‌گیرد (درمقابل می‌توان نشان داد که اندازه (لبگ) چنین مجموعه‌هایی که لزوماً شامل یک پاره خط در هر جهت نیستند اما سوزن می‌تواند به آزادی در آن جابجا شود، مثبت است).

آن سال‌ها، سال‌هایی بود که مفهوم (توپولوژیکی) بعد به وسیله افرادی چون هنری لبگ، کارل منجر، فلیکس هاسدورف و دیگران بوجود آمد که دقیقاً اسیر همین «گسترش» شرایط مختلف پوشش بود. حال ما بعد هاسدورف را $hd(K)$ می‌نامیم و نیازی به مفاهیمی درباره آن نداریم. فقط در نظر بگیرید که فضای اقلیدسی R^n دارای بعد هاسدورف n است و hd یک تابع یکنوا است پس برای هر $K \subseteq R^n$ داریم که $hd(K) \leq n$

حدس ۱ (حدس کاکیا). هر مجموعه کاکیا در R^n دارای بعد هاسدورف n است.

این حدس برای $n = 1, 2$ صحیح است اما برای حالت‌های بزرگتر مساوی ۳ همچنان یک مسئله باز است و بنظر می‌رسید که بسیار مشکل‌تر از مسئله افزایش ابعاد است و امروزه از آن به عنوان یکی از مهم‌ترین و عمده‌ترین مسائل باز در زمینه نظریه اندازه هندسی یاد می‌شود.

توماس ولف، در یک مقاله الهام بخش در سال ۱۹۹۹، پیشنهاد توجه به میدان متناهی F را داد. فرض کنید F^n فضای برداری باشد. مجموعه $K \subseteq F^n$ را یک مجموعه (متناهی) کاکیا می‌نامیم اگر در هر جهت پاره خطی را شامل شود. یعنی برای هر بردار $v \in F^n$ وجود دارد $w \in F^n$ که خط $L = w + tv : t \in F$ در K وجود داشته باشد.

ولف یک نسخه جدید از مسئله را نسبت به دید اقلیدسی مسئله کاکیا، بیان نمود:

«آیا عدد ثابت $c = c(n)$ وجود دارد که تنها به مقدار n وابسته باشد و به $|F|$ بستگی نداشته باشد و برای هر مجموعه کاکیا $K \subseteq F^n$

حسب متغیر x_n می‌نویسیم.

$$p(x) = g_0 + g_1 x_n + g_2 x_n^2 + \dots + g_l x_n^l$$

$$g_i \in F[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]$$

$$g_l \neq 0$$

می‌توان هر $v \in F^n$ را به صورت (a, b) نمایش داد که

$$p(a, b) \text{ و } a \in F^{n-1}, b \in F$$

را محاسبه کنیم:

$$g_l(a) = 0 \text{ حالت اول. تعداد ریشه‌هایی که } g_l(a) = 0$$

چون $g_l \neq 0$ و درجه حداکثر $d - l$ است، بنا بر فرض استقرای q ، حداکثر دارای $(d - 1)q^{n-2}$ ریشه در F^{n-1} است و برای هر a ، انتخاب برای b داریم. پس در این حالت حداکثر $(d - l)q^{n-1}$ ریشه داریم.

$$g_l(a) \neq 0 \text{ حالت دوم. تعداد ریشه‌هایی که } g_l(a) \neq 0$$

در این جا $p(a, x_n)$ یک چندجمله‌ای ناصفر بر حسب x_n است و دارای حداکثر d ریشه است. پس با توجه به فرض ۱ برای هر a ، انتخاب برای b داریم که $p(a, b) = 0$. تعداد a ها هم که حداکثر q^{n-1} است و در کل حداکثر lq^{n-1} ریشه داریم.

پس روی هم رفته این چند جمله‌ای دارای

$$(d - l)q^{n-1} + lq^{n-1} = dq^{n-1}$$

ریشه است. \square

لم ۲. برای هر مجموعه $E \in F^n$ و $|E| < \binom{n+d}{d}$ یک چندجمله‌ای ناصفر $p(x)$ مانند $p(x) \in F[x_1, x_2, \dots, x_n]$ با درجه حداکثر d وجود دارد که روی E ناپدید است.

اثبات. V_d را مجموعه تمام چندجمله‌ای‌های داخل $F[x_1, x_2, \dots, x_n]$ در نظر بگیرید که دارای درجه حداکثر d هستند.

پس V_d شامل جملات زیر است:

$$1, x_1, x_2, \dots, x_n, x_1^2, x_1 x_2, \dots, x_1^d, \dots, x_n^d$$

تعداد این عبارات برابر با $\binom{n+d}{d}$ است. در واقع جواب‌های نامنفی

$$\sum_{i=1}^n s_i \leq d \text{ را محاسبه کرد که برابر با } \binom{n+d}{d} \text{ می‌باشد.}$$

حال فضای برداری F^E را فضای همه تابع‌های مثل $f: E \rightarrow F$ است که بعد این فضا برابر $|E|$ است که کمتر از $\binom{n+d}{d}$ می‌باشد. نگاشت $p(x) \mapsto (p(a))_{a \in E}$ که از V_d به F^E تعریف شده است، یک نگاشت خطی در فضای برداری است. پس نتیجه می‌گیریم که دارای یک فضای پوچ ناصفر است که حاوی چندجمله‌ای مورد نظر ماست که روی E ناپدید است. \square

حال ما تمام موضوعاتی که برای بیان راه حل زیبای دویر برای مسئله کاکیا نیاز بود را می‌دانیم.

قضیه ۱. فرض کنید $K \in F^n$ یک مجموعه کاکیا باشد، آنگاه:

$$|K| \geq \binom{|F| + n - 1}{n} \geq \frac{|F|^n}{n!}$$

اثبات. نامساوی دوم، بنا بر تعریف ضرایب دوجمله‌ای واضح است. در ابتدا فرض می‌کنیم حکم مسئله صحیح نباشد (فرض خلف) و با فرض $|F| = q$ داریم:

$$|K| < \binom{n + q - 1}{n} = \binom{n + q - 1}{q - 1}$$

بنابر لم ۲ چند جمله‌ای ناصفر $p(x) \in F[x_1, x_2, \dots, x_n]$ از درجه $d \leq q - 1$ وجود دارد که روی K ناپدید است:

$$p(x) = p_0(x) + p_1(x) + \dots + p_d(x)$$

که در آن مجموع تمام جملات از درجه i است و $p_d(x)$ ناصفر است. از آنجایی که $p(x)$ روی مجموعه ناتهی K ناپدید است پس $d > 0$.

$v \in F^n / \{0\}$ را به طور دلخواه در نظر بگیرید. بنا بر ویژگی کاکیا برای این v ، $w \in F^n$ وجود دارد که

$$p(w + tv) = 0 : t \in F$$

حال ترفند را بیان می‌کنیم: چندجمله‌ای $p(w + tv)$ را یک چندجمله‌ای تک متغیره بر حسب t بگیرید. درجه آن حداکثر $d \leq q - 1$ است اما روی همه q نقطه روی F ناپدید است. پس نتیجه می‌گیریم که $p(w + tv)$ یک چندجمله‌ای صفر بر حسب متغیر t است. با توجه به مطالب بالا دقت کنید که t^d در $p(w + tv)$ دقیقاً

- [2] F. CUNNINGHAM, JR. *The Kakeya problem for simply connected and for starshaped sets*, *Amer. Math. Monthly*
- [3] Z. DVIR *On the size of Kakeya sets in finite fields*, *J. Amer. Math. Soc.*
- [4] J. PAL *Über ein elementares Variationsproblem*, *Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab. Mathematisk-fysiske Meddelelser*
- [5] T. TAO *From rotating needles to stability of waves: emerging connections between combinatorics, analysis, and PDE*, *Notices Amer. Math. Soc.*
- [6] T. WOLFF *Recent work connected with the Kakeya problem*, in: "Prospects in Mathematics (Princeton, NJ 1996)" (H. Rossi, ed.), *Amer. Math. Soc., Providence RI 1998*
- [7] T. WOLFF: *On some variants of the Kakeya problem*, *Pacific J. Math.*

برابر با $p_d(v)$ است که باید صفر باشد. اما $v \in F^n / \{0\}$ به طور دلخواه انتخاب شده بود و $p_d(0) = 0$ و $d > 0$. نتیجه می‌گیریم که $p_d(x)$ روی کل F^n ناپدید است. پس داریم:

$$dq^{n-1} < (q-1)q^{n-1} < q^n$$

پس بنا بر لم ۱ که به ما می‌گوید چندجمله‌ای $p_d(x)$ باید چندجمله‌ای صفر باشد، به تناقض بر می‌خوریم و حکم قضیه ثابت می‌شود. \square

همانطور که اغلب در ریاضیات اتفاق می‌افتد موفقیت‌های به دست آمده به سرعت بهبود پیدا می‌کنند. به عنوان مثال در این جا کران پایین $\frac{1}{n!}$ که برای مقدار ثابت $c(n)$ عنوان شده بود به $\frac{1}{q^n}$ بهبود پیدا کرد و این مقدار بر حسب توانی از ۲ به بهترین شکل ممکن کراندار شده است، یعنی یک مجموعه کاکیا با تعداد اعضای حدودی $\frac{1}{q^{n-1}}|F|^n$ وجود دارد.

برای اطلاعات بیشتر و به روزتر می‌توانید به وبگاه ترنس تائو^۱ مراجعه کنید که منبع جدیدتری دارد.

References

- [1] A. S. BESICOVITCH *On Kakeya's problem and a similar one*, *Math. Zeitschrift*

^۱<http://terrytao.wordpress.com/tag/kakeya-conjecture/>

سوالات

علی چراغی و مجتبی عبدالملکی

سوال ۱. تمام جواب‌های صحیح معادله دیوفانتی $x^3 + 2y^3 = 1$ را پیدا کنید.^۱

راه حل ۱.۱ (مقدماتی). جواب‌های $x^3 + 1 = 2y^3$ را پیدا می‌کنیم. (جواب‌های معادله اصلی با $(-x, y) \rightarrow (x, y)$ داده می‌شوند).

ابتدا فرض می‌کنیم $x \neq 1$ و $x \neq 0$ و $y \neq 0$ باید فرد باشد و پس اعداد $x+1$ و $x-1$ زوج هستند و $u = \frac{x+1}{2}$ و $v = \frac{x-1}{2}$ اعداد صحیح نسبت به هم اول هستند. پس

$$(u+v)^3 + (u-v)^3 = 1 + x^3 = 2y^3 \Leftrightarrow u(u^2 + 3v^2) = y^3$$

حال از آنجایی که $x \neq 1$ و $y \neq 0$ پس داریم $u, v, y \neq 0$.

حالت اول. فرض می‌کنیم $(u, 3) = 1$. در این صورت داریم

$$1 = (u, u^2 + 3v^2) = 1$$

$$u = n^3, \quad u^2 + 3v^2 = m^3$$

$$\text{پس } 3v^2 = m^3 - n^6 \text{ و پس}$$

$$3v^2 = (m - n^2)((m - n^2)^2 + 3mn^2)$$

قرار دهید $t = m - n^2$. پس از آنجایی که $(n, m) = 1$ ، پس

$$1 = (t, n) \text{ و از بالا داریم که}$$

$$t(t^2 + 3tn^2 + 3n^4) = 3v^2$$

$$\text{پس } 3|t \text{ و مثلا } t = 3t_1 \text{ و پس}$$

$$t_1(9t_1^2 + 9t_1n^2 + 3n^4) = v^2$$

پس $3|v$ و مثلا $v = 3v_1$ و از آنجایی که $(n, 3) = 1$

$$(9t_1^2 + 9t_1n^2 + 3n^4, 9) = 3$$

پس از v^2 بدست می‌آوریم: $t_1 = 3t_2$. پس از بالا

$$t_2(27t_2^2 + 9t_2n^2 + n^4) = v_1^2$$

همچنین

$$(t_2, 27t_2^2 + 9t_2n^2 + n^4) = 1$$

پس $a, b \in \mathbb{Z}$ هستند که

$$27a^4 + 9a^2n^2 + n^4 = b^2$$

همچنین از آنجا که فرض کرده‌ایم $x \neq 1$ و $y \neq 0$ ، داریم که b و $|n|$ اعداد طبیعی هستند. پس جواب‌هایی طبیعی از معادله دیوفانتی زیر را پیدا کرده‌ایم:

$$x^4 + 9x^2y^2 + 27y^4 = z^2 \quad (1)$$

(بعد از بررسی حالت دوم ثابت می‌کنیم این معادله جواب طبیعی ندارد)

حالت دوم. فرض کنید $3|u$. از آنجایی که $(u, v) = 1$ ، پس

$(v, 3) = 1$ و $u = 3u_1$ پس از آنجایی که $u(u^2 + 3v^2) = y^3$ پس

$$y = 3y_1$$

$$u_1(3u_1^2 + v^2) = 3y_1^3$$

^۱ ما سه راه حل برای این مسئله ارائه می‌دهیم که یکی مقدماتی، دومی با استفاده از نظریه جبری اعداد و سومی با استفاده از هندسه حسابی است.

زوج باشد و $(x, 3) = 1$ و $(x, z) = 1$. حال قرار دهید $y = 2y_1$ ، پس معادله (۱) را به شکل زیر می‌توان نوشت:

$$27y_1^4 = \left(\frac{z+x^2}{2} + 9y_1^2\right)\left(\frac{z-x^2}{2} - 9y_1^2\right)$$

حال فرض کنید d ب.م.م. دو عبارت سمت راست باشد. در این صورت:

$$d^2 | 27y_1^4 \Rightarrow d | 9y_1^2 \Rightarrow d | (x^2, z) = 1 \Rightarrow d = 1$$

و پس یا

$$\frac{z+x^2}{2} + 9y_1^2 = 27a^4, \quad \frac{z-x^2}{2} - 9y_1^2 = b^4, \quad y_1 = ab \quad (2)$$

یا

$$\frac{z+x^2}{2} + 9y_1^2 = a^4, \quad \frac{z-x^2}{2} - 9y_1^2 = 27b^4, \quad y_1 = ab \quad (3)$$

(۲) نتیجه می‌دهد

$$x^2 + 18a^2b^2 = 27a^4 - b^4 \Rightarrow 3|b^4 + 1$$

که غیرممکن است. حال (۳) نتیجه می‌دهد که

$$x^2 + 18a^2b^2 = a^4 - 27b^4 \quad (4)$$

که نتیجه می‌دهد a یا b زوج است. اگر a زوج باشد $a^4 = 4^k$

$$27b^4 = \left(\frac{a^2+x}{2} - \frac{9}{2}b^2\right)\left(\frac{a^2-x}{2} - \frac{9}{2}b^2\right)$$

مانند قبل می‌توان نتیجه گرفت که دو عبارت سمت راست نسبت به هم اول هستند. حال اگر علامت هر دو عبارت سمت راست منفی باشد، داریم $a^2 < 9b^2$ که تناقض با (۴) است. پس هر دو مثبت هستند و $m, n \in \mathbb{Z}$ وجود دارند که:

$$\frac{a^2 \pm x}{2} - \frac{9}{2}b^2 = m^2, \quad \frac{a^2 \mp x}{2} - \frac{9}{2}b^2 = 27n^4, \quad b = mn$$

پس

$$a^2 = m^2 + 9m^2n^2 + 27n^4$$

پس از $(v, 3) = 1$ نتیجه می‌گیریم که $3|u_1$. پس $u_1 = 3u_2$ و

$$u_2(27u_2^2 + v^2) = y_1^2$$

اما $(u_2, v) = 1$ و پس

$$(u_2, 27u_2^2 + v^2) = 1$$

پس $a, b \in \mathbb{Z}$ نسبت به هم اول هستند که

$$u_2 = a^2, \quad 27u_2^2 + v^2 = b^2$$

همچنین $(b, 3) = 1$. پس داریم

$$27a^6 + v^2 = b^2$$

قرار می‌دهیم $t = b - 3a^2$. پس داریم $(t, 3) = 1$ و همچنین

$$t(t^2 + 9a^2t + 27a^4) = v^2$$

ولی چون $(a, b) = 1$ ، پس $(a, t) = 1$ و از $(t, 3) = 1$ بدست می‌آوریم که

$$(t, t^2 + 9a^2t + 27a^4) = 1$$

پس $a_1, b_1 \in \mathbb{Z}$ هستند که

$$t = a_1^2, \quad t^2 + 9a^2t + 27a^4 = b_1^2$$

و پس

$$a_1^4 + 9a^2a_1^2 + 27a^4 = b_1^2$$

همچنین a_1 یا a نمی‌توانند صفر باشند به دلیل فرض $x \neq 1$ و $y \neq 0$. پس دوباره بدست می‌آوریم که $z^2 = x^4 + 9x^2y^2 + 27y^4$ جواب طبیعی دارد.

قبل این که ثابت کنیم این معادله جواب طبیعی ندارد، واضح است که حالت $x = 1$ یا $y = 0$ جواب‌های $(-1, 1)$ و $(1, 0)$ از معادله اصلی را می‌دهند.

اثبات حل ناپذیری (۱): فرض کنید (x, y, z) یک جواب طبیعی با کوچکترین z باشد. در این صورت به وضوح باید داشته باشیم $(x, y, z) = 1$ همچنین با یک بررسی ساده، باید x فرد و y

که

$$a \leq y_1 < y < z$$

که با فرض مینیمم بودن z در تناقض است. پس معادله‌ی (۱) جواب طبیعی ندارد.

راه حل ۲.۱ (نظریه جبری اعداد). داریم $N_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}}(x + \sqrt{2}y) = x^3 + 2y^3 = 1$ پس $x + \sqrt{2}y$ باید در $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ یک‌ه‌^۲ باشد. حال از آنجایی که $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ دو نشانند^۳ مختلط دارد و یک نشانند حقیقی دارد، پس طبق قضیه یک‌ه‌^۴ دیریکله^۴، رتبه^۵ گروه یک‌ه‌ها ۱ است. پس

$$U(\mathbb{Q}(\sqrt{2})) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

(چون تنها ریشه‌های واحد موجود در آن ± 1 هستند). همچنین می‌توان به سادگی دید که $1 - \sqrt{2}$ یک یک‌ه اساسی^۶ است و پس هر یک‌ه‌ای به شکل $\pm(1 - \sqrt{2})^n$ است. پس باید داشته باشیم $x + y\sqrt{2} = \pm(1 - \sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2} + c_n\sqrt{4}$ اگر

$$\pm(\sqrt{2} - 1)^n = a_n + b_n\sqrt{2} + c_n\sqrt{4}$$

آنگاه $c_n \neq 0$ برای n صحیح به جز ۱،^۷ و پس تنها جواب‌ها در بین $\pm(1 - \sqrt{2})$ و $\pm(\sqrt{2} - 1)$ هستند که با چک کردن نرم این‌ها، تنها دو جواب $(-1, 1)$ و $(1, 0)$ را بدست می‌آوریم.

راه حل ۳.۱ (هندسه حسابی^۷). با یک تغییر متغیر تعریف شده روی اعداد گویا، می‌توان این معادله را به خم بیضوی

$$E: y^2 = x^3 - 27$$

تبدیل کرد و سپس می‌توان با نرم افزار *PARI/GP* (یا روش‌های الگوریتمی دیگر) بدست آورد که $E(\mathbb{Q}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. پس E تنها دو جواب گویا دارد که به همان دو جواب صحیح $(1, 0)$ و $(-1, 1)$ از معادله اصلی تناظر داده می‌شوند.

سوال ۲. فرض کنید G یک گروه حل پذیر متناهی از مرتبه n باشد. ثابت کنید تابع دوسویی (نه لزوما همومورفیسم) $f: G \rightarrow C_n$ وجود دارد به طوری که $o(f(g)) | o(g)$ (گروه دوری مرتبه n و $o(g)$ مرتبه‌ی عنصر g است).

حس ۱.۲. این خاصیت برای همه گروه‌های متناهی G درست است.

راه حل ۱.۲. اولاً یک گروه ساده‌ی حل پذیر لزوماً باید آبلی باشد (چون $\{1\} = G'$) و پس باید $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ باشد برای p اولی و سوال برای آن واضح می‌شود. حال استقرا روی مرتبه‌ی G می‌زنیم. برای $n = 1$ واضح است. حال فرض کنید برای گروه‌های حل پذیر از مرتبه‌ی کمتر از n درست باشد. از بالا می‌توانیم فرض کنیم گروه G ساده نیست و N زیرگروه نرمال مینیمال نابديهی ای از آن باشد. در این صورت می‌دانیم که این زیرگروه نرمال به شکل $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ است برای p اولی (مثلاً قضیه ۳، ۳، ۱۵ از کتاب رابینسون^۸)

G/N حل پذیر و متناهی با مرتبه‌ی کم‌تر از n است پس می‌توان تابع $\sigma: G/N \rightarrow C_{|G/N|}$ را پیدا کرد به طوری که $o(\sigma(\bar{g})) | o(\bar{g})$. با استفاده از σ می‌خواهیم تابع دوسویی موردنظر را بسازیم. داریم $C_{|G/N|} \cong C_{|G/N|}$ پس می‌توان تابع σ را بشکل $\sigma: G/N \rightarrow C_{|G/N|}$ در نظر گرفت.

حال فرض کنید $g \in G$ عنصری دلخواه باشد بطوری که $f_{gN}: gN \rightarrow C_{|G/N|}$ می‌خواهیم تابعی دوسویی $\sigma(\bar{g}) = \bar{c} \in C_{|G/N|}$ را تعریف کنیم. ابتدا مرتبه‌ی اعضای دو زیرمجموعه‌ی gN و $C_{|G/N|}$ را بررسی می‌کنیم.

از آنجا که مرتبه‌ی هر عضو N ، ۱ یا p است، پس برای هر $n \in N$ ، $o(gn) | o(\bar{g})$ و پس یا $o(gn) = o(\bar{g})$ یا $o(gn) = po(\bar{g})$

^۱unit^۲embedding^۳Dirichlet's unit theorem^۴rank^۵fundamental unit^۶Arithmetic Geometry^۷Robinson, D. J. S., A Course in the Theory of Groups

در این صورت $g(n')^{-1}$ را به عضو یکتای $cC_{|N|}$ از مرتبه‌ی $o(\bar{c})$ تصویر می‌کنیم و بقیه را به شکل دلخواه (به طوری که f_{gN} دوسویی شود) به $cC_{|N|}$ تصویر می‌کنیم.

در این صورت تابع $f : G \rightarrow C_{|G|}$ را به صورتی تعریف می‌کنیم که $f|_{gN} = f_{gN}$ (برای g های در یک مجموعه از نماینده‌های G/N) پس کار تمام است.

سوال ۳. فرض کنید G گروهی آبدلی باشد. ثابت کنید توسیع گالوای K/\mathbb{Q} وجود دارد به طوری که $G \cong \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$

حدس ۱.۳. (مسئله وارون گالوا^۹) این خاصیت برای هر گروه متناهی G درست است.

این حدس توسط شفرویچ^{۱۰} برای گروه‌های حل پذیر متناهی ثابت شده است.

راه حل ۱.۳. فرض کنید ζ_n یک ریشه‌ی n ام واحد اولیه باشد. اولاً $\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q})$ در واقع اگر $\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q})$ آنگاه σ باید ζ_n را به یک ریشه‌ی n ام واحد ببرد زیرا

$$\sigma(\zeta_n)^n = \sigma(\zeta_n^n) = \sigma(1) = 1$$

پس مثلاً $\zeta_n^i \mapsto \zeta_n^{\sigma(i)}$ که $\gcd(i, n) = 1$ (چون باید وارون پذیر باشد). اگر عمل σ روی ζ_n معلوم باشد آنگاه روی $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ مشخص می‌شود. پس همه‌ی اتومورفیسم‌ها به شکل بالا هستند که پس ایزومورفیسم بالا بدست می‌آید.

حال طبق قضیه اساسی نظریه گروه‌های آبدلی متناهی تولید:

$$G \cong C_{n_1} \times C_{n_2} \cdots \times C_{n_k}$$

که C_n گروه دوری مرتبه n است و $n_1 | n_2 | \cdots | n_k$.

حال طبق قضیه دیریکله برای تصاعدهای حسابی، اعداد اول p_i ($1 \leq i \leq k$) وجود دارند که $p_i \equiv 1 \pmod{n_i}$. حال قرار دهید $n = p_1 p_2 \cdots p_k$

برای $cC_{|N|}$ دو حالت داریم:

حالت اول. $p | o(\bar{c})$ که در این صورت به سادگی مشاهده می‌شود که مرتبه‌ی هر عنصر $cC_{|N|}$ باید $o(\bar{c}) | N$ باشد.

در واقع اگر $C_{|N|} = \langle x \rangle$ و مرتبه‌ی عنصری از $cC_{|N|}$ مثل cx^k ، $o(\bar{c}) | N$ نباشد، باید برای $k' \in \mathbb{Z}$ داشته باشیم: در این‌جا

$$\begin{aligned} (cx^k)^{o(\bar{c})} &= x^{pk'} \\ \Rightarrow ((cx^k)^{\frac{o(\bar{c})}{p}} x^{-k'})^p &= 1 \\ \Rightarrow (cx^k)^{\frac{o(\bar{c})}{p}} x^{-k'} &\in N \\ \Rightarrow (c)^{\frac{o(\bar{c})}{p}} &\in N \end{aligned}$$

که متناقض با تعریف $o(\bar{c})$ است. پس در این حالت می‌توان هر عنصر $gn \in gN$ را به هر عنصر دلخواهی از $cC_{|N|}$ تصویر کرد و داریم

$$o(gn) | o(f_{gN}(gn))$$

حالت دوم. $p \nmid o(\bar{c})$ که در این صورت مرتبه‌ی هر عنصر $cC_{|N|}$ به شکل $o(\bar{c})p^r$ است که $p^r | |N|$ و مرتبه‌ی دقیقاً یک عنصر از $cC_{|N|}$ ، $o(\bar{c})$ است. در واقع $a^{o(\bar{c})} \in C_{|N|}$ برای هر $a \in cC_{|N|}$ و همگی این‌ها به عناصر متفاوتی از $C_{|N|}$ نگاشته می‌شوند، چون اگر $a \neq b$ عناصری از $cC_{|N|}$ باشند و $a^{o(\bar{c})} = b^{o(\bar{c})}$ ، آنگاه $(ab^{-1})^{o(\bar{c})} = 1$ ولی $ab^{-1} \in C_{|N|}$ پس باید $p | o(ab^{-1}) | o(\bar{c})$ که متناقض با فرض است. پس $a^{o(\bar{c})}$ به عناصر متفاوتی نگاشته شده و پس دقیقاً یک عنصر از مرتبه‌ی $o(\bar{c})$ در $cC_{|N|}$ وجود دارد. در این حالت داریم $o(\bar{c}) | o(\bar{g})$ و پس $p \nmid o(\bar{g})$. حال ثابت می‌کنیم عنصر $gn \in gN$ وجود دارد به طوری که $p \nmid o(gn)$. در واقع اگر $o(g) = n \in N$ که کار تمام است، در غیر این صورت $o(g) = n \in N$ و چون $|N| = p^k$ برای k ای، پس عضو $n' \in N$ وجود دارد که $(n')^{o(\bar{g})} = n$ پس:

$$g^{o(\bar{g})} = (n')^{o(\bar{g})} \Rightarrow (g(n')^{-1})^{o(\bar{g})} = 1$$

و پس عنصر $g(n')^{-1}$ خاصیت مورد نظر را دارد.

$$(p \nmid o(g(n')^{-1}) = o(\bar{g}))$$

^۹Inverse Galois Problem

^{۱۰}I. Shafarevich

در این صورت

$$\begin{aligned} Gal(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}) \\ \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \\ \cong \mathbb{Z}/(p_1-1)\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/(p_2-1)\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/(p_k-1)\mathbb{Z} \end{aligned}$$

پس از آنجا که $n_i | p_i - 1$ ، پس یک زیرگروه H_i از $\mathbb{Z}/(p_i - 1)\mathbb{Z}$ وجود دارد که:

$$\frac{\mathbb{Z}/(p_i - 1)\mathbb{Z}}{H_i} \cong \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$$

پس

$$\frac{(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*}{H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_k} \cong G$$

همچنین شناخته شده است که $\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}$ گالوا است (می‌توانید به سادگی این موضوع را چک کنید) پس از آنجایی که $H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_k$ در $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ نرمال است، توسیع گالوای K/\mathbb{Q} وجود دارد که $Gal(K/\mathbb{Q}) \cong G$.

سوال ۴. گراف K_n که روی هر رأس آن یک عدد حقیقی و روی هر یال آن یک لیست سه تایی از اعداد حقیقی مختلف قرار داده شده، به ما داده شده است (لیست قرار داده شده بر روی یال‌های مختلف می‌تواند یکسان یا متفاوت باشد). ثابت کنید که می‌توان از لیست هر کدام از یال‌ها یک عدد را انتخاب کرد که در نهایت رنگ هر دو رأس مجاور فرق کند. اگر w_v عدد روی رأس v و l_{uv} عدد انتخاب شده برای یال uv باشد آن‌گاه رنگ رأس v برابر است با:

$$\text{color}(v) = W_v + \sum_{u \in N(v)} l_{uv}$$

راه حل ۱.۴. با استقرا روی تعداد رئوس از n به $n+2$ حکم را ثابت می‌کنیم:

برای $n=1, n=4$ حکم را خودتان ثابت کنید (:

فرض کنید حکم برای n برقرار است حکم را برای $n+2$ ثابت می‌کنیم:

هر حالت انتخاب اعداد روی رئوس را یک رنگ آمیزی می‌نامیم و در هر رنگ آمیزی به ازای هر دو تایی مرتب از رئوس مانند u و v مقدار $f(u, v)$ را برابر با $\text{color}(u) - \text{color}(v)$ تعریف می‌کنیم، حال به

ازای تمام رنگ آمیزی‌های ممکن مقدار ماکسیمم برای $f(u, v)$ را در نظر بگیرید و یکی از رنگ آمیزی‌های متناظر با این مقدار ماکسیمم و دو رأس متناظر u و v را در نظر بگیرید (بدیهی است در این حالت از تمام یال‌های متصل به u به جز یال uv مقدار ماکسیممشان از لیست سه تایی و از تمام یال‌های متصل به v به جز uv مقدار مینیممشان از لیست سه تایی روی این یال‌ها انتخاب شده‌اند، در ضمن مقدار انتخاب شده از روی یال uv بر مقدار $f(u, v)$ تاثیری ندارد.)

حال دو رأس u, v را در نظر گرفته و از تمام یال‌های متصل به u به جز یال uv مقدار ماکسیممشان از لیست سه تایی و از تمام یال‌های متصل به v به جز uv مقدار مینیممشان از لیست سه تایی روی این یال‌ها انتخاب می‌کنیم و از یال uv مقدار وسطی از سه مقدار حقیقی روی uv را انتخاب می‌کنیم، اگر به ازای هر رأس u و v مانند S اعداد روی یال‌های متصل بین u و v و s را به برچسب روی s اضافه کنیم، با توجه به فرض استقرا داریم حکم برای $n-2$ رأس دیگر به جز u, v با اعداد جدید روی برچسب هایشان برقرار است بنابراین یک انتخاب برای اعداد روی یال هایشان داریم به طوری که رنگ تمام رئوس به جز u و v با هم متمایز شوند و کافی است در این حالت کافی است ثابت کنیم رنگ u و v از سایر رئوس متمایز است. (بدیهی است رنگ u و v به ازای $n > 0$ از هم متمایزند.)

بنا بر تقارن فرض کنید رنگ یک رأس مانند t با عدد u یکی باشد داریم در این رنگ آمیزی $f(u, v) = f(s, v)$ از طرفی اگر در همین رنگ آمیزی از برچسب روی uv عدد مینیمم را انتخاب کنیم آنگاه $f(s, v) > f(u, v)$ که متناقض با فرض بیشینه بودن $f(u, v)$ است به طرز مشابه در این رنگ آمیزی رنگ هیچ رأسی با رنگ v هم یکی نیست.

سوال ۵. گراف دو بخشی $G = (X, Y)$ که روی هر رأس آن یک لیست دو تایی از اعداد طبیعی متمایز و روی هر یال آن مجموعه‌ی $\{1, 2\}$ قرار داده شده، به ما داده شده است. ثابت کنید که می‌توان از لیست هر کدام از یال‌ها یک عدد و از لیست هر کدام از رأس‌ها نیز یک عدد را انتخاب کرد که در نهایت رنگ هر دو رأس مجاور فرق کند. اگر W_v عدد انتخاب شده برای رأس v و l_{uv} عدد انتخاب

شده برای یال uv باشد آن‌گاه رنگ رأس v برابر است با:

$$\text{color}(v) = W_v + \sum_{u \in N(v)} l_{uv}$$

راه حل ۱.۵. حکم را برای یک گراف همبند ثابت می‌کنیم:

مجموع اعداد انتخاب شده روی هر رأس و یال‌های مجاور آن را عدد متناظر با آن رأس در نظر بگیرید. در ادامه ابتدا الگوریتمی را برای به دست آوردن ترتیبی از انتخاب اعداد لیست‌ها ارائه می‌دهیم، سپس ثابت می‌کنیم با انجام الگوریتم حکم مسئله اثبات می‌شود و در انتها ثابت می‌کنیم تعداد مراحل الگوریتم متناهی است.

در ابتدا از هر یک از برجسب‌ها بزرگترین را انتخاب می‌کنیم، یکی از رئوسی را که عدد متناظر با آن در بین عدد متناظر با سایر رئوس بیشینه است را در نظر بگیرید و فرض کنید در بخش اول گراف دو بخشی قرار دارد، همچنین M را برابر با عدد متناظر با آن قرار دهید.

حال در مرحله i ام ($i \leq M$) اعمال زیر را انجام می‌دهیم:

اگر $1 \leq m \leq 2$ ، $i \equiv m$ باشد تمامی رئوسی از گراف را که در بخش m ام قرار دارند و عدد متناظر آن‌ها در این مرحله (پس از اعمال تغییرات مرحله قبل در صورت وجود) برابر با $M - i + 1$ است را در مجموعه A_i و همچنین تمام رئوسی از بخش دیگر را که بین آن‌ها و مجموعه A_i حداقل یک یال وجود دارد و نیز عدد متناظر آن‌ها برابر با $M - i + 1$ است را در بخش B_i قرار می‌دهیم. سپس تمامی رئوسی را که عضو مجموعه B_i هستند و نیز حداقل یک یال به رأسی با عدد متناظر کمتر از $M - i + 1$ در این مرحله دارند را در مجموعه C_i و سایر رئوس B_i را در D_i قرار می‌دهیم و اعضای مجموعه D_i را نقره‌ای می‌کنیم.

سپس اعداد انتخاب شده از لیست روی تمام رئوس D_i را به مقدار مینیمم از دو عدد لیستش تغییر می‌دهیم، همچنین از هر یک از رئوس مجموعه C_i یک یال که به رأسی با عدد متناظر کمتر از عدد متناظر این رأس متصل است را انتخاب کرده و عدد روی آن یال را از یک به صفر تغییر می‌دهیم (به ازای هر i امکان دارد تعدادی از مجموعه‌های A_i, B_i, C_i, D_i تهی باشند که اشکالی در الگوریتم به وجود نمی‌آورند).

حال ثابت می‌کنیم پس از انجام الگوریتم فوق عدد متناظر هر رأس

با عدد متناظر تمامی رئوس مجاورش متفاوت است.

با توجه به همبندی گراف با اندکی تأمل می‌توان دریافت که هر رأس U یا به ازای یک i در مجموعه A_i آمده‌است یا به ازای یک i در مجموعه D_i قرار گرفته است حال برای هر دو حالت حکم را ثابت می‌کنیم:

۱- رأس U به ازای یک i در مجموعه D_i قرار گرفته باشد: تمامی یال‌های خارج شده از رأس U به رئوس با عدد متناظر بزرگتر متصل هستند زیرا در مرحله i ام رأس U یالی به رأسی با عدد کمتر از $M - i + 1$ ندارد و از طرفی بعد از انجام عمل این مرحله عدد روی این رأس از $M - i + 1$ کمتر خواهد شد.

۲- رأس U به ازای یک i در مجموعه A_i قرار گرفته باشد: پس از مرحله i ام عدد متناظر رأس U تغییر نمی‌کند و همان $M - i + 1$ خواهد ماند از طرفی تمام مجاورهای رأس U یا یک رأس نقره‌ای هستند که بنا بر ۱ نمی‌توانند با عدد متناظرشان با عدد متناظر رأس U برابر شود یا عضو یک A_j هستند که j باید زوجیتش با i متفاوت باشد و عدد متناظرشان برابر است با $M - i + 1$ که این هم با عدد متناظر رأس U متفاوت است.

در ضمن از آنجا که M عددی متناهی است تعداد مراحل متناهی است.

اگر گراف ناهمبند بود ما حکم را برای هر مولفه همبندی ثابت کرده‌ایم و بنابراین برای گراف کلی نیز حکم را ثابت کرده این زیرا دو مولفه همبندی مجزا رأس مجاور ندارند.

سوال ۶. فرض کنید که $A \in M_n(\mathbb{C})$ و داشته باشیم: $Tr(A) = Tr(A^2) = \dots = Tr(A^n) = 0$ آیا می‌توان نتیجه گرفت که A پوچ توان است؟

راه حل ۱.۶. اگر ویژه مقادیرهای ماتریس A را با $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ نمایش دهیم، آنگاه ویژه مقادیر ماتریس A^k برابر $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k$ است. بنابراین از فرض مسئله می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\lambda_1^k + \lambda_2^k + \dots + \lambda_n^k = 0$$

حال با استفاده از اتحادهای نیوتن هر تابع متقارن بر حسب $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ را می‌توانیم بر حسب $\lambda_1^i + \lambda_2^i + \dots + \lambda_n^i$ برای $i = 1, 2, \dots, n$ حساب

سوال ۸. فرض کنید F یک مجموعه متناهی از رشته‌های دودویی با طول متناهی باشد به طوری که هیچ رشته‌ای از این مجموعه پیشوند رشته‌ی دیگری در دنباله نیست، حال N_i را تعداد رشته‌های با طول i در این دنباله در نظر بگیرید، ثابت کنید:

$$\sum_i \frac{N_i}{2^i} \leq 1$$

راه حل ۱۰۸. فرض کنید a_1, a_2, \dots, a_m رشته‌های ما باشند و $L(a_i)$ را برابر با طول رشته a_i تعریف می‌کنیم می‌دانیم یک m به اندازه کافی بزرگ وجود دارد که از طول تمام رشته‌ها بزرگ‌تر باشد حال از تمام رشته‌های به طول m یکی را با احتمال برابر انتخاب می‌کنیم.

$P(A_i)$ را برابر با احتمال این پیشامد تعریف می‌کنیم که یک دنباله دودویی با رشته a_i شروع شود.

$$P(a_i) = \frac{1}{2^{L(a_i)}}$$

از طرفی داریم: $P(a_i \cap a_j) = 0$ زیرا اگر دنباله‌ای با a_i شروع شود دیگر نمی‌تواند با a_j شروع شود. حال داریم:

$$P(\cup a_i) \leq 1$$

$$P(a_i \cap a_j) = \emptyset \Rightarrow P(\cup_i a_i) = \sum_i P(a_i)$$

$$= \sum_i \frac{N_i}{2^i} \Rightarrow \sum_i \frac{N_i}{2^i} \leq 1$$

سوال ۹. فرض کنید F یک مجموعه متناهی از رشته‌های دودویی با طول متناهی باشد به طوری که هیچ رشته‌ای را نمی‌توان به دو صورت متفاوت با اعضای F به زیر رشته‌ها افزاز کرد، حال N_i را تعداد رشته‌های با طول i در این دنباله در نظر بگیرید، ثابت کنید:

$$\sum_i \frac{N_i}{2^i} \leq 1$$

راه حل ۱۰۹. X را مجموعه تمام a_i ها در نظر می‌گیریم داریم:

$1, 2, \dots, n$ بنویسیم، بنابراین تمام ضرایب چند جمله‌ای مشخصه ماتریس A (به جز ضریب جمله با بزرگترین درجه) باید صفر باشند، بنابراین A پوچ توان است.

سوال ۷. فرض کنید $(A_i, B_i), 1 \leq i \leq h$ یک خانواده از زوج مرتب‌ها از مجموعه‌هایی از اعداد صحیح باشند به طوری که $(A_i \cap B_j) \cup (A_j \cap B_i) \neq \emptyset$ و $\forall i, |A_i| = k, |B_i| = l, A_i \cap B_i = \emptyset$ آنگاه ثابت کنید:

$$h \leq \frac{(k+l)^{k+l}}{k^k l^l}$$

راه حل ۱۰۷. مجموعه M را به صورت مقابل تعریف می‌کنیم:

$$M = \{\forall x | \exists i, x \in A_i \vee x \in B_i\}$$

حال هر یک از اعضای M را به احتمال $\frac{k}{k+l}$ آبی و به احتمال $\frac{l}{k+l}$ قرمز می‌کنیم.

K_i را برابر یا این پیشامد تعریف می‌کنیم که تمام اعضای A_i آبی و تمام اعضای B_i به رنگ قرمز باشند.

$$P(K_i \cap K_j) = 0$$

زیرا اگر قرار باشد $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ آنگاه A_i و B_j باید یک عضو مشترک و هم‌رنگ داشته باشند و اگر $B_i \cap A_j \neq \emptyset$ آنگاه B_i و A_j باید یک عضو مشترک و هم‌رنگ داشته باشند.

$$P(K_i) = \left(\frac{k}{k+l}\right)^k \times \left(\frac{l}{k+l}\right)^l$$

$$p(\cup K_i) \leq 1$$

$$P(K_i \cap K_j) = 0 \Rightarrow P(\cup K_i) = \sum P(K_i)$$

$$\sum P(K_i) = h \times P(K_1) = h \times \left(\left(\frac{k}{k+l}\right)^k \times \left(\frac{l}{k+l}\right)^l \right)$$

$$= p(\cup K_i) \leq 1 \Rightarrow h \leq \frac{(k+l)^{k+l}}{k^k \times l^l}$$

که مجموعه $\{ax \pmod{p}, x \in X\}$ با هر بازه به طول حداقل $\frac{p}{K}$ اشتراک ناتهی دارد.

راه حل ۱۰.۱۰. ابتدا مجموعه‌های A_i را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A_i = \left\{ \frac{(i-1)p}{\nu k} + 1, \dots, \frac{ip}{\nu k} \right\}$$

بدیهی است که اگر a, b وجود داشته باشند به طوری که مجموعه: $aX + b = \{ax + b; x \in X\}$ هر یک از A_i ها را حکم اشتراک ناتهی دارد سوال ثابت شده است. حال a, b را به صورت تصادفی و با احتمال برابر از مجموعه $\{0, 1, \dots, p-1\}$ انتخاب می‌کنیم. و متغیر تصادفی Y_i را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Y_i = |\{aX + b\} \cap A_i|$$

همچنین متغیر تصادفی $Y(i, j)$ را به ازای $1 \leq j \leq \frac{p}{\nu k}$ به این صورت است که اگر $i-1 + j \in aX + b$ آنگاه $Y(i, j) = 1$ در غیر صورت $Y(i, j) = 0$ آنگاه داریم:

$$E[Y_{(i,j)}] = \frac{\nu k^\nu}{p}, \text{VAR}[Y_{(i,j)}] \leq E[Y_{(i,j)}] = \frac{\nu k^\nu}{p}$$

همچنین: $Y_i = \sum_{j=1}^{\frac{p}{\nu k}} Y_{(i,j)}$ به همین ترتیب:

$$E[Y_i] = \sum_{j=1}^{\frac{p}{\nu k}} E[Y_{(i,j)}],$$

$$\text{VAR}[Y_i] \leq \sum_{j=1}^{\frac{p}{\nu k}} \text{VAR}[Y_{(i,j)}] + \sum \text{COV}[Y_{(i,j)}Y_{(i,l)}]$$

$$\text{COV}[Y_{(i,j)}Y_{(i,l)}] = E[Y_{(i,j)}Y_{(i,l)}] - E[Y_{(i,j)}]E[Y_{(i,l)}] = E[Y_{(i,j)}Y_{(i,l)}] - \frac{(\nu k^\nu)^2}{p^2}$$

برای محاسبه $E[Y_{(i,j)}Y_{(i,l)}]$ تعداد حالاتی که هر دو $Y_{(i,j)}, Y_{(i,l)}$ مخالف صفر هستند را بر کل حالات a, b تقسیم می‌کنیم از طرفی برای هر m, n متمایز داریم تعداد جواب‌های $aX_m + b = aX_n + b = \left(\frac{(i-1)p}{\nu k} + l\right)$ و $\left(\frac{(i-1)p}{\nu k} + j\right)$ دقیقاً یکی است

$$\left(\sum_X \frac{1}{\nu L(a_i)}\right)^k = \left(\sum_X \frac{1}{\nu L(a_i)}\right) \left(\sum_X \frac{1}{\nu L(a_i)}\right) \cdots \left(\sum_X \frac{1}{\nu L(a_i)}\right)$$

حال x^k را مجموعه تمام رشته‌هایی که از کنار هم گذاشتن k کلمه پشت سر هم تشکیل می‌شود در نظر بگیرید، مجموع فوق را می‌توان به این صورت هم نوشت:

$$\sum_{X^k} \frac{1}{\nu L(b_i)}$$

که b_i ها همه کلماتی است که از به هم پیوستن k تا a_i به دست می‌آید

از طرفی از آنجا که هر رشته به طور یکتا قابل تجزیه است داریم مجموع فوق کمتر مساوی

$$\sum_{X^k} \frac{1}{\nu L(b_i)} \leq \sum_L n_L \frac{1}{\nu L}$$

است که در آن n_L برابر تمام رشته‌های k کلمه‌ای به طول L است و همچنین داریم:

$$n_L \leq \nu^L, L \leq K \times L_{max}$$

بنابراین داریم

$$\sum_{X^k} \frac{1}{\nu L(b_i)} \leq \sum_{K \times L_{max}} \left(\nu^L \times \frac{1}{\nu L}\right) = K \times L_{max}$$

بنابراین:

$$\left(\sum \frac{1}{\nu L(a_i)}\right)^k \leq K \times L_{max}$$

و به همین ترتیب داریم:

$$\sum \frac{1}{\nu L(a_i)} \leq (K \times L_{max})^{1/k}$$

که با میل دادن k به بینهایت سمت راست عبارت به وضوح به ۱ میل می‌کند و حکم ثابت شد.

سوال ۱۰. ثابت کنید برای هر مجموعه X متشکل از νk^ν عدد متمایز به پیمانه یک عدد اول p ، یک عدد a موجود است به طوری

بنابراین:

$$P(Y_i = 0) < p(|Y_i - 2k| \geq \sqrt{2k} \times \sqrt{2k}) \leq \frac{1}{2k}$$

از طرفی داریم:

$$p(\cup(Y_i = 0)) \leq \cup P(Y_i = 0) < (2k) \times \frac{1}{2k} = 1$$

بنابراین حالتی وجود دارد که هیچ یک از Y_j ها صفر نشوند.

$$E[Y_{(i,j)}Y_{(i,l)}] \leq \frac{(2k)^2}{p^2} < \left(\frac{2K^2}{P}\right)^2$$

$$\Rightarrow COV[Y_{(i,j)}Y_{(i,l)}] < 0$$

$$\Rightarrow VAR[Y_i] < \sum_{j=1}^{\frac{p}{2k}} VAR[Y_{(i,j)}] < \sum_{j=1}^{\frac{p}{2k}} E[Y_{(i,j)}]$$

بنابراین

$$E[Y_i] = 2k, VAR[Y_i] < 2k$$

معرفی کتاب: دوره‌ای مقدماتی در مورد خمینه‌های هموار

سامان حبیبی اصفهانی

ابعاد بالاتر را مسلم ساخت. در سال‌های ۱۸۳۰ تا ۱۸۴۰ تلاش‌های گسترده‌ای برای فهمیدن این هندسه صورت گرفت از جمله محاسبه حجم کره n -بعدی توسط ژاکوبی، با این حال هنوز زبان مناسبی برای مطالعه این ساختارها شکل نگرفته بود.

اولین تلاش‌ها برای یافتن مناسب توسط گراسمان (۱۸۴۴)، با ارائه برنامه‌ای صریح برای استوار ساختن هندسه n -بعدی بر یک پایه استوار انجام شد. سایر هندسه‌دانان نامی مثل کوشی، گاوس و ریمان نیز شروع به کشف و استفاده از هندسه n -بعدی کردند هر چند تلاش‌های (ریاضی) آن‌ها بیشتر به زیر فضاهای آفین محدود ماند. ریمان در سخنرانی معروف خود (۱۸۵۴) حداقل در سطحی فلسفی، مفهومی برای یک خمینه n -بعدی ارائه کرد. این سخنرانی را می‌توان نقطه شروعی برای تئوری خمینه‌ها دانست.

با گذشت سال‌ها فهم ریاضی‌دانان از خمینه‌ها بسیار تغییر کرده است. اما با این حال این رشته دارای یک پیچیدگی ذاتی است بطوریکه هنوز برخی از سوال‌های بسیار طبیعی بی پاسخ باقی مانده‌اند.

کتاب "دوره‌ای مقدماتی در مورد خمینه‌های هموار" که کتابی مناسب برای شروع مطالعه این رشته است را می‌توان به چهار بخش تقسیم کرد:

مطالعه نقطه‌وار، در این بخش ساختار جبر تانسوری فضاهای

به مناسبت چاپ شدن کتاب "دوره‌ای مقدماتی در مورد خمینه‌های هموار" نوشته سیاوش شهشهانی جالب دیدیم به مروری کوتاه بر تاریخچه این موضوع و به طور خاص به این کتاب بپردازیم. شاید این تصور که دنیای اطرافمان چیزی شبیه به \mathbb{R}^3 است، همانقدر ساده انگارانه باشد که بپنداریم زمینی که روی آن زندگی می‌کنیم موجودی شبیه به \mathbb{R}^2 است. در واقع شباهت کره زمین با صفحه یا شباهت کهکشان‌انطور که آن را می‌بینیم با \mathbb{R}^3 یک شباهت موضعی است، به این معنی که اگر فقط شعاع کمی از اطرافمان را ببینیم تفاوت چندانی با زمانی که روی یک صفحه تخت فرضی ایستاده‌ایم (یک روی یک نقطه در \mathbb{R}^3) نخواهیم یافت. این گونه موجودات که موضعا شبیه به یک فضای اقلیدسی n -بعدی هستند، را خمینه n -بعدی می‌نامیم، هرچند شاید به طور سرتاسری بسیار متفاوت با \mathbb{R}^n باشند، همانطور که کره بسیار با صفحه متفاوت است. این تنوع در ابعاد بالاتر به شدت افزایش یافته بطوریکه لیست کردن خمینه‌های n -بعدی برای $n > 3$ ممکن نیست. مطالعه این ساختارهای هندسی موضوع مورد مطالعه هندسه‌دانان است.

اولین گام‌ها به سمت فهم و تعمیم هندسه به ابعاد بالاتر و فضاهای غیر اقلیدسی در اوائل قرن ۱۹م رخ داد. با این که پیش از این لاگرانژ از بعد چهارم برای نمایش زمان استفاده کرده بود (۱۷۸۸) اما شاید مطالعه تحلیلی سیستم‌های دینامیکی ظاهر شده در مکانیک کلاسیک، اولین موردی بود که لزوم تعمیم هندسه به

خطی و نگاشت‌های میانشان مطالعه می‌شود. این بخش روایت اتفاقی است که می‌تواند در فضای مماس بر یک نقطه در یک خمینه روی دهد.

مطالعه موضعی، در این قسمت نه تنها به یک نقطه، بلکه به نقاط نزدیک به آن در خمینه نیز نگاه خواهیم کرد. این نگاه به ما این امکان را می‌دهد تا مفهوم مشتق را برای نگاشت‌های میان خمینه‌ها تعمیم دهیم.

مطالعه سرتاسری، در این قسمت خمینه به عنوان موجود واحد بررسی می‌شود. قسمت عمده این بخش به مطالعه‌های کلاف‌های

روی خمینه‌ها می‌گذرد.

ساختارهای هندسی، در بخش پایانی مطالعه ساختارهای هندسی روی خمینه به کمک معرفی اتصال روی فضای مماس خمینه به عنوان ابزاری برای تعریف مفهوم مشتق دوم صورت می‌گیرد. رویکرد کتاب رویکردی اصل موضوعی، مجرد و با دقت ریاضی فراوان است و کمتر مایل به اتکا به شهود و تصویر هندسی است. کتاب دارای مسیری منطقی بوده و ناپیوستگی‌ای از نقطه اولیه تا پایان آن حس نمی‌شود.

مجله ریاضی شریف از هرگونه همکاری در تمامی زمینه‌ها از جمله تهیه یا معرفی مطالب علمی و توصیفی و همچنین همکاری در زمینه‌های اجرایی مجله، از جانب دانشجویان و اساتید استقبال به عمل می‌آورد. لازم به ذکر است که اکثر همکاران فعلی این مجله به صورت کاملاً داوطلبانه همکاری می‌کنند و اساس کار این نشریه بر مبنای همکاری داوطلبانه اهالی دانشکده ریاضی شکل گرفته است.

تماس با ما:

mathematicsjournal@gmail.com





روزگار

۳۰۰۰ تومان