مجله‌ی ریاضی شریف

سال دوم شماره‌ی پنجم

مجله‌ی ریاضی شریف
سال دوم شماره‌ی پنجم

صاحب امتیاز: انجمن علمی و فوق برنامه‌ی دانشکده‌ی علوم ریاضی؛ مدیر مسوول : دکتر امیر جعفری؛ سردبیر: خشایار فیلُم؛ همکاران این شماره: علی کمالی‌نژاد،روزبه فرهودی، عباسمحرابیان، عرفان صلواتی، بابک میرآفتاب، علیرضا کرمی، مهدی کوره‌چیان، احمدرضا حاج‌سلیمی، سامان حبیبی، محمدعلی کرمی، میلاد برزگر؛ دبیر تحریریه: ابوالفضل طاهری؛ هیئت تحریریه: دکتر امیر جعفری، علی کمالی‌نژاد، خشایار فیلم، علی قصاب، عرفان صلواتی، روزبه فرهودی، نوید هاشمی، اوژن غنی‌زاده‌ی خوب، احمدرضا حاج‌سعیدی ؛ طراحی: اوژن غنی‌زاده‌ی خوب؛طراحی سایت: محسن منصوریار؛ ویراستاری: خشایار فیلم، ابوالفضل طاهری؛ با تشکر از دکتر رسول رمضانیان، حمید ملک

فهرست مطالب

اثبات خوب، اثباتی است که ما را با تدبیرتر کند.

یوری منین [۱]
مصاحبه از: مارتین آیگنر [۲] و واسکو اشمیت [۳]
ترجمه: علیرضا کرمی

کنگره‌ی بین‌المللی امسال آخرین کنگره‌ی ICM[۴] در این قرن است. آیا فکر می‌کنید هیلبرت هنوز ممکن است؟ آیا هیچ مسأله‌ی معاصر که به مسائل هیلبرت مربوط باشد، وجود دارد؟

شخصاً قبول ندارم که لیست مسائل هیلبرت تاثیری زیادی روی ریاضیات این قرن داشته‌است. برای مثال آرنولد [۵] می‌گفت وقتی که یک دانشجوی کارشناسی ارشد بود، یک کپی از لیست مسائل هیلبرت در دفترچه‌اش داشت که همیشه آن را به همراه داشت. اما وقتی گِلفَند[۶] این موضوع را فهمید، آرنولد را به‌خاطر این کار دست انداخت. آرنولد این‌طور فکر می‌کرد که حل مسأله، بخش بزرگی از توانایی ریاضی است. برای من فرق می‌کند. من روند خلق ریاضی را تشخیص الگوهای موجود می‌دانم. وقتی شما چیزی را مطالعه می‌کنید — توپولوژی، احتمال، نظریه اعداد یا هر چه — در ابتدا یک دید کلی نسبت به آن پیدا می‌کنید، سپس روی بخشی از آن تمرکز می‌کنید. سپس سعی می‌کنید بفهمید که "چه چیز وجود دارد؟" و "چه چیزهایی قبلاً توسط بقیه دیده شده‌است؟". بعد از آن می‌توانید مقالات بقیه را بخوانید و در آخر شروع به تشخیص مواردی می‌کنید که تا به حال هیچ‌کس ندیده‌است.

فکر نمی‌کنید تاکید بر حل مسأله، دیدگاهی رمانتیک است: قهرمانان بزرگی که قله‌ها را فتح می‌کنند؟

بله، شاید به نوعی یک دید ورزشی باشد. نمی‌گویم که بی‌ربط است. وسیله‌ی خوبی است برای جذب افراد جوان که با آن بتوانند حیثیت اجتماعی برای خود دست و پا کنند چون به یک دستاورد بزرگ رسیده‌اند. یک مسأله‌ی خوب حاکی از نگرش یک ذهن پویای ریاضی است، که نمی‌تواند مسیری به بلندی‌ها پیدا کند، اما تشخیص می‌دهد که بلندایی وجود دارد. اما این راه خوبی برای فهم ریاضی نیست، حتی راه خوبی برای ارائه‌ی آن به عموم. و جوهر آن هم نیست. به خصوص وقتی یک‌سری مسائل را در یک لیست قرار می‌دهیم، این شبیه به قرار دادن پایتخت کشورها در یک لیست است: کمترین اطلاعات ممکن را می‌دهد. شخصاً باور ندارم که هیلبرت فکر می‌کرد این راهی برای نظم دادن به ریاضیات باشد.

ممکن است بعضی از الگوهای غالب ریاضیات قرن پیش‌رو را حدس بزنید؟

خیلی سخت است. فکر می‌کنم ریاضیات قرن بیستم حول برنامه‌ها بود نه مسائل. گاهی آشکارا فرمول‌بندی شدند و گاهی به مرور به علت گرایش‌های رایج ظهور پیدا کردند. برای مثال توسعه‌ی منطق ریاضی و مبانی ریاضیات. مطمئناً آن توسعه، برنامه‌ای بود که به علت گرایش‌های رایج ظهور پیدا کرد. بعد از اکتشافات کانتور مسلم شده‌بود که باید افکار خودمان حول مفهوم بی‌نهایت را عمیق‌تر بررسی کنیم. یا برنامه‌ی لنگ‌لندز[۷] در مورد گروه گالوا[۸]. یک برنامه وجود دارد که با آن وارد قرن بعدی می‌شویم. می‌توان این برنامه را کوانتیزه کردن ریاضیات در نظر گرفت. شگفت‌انگیز است وقتی که می‌بینیم بسیاری از مفاهیم ریاضی در بیست سال اخیر به گونه‌ای تغییر کرده‌اند، که مفاهیم جدید کوانتومی‌شده‌ی مفاهیم قبلی هستند: نگاه کنید به گروه‌های کوانتومی[۹]، کوهمولوژی کوانتومی[۱۰] و محاسبات کوانتومی[۱۱] و من فکر می‌کنم بسیاری دیگر نیز در پیش است. خیلی عجیب به نظر می‌رسد چون هیچ‌کس چیزی شبیه این را برنامه‌ای برای توسعه‌ی ریاضیات در نظر نمی‌گرفت. هدف تنها این بود که ابزاری ریاضی، که فیزیک‌دانان با یک شهود عالی اختراع کرده‌بودند و از آن به روشی مهیج ولی بی‌دقت استفاده می‌کردند، از نگاه یک ریاضی‌دان محض فهمیده‌شود.

فکر می‌کنید قرن بیستم از نقطه نظر تاریخی چگونه دیده‌شود؟ آیا قرن مهمی بود؟

این‌طور فکر می‌کنم. ریاضیات این قرن در هماهنگ کردن و متحد کردن شاخه‌های مختلفی، در مقیاسی که شاید می توان گفت قبلاً هرگز دیده نشده بود، موفق بود. نقش برجسته در این اتحاد را نظریه‌ی مجموعه‌ها داشت. در حالی که در ابتدا کانتور بر این باور بود که

[۱] Yuri I. Manin
[۲] Martin Aigner
[۳] Vasco A. Schmidt
[۴] International Congress of Mathematicians
[۵] Arnold
[۶] Gelfand
[۷] Langlands
[۸] Galios groups
[۹] Quantum groups
[۱۰] Quantum cohomology
[۱۱] Quantum computing

نظریه‌ی بی‌نهایت فصلی از ریاضیات است، نظریه‌ی مجموعه‌ها به آرامی وضعیت خود را تغییر داد و به زبان جهانیِ ریاضیات بدل شد. به این پی برده شد که با شروع از لیست کوتاهی از عبارات و عملیات پایه می‌توان به صورت بازگشتی ساختمان‌های زبانی، تولید کرد که ظاهراً شهود بنیان‌گزاران حسابان، احتمال، نظریه اعداد، توپولوژی، هندسه دیفرانسیل و ... را می‌رساند. بنابراین جامعه‌ی ریاضی یک زبان مشترک پیدا کرد. همچنین به دلیل توانایی در تفاوت آشکار قائل‌شدن بین محتوای مجموعه‌ای و هندسیِ ساختارِ ریاضیات از یک سو و اصطلاحات زبانی انعطاف‌پذیر (علامت‌ها، فرمول‌ها، محاسبات) از سوی دیگر، نظریه‌ی مجموعه‌ها ارتباط بین نیم‌کره‌ی سمت چپ و راست هر ریاضی‌دان را ساده کرد. این عمل‌کرد (مضاعف) زبان نظریه‌ی مجموعه‌ها، علاوه بر این که ابزاری برای فرمول‌بندی کردن برنامه‌های تحقیقاتی فراهم کرد، زمینه‌ای ایجاد کرد که به توسعه‌ی ابزارهای تکنیکی جدید برای حل مسائل قدیمی منجر شد. تنوع ریاضیات به پدیده‌های بیرونی اجتماعی ربط داشت: رشد سریع اجتماعات علمی و اکتشافات بنیان‌افکن فیزیک. به نظر من ریاضیات صد سال گذشته چیزی قابل قیاس با نظریه‌ی کوانتوم یا نسبیت عمومی که دید کلی ما به جهان را عوض کرده‌باشد، تولید نکرده‌است. اما باور دارم بدون زبان ریاضیات، فیزیک‌دانان حتی قادر نبودند چیزی را که می‌بینند بیان کنند. این ارتباط بین اکتشافات فیزیک و روش ریاضی فکر کردن، زبان ریاضی، که با آن این اکتشافات بیان شد، شگفت‌آور است. با این دید قرن بیستم را می‌توان قرن پیشرفت‌های بزرگ دانست.

آیا عناوین مشخصی در ذهن شما هست که قرن حاضر در آن سرآمد باشد؟

در قرن ۱۸ و ۱۹ زبان ریاضی بسیار گنگ‌تر از چیزی بود که ما به آن عادت کرده‌ایم. فکر می‌کنم قرن بیستم با تفکر مجدد درباره‌ی مبانی آغاز شد. وقتی مبانی به اندازه‌ی کافی روشن شد، جستجو برای روش‌های تکنیکی قدرتمندی آغاز شد که منجر به ساخت ابزارهای قدرتمندی شد. این ابزارها به ما توانایی داد تا شهود هندسی خود را به حوزه‌های جدیدی گسترش دهیم. من در ذهنم توپولوژی[۱۲]، جبر همولوژی[۱۳] و هندسه‌ی جبری[۱۴] را دارم. به محض این‌که پیشرفت‌های تکنیکی حاصل شد، راه‌حل بسیاری از مسائل مشکل، در یک دامنه‌ی زمانی ۳۰ ساله بدست آمد— اثبات دِلین[۱۵] برای حدسیات ویل[۱۶]، اثبات فالتینگز[۱۷] برای حدس موردل[۱۸] و اثبات وایلز[۱۹] برای [قضیه‌ی آخر] فرما[۲۰]. هیچ‌کدام از این‌ها نمی‌توانست در قرن گذشته انجام شود به این دلیل که ریاضیات به اندازه‌ی کافی توسعه پیدا نکرده‌بود.

بعضی —که عده‌ای از آن‌ها ریاضی‌دان هستند— ادعای مرگ اثبات را کرده‌اند، بعضاً به دلیل دست‌رسی همگانی کامپیوترها. نظر شما در این باره چیست؟

اگر درباره‌ی ریاضیات بدون اثبات صحبت می‌کنید، درباره‌ی چیزی ذاتاً متناقض حرف می‌زنید. اثبات نمی‌تواند بمیرد —مگر همراه با ریاضیات. اما ریاضیات به عنوان بخشی از فرهنگ بشری می‌تواند بمیرد. من فکر می‌کنم که در نسل ما، ریاضی‌دان‌ها هنوز همان‌طور ریاضی می‌ورزند که ما آن را درک کرده‌بودیم. اثبات تنها راهی است که ما درستی افکار خود را می‌فهمیم. اثبات تنها راه توضیح آن چیزی است که می‌بینیم. اثبات تنها یک ادعا نیست که با آن یک مخالف فرضی را قانع می‌کنیم. هرگز! اثبات راهی است که با آن حقایق ریاضی را انتقال می‌دهیم. هر چیز دیگری —جهش شهود، شادی کشف ناگهانی، اعتقادات محکم ولی بی‌پایه، مسائل خصوصی ماست. وقتی که ما محاسبات کامپیوتری انجام می‌دهیم، تنها نشان می‌دهیم که در مسأله‌ی مورد بررسی، اشیاء همان‌گونه هستند که مشاهده کرده‌ایم.

اخیراً خبری در روزنامه بود که یک کامپیوتر حدس هربرت رابین[۲۱] را به وسیله جستجوی کامل روی همه‌ی استراتژی‌ها اثبات کرده‌بود.

البته این امکان‌پذیر است. چرا که نه؟ اگر یک استراتژی مناسب برای اثبات بسازید که شامل جستجوی وسیع و یا محاسبات صوری طولانی باشد و بعد از آن برنامه‌ای پیاده‌سازی کنید که جستجو را انجام دهد، مشکلی نیست. اما اثبات به کمک کامپیوتر، همانند اثبات بدون کمک کامپیوتر، می‌تواند بد یا خوب باشد. اثبات خوب اثباتی است که ما را با تدبیرتر کند. اگر قلب اثبات چیزی جز جستجوهای حجیم یا عبارتی طولانی از تساوی‌ها نباشد، احتمالاً اثبات خوبی نیست. اگر بعضی از چیزها به قدری پرت هستند که جواب روی یک صفحه یا کامپیوتر بالا می‌آید، احتمالاً ارزش انجام

---

[۱۲] Topology
[۱۳] Homological Algebra
[۱۴] Algebraic Geometry
[۱۵] Deligne
[۱۶] Weils
[۱۷] Faltings
[۱۸] Mordell
[۱۹] Wile
[۲۰] Fermat
[۲۱] Herbert Robbins

دادن ندارند. خردمندی با ارتباطات زنده است. اگر من ناچار باشم ۲۰ رقم اول عدد پی را با دست محاسبه کنم، مطمئناً بعد از محاسبه باتدبیرتر شده‌ام چون که می‌بینم این محاسبه‌ی من، طولانی است و احتمالاً الگوریتمی ابداع می‌کنم که زحمت من را کمتر کند. اما وقتی ۲۰ میلیون رقم عدد پی را با کامپیوتر و با استفاده از برنامه‌ای که شخص دیگری نوشته بدست می‌آورم، همان قدر احمق باقی می‌مانم که قبلاً بودم.

اگر شما یک قضیه‌ی زیبا به همراه اثباتی به همان اندازه زیبا داشته‌باشید که نیاز به بررسی یک‌صد مورد داشته‌باشد، آن را به کامپیوتر واگذار می‌کنید؟ آیا این یک اثبات صادقانه است؟

این اثبات به اندازه‌ی اثباتی که روی کاغذ می‌نویسم صادقانه است. ممکن است اشتباهاتی در برنامه‌نویسی روی دهد، ممکن است اشتباهاتی در اجرای محاسبات روی دهد و یا در چگونگی فهم ما در دسته‌بندی مسائل. ما مثال‌هایی از این‌گونه اثبات‌ها داریم. مساله چهار رنگ و دسته‌بندی گروه‌های متناهی ساده. در آن‌جا از محاسبات کامپیوتری زیادی استفاده شد. بنابراین جا برای شک بسیار است و نیاز است که محاسبات، مجدد بررسی شود، اما مهم‌تر از همه، تدبیر راه‌هایی است که بتوان مسائل را به گونه‌ی دیگر دید.

اجازه بدهید یک سوال درباره‌ی موارد درونی ریاضیات از شما بپرسم. به نظر می‌رسد در سال‌های اخیر جامعه‌ی ریاضی روی کاربرد تاکید دارد. آیا فکر می‌کنید ریاضیات محض در مقایسه با ریاضیات کاربردی مشکلی خواهد داشت؟ آیا این احساس را دارید که در آینده بودجه، تنها به سمت آن شاخه‌ها خواهد رفت؟

ریاضیات کاربردی نسبت به ریاضیات محض هم به بودجه‌ی بیش‌تری احتیاج دارد و هم بودجه‌ی بیش‌تری دریافت می‌کند. اما گمان نمی‌کنم که در مورد اختصاص منابع محدود، تنها بحث بودجه مطرح باشد. ریاضی‌دان‌ها به پول زیاد احتیاج ندارند و پول زیادی مصرف نمی‌کنند. مسأله‌ی توجه عمومی و ارزش‌های مورد قبول عموم مطرح است. من در جامعه‌مان جداییِ رو به رشدی را از ارزش‌های روشنگریِ[۲۲] سنتی مشاهده می‌کنم، و عموم مردم نمی‌خواهند برای ریاضی و احتمالاً به طور کلی برای دانشگاه‌ها هزینه شود. ریاضیات —اگر هم که قربانی باشد— قربانی این روند عمومی است نه این‌که بودجه به سمت مباحث کاربردی می‌رود. البته من قطعاً بر این باورم که تغییر جهت مداومی به سمت مباحث کاربردی در میزان کمی منابع تخصیص داده شده و البته میزان

[۲۲] Enlightenment

جذابیت این مباحث برای افراد جوان رخ خواهد داد. ریاضیات کاربردی با شبیه‌سازی کامپیوتری در ارتباط است —کامپیوترها، برنامه‌های پایگاه‌داده و چیزهایی شبیه آن. زمانی یک سخنرانی از دونالد کنوث[۲۳] را به روسی ترجمه کردم. در ازبکستان نشستی برگزار شد که اختصاص به خوارزمی داشت. کنوث سخنرانی خود را با جمله‌ی جالبی آغاز کرد. به نظر او، اصلی‌ترین اهمیت کامپیوتر برای جامعه‌ی ریاضی این است که بالاخره افرادی به سمت ریاضی جذب می شوند که به ریاضی علاقه مند بودند اما ذهن الگوریتمیک هم داشتند.. حالا آن‌ها قادر بودند آن‌چه را که می‌خواستند، انجام دهند. قبل از آن این خرده‌فرهنگ وجود نداشت. من این بحث را جدی می‌گیرم و باور دارم که در بین ریاضی‌دانانِ بالقوه‌ی آینده گروهی وجود دارند که ذهنشان برای نوشتن برنامه‌های کامپیوتری بهتر است تا اثبات قضایا. در قرن گذشته این‌گونه اشخاص احتمالاً قضیه ثابت می‌کردند ولی حالا نه. من احتمال زیادی می‌دهم که اگر امروز اویلر به کار می‌پرداخت، بیش‌تر وقتش را صرف نوشتن نرم‌افزار می‌کرد زیرا برای مثال او وقت زیادی صرف محاسبه‌ی جدول‌هایی برای مکان‌های ماه کرد. همین‌طور باور دارم که گاوس، اگر اکنون زنده بود، زمان بیش‌تری را جلوی صفحه‌ی کامپیوتر می‌گذراند.

بیایید به موضوع ریاضیات کاربردی برگردیم. آیا این موضوع درست نیست که ریاضیات معمولاً موفق است ولی علوم‌کامپیوتری‌ها بیش‌تر اعتبار آن را دریافت می‌کنند؟ یک مثال رایج توموگرافی کامپیوتری[۲۴] است. هیچ شخصی که من تا به حال با او صحبت کرده‌ام راجع به تبدیل رادون[۲۵]، هسته‌ی توموگرافی کامپیوتری چیزی نشنیده است. حتی افراد باسواد فکر می‌کنند که این کار دانشمندان علوم کامپیوتر است.

نکته در ضعف ذاتی تلاش برای توجیه‌کردن دغدغه‌های یک شخص به‌وسیله‌ی فایده‌دار جلوه‌دادن آن است. فایده در جهان مهندسی است. آن‌چه که شما از مکانیک کوانتوم می‌فهمید، تنها فهم از فرمول‌هایی روی کاغذ است. هیچ چیز فایده‌داری درباره‌ی آن وجود ندارد. تنها زمانی فایده‌دار خواهد بود که روی چیزی پیاده‌سازی شود، و مهندسی شود.

آیا ریاضی‌دانان باید موضع تهاجمی اتخاذ کنند؟ آیا آن‌ها باید به سمت دنیا بروند و بگویند "ما این‌جا هستیم"؟ آیا ما نسبت به تبلیغ دستاوردهایمان بیش از حد بی‌میل نیستیم؟

[۲۳] Donald Knuth
[۲۴] computer tomography
[۲۵] Radon transform

من انسان گوشه‌گیری هستم و متنفرم که دیدگاه‌هایم را به جمع تحمیل کنم. فکر می‌کنم هر چه که خوب هست روزی آشکار می‌شود، هرچند یک مساله‌ی عمومی به نام فروشِ فرهنگ —با این فرض که ما چیزی تولید می‌کنیم که ارزش فرهنگی دارد— وجود دارد. این بستگی به جمع دارد که به آن توجه کنند یا توجه نکنند. البته بعضی از ما باید برای اثبات مهم بودن دستاورهایمان تلاش کنیم، اما فکر می‌کنم که سخت هست. رامبراند[۲۶] چه‌طور می‌توانست از این واقعیت که در بدبختی کامل و در کسوت یک انسان فقیر مرد دفاع کند؟ چه‌طور؟ صادقانه بگویم، نمی‌دانم ریاضیات درباره‌ی چیست. اما فرهنگ هم همین‌طور است، زیرا به همان ترتیب، نمی‌دانیم که نقاشی‌های رامبراند درباره‌ی چیست، چرا او صورت انسان‌ها را —به آن‌گونه— نقاشی می‌کرد؟ چرا مهم بود؟ نمی‌دانیم. این مسأله‌ی فرهنگ است: شما نمی‌توانید بگویید "چرا".

فکر می‌کنید نقش فرهنگی ریاضیات چیست؟

در نظر من، پایه‌ی تمام فرهنگ بشری زبان است، و ریاضیات یک نوع خاص از فعالیت زبانی است. زبان طبیعی یک ابزار بسیار انعطاف‌پذیر برای ارتباط به منظور تامین نیازهای اولیه، بیان احساسات و اعمال اراده، ساختن جهان‌های مجازی شعر و دین، اغوا و ایمان است. با این همه زبان طبیعی برای به‌دست‌آوردن، نظام بخشیدن و نگهداری از فهم در حال رشد ما از طبیعت، که اساسی‌ترین شاخصه‌ی تمدن جدید است، مناسب نیست. به احتمال قوی ارسطو آخرین متفکر بزرگی بود که این قابلیت زبان را تا مرزهایش گسترش داد. با ظهور گالیله[۲۷]، کپلر[۲۸] و نیوتون[۲۹]، نقش زبان طبیعی در علم به یک میانجی بین اطلاعات علمی مستتر در جدول‌های نجومی، فرمول‌های شیمی، معادلات نظریه‌ی میدان‌های کوانتومی، اطلاعات مربوط به ژنوم انسان در یک طرف و مغز ما در طرف دیگر تنزل داده‌شد. با استفاده از زبان طبیعی در مطالعه و آموزش علم، ما به همراه آن ارزش‌ها و تعصبات، تصویرهای شاعرانه، قدرت‌طلبی و توانایی‌های شیادانه‌ی خود را به میدان می‌آوریم، اما این زبان برای بیان محتوای علمی سودمند نیست. همه چیز به‌وسیله‌ی لیست‌های بلندبالای اطلاعات و ریاضیات انجام می‌شود. برای همین باور دارم که ریاضیات یکی از دستاوردهای قابل توجه فرهنگ است، و با وجود اشتغال من به ریاضیات در کسوت معلم و محقق در تمامی طول عمر، هنوز در آخر هر روز کاری احساس بهت و ستایش می‌کنم. گرچه باور من این نیست که بتوانم به طور قانع‌کننده‌ای از این عقیده در بحث عمومی معاصر بر سر ارزش‌های انسانی و علم دفاع کنم.

[۲۶] Rembrandt
[۲۷] Galileo
[۲۸] Kepler
[۲۹] Newton

چرا تا این اندازه بدبین هستید؟

من توضیح درباره‌ی بدبینی خود را با این یادآوری آغاز می‌کنم که در کاربرد کنونی، "فرهنگ" کلمه‌ای شدیداً خود-ارجاع شده‌است. بدین معنا که تعریف فرهنگ به‌وسیله‌ی زمینه‌های فرهنگی از قبل موجود، روالی عادی شده‌است، حتی اگر زمینه‌های قبلی بی‌پرده و صریح تعریف نشده‌باشند. این بدین معنا است که هیچ برآورد و ارزیابی عینی‌ای از فرهنگ ممکن نیست. علاوه بر این، هر گزاره‌ای درباره‌ی فرهنگ که آمرانه شود، تصور عمومی از فرهنگ را عوض کرده، بنابراین کل فرهنگ را تغییر می‌دهد. به خصوص این‌که گفتمان مدرن بر سر فرهنگ تابع گفتمان سیاسی است. ما به این موضوع تا قبل از دو دهه‌ی پیش که چارلز اسنو[۳۰] بحث دو فرهنگ[۳۱] را مطرح کرد، کمتر توجه کرده‌بودیم. اسنو از این موضوع که در محیط اجتماعی-فرهنگی او، برخلاف عصر یونانی‌ها و شکسپیر[۳۲]، دانش علمی عضوی طبیعی از آموزش افراد فرهیخته نیست، نگران بود. به‌علاوه، یک نفر بی‌پروا و با خودنمایی می‌تواند تصورات خودش را به عنوان شخصی فرهیخته اعلام کند. اسنو این موضوع را نتیجه‌ی دیدگاه تحریف‌شده‌ی عمومی از آن‌چه محتوای حقیقی فرهنگ است، می‌دانست و امیدوار بود که بحث عمومی و اصلاح آموزش بتواند تعادل را بازگرداند.

آیا تز دو فرهنگ هنوز مطرح هست؟

مرتبط بودن این نظر با ما به توانایی ما برمی‌گردد که تا چه اندازه می‌توانیم خودمان را با فرهنگ[۳۳] مورد نظر او، که شامل هومر[۳۴] و باخ[۳۵]، گالیله و شکسپیر، تولستوی[۳۶] و انیشتین[۳۷] می‌شود، همراه کنیم. من متاسفم که این توانایی تا اندازه‌ی زیادی از دست رفته‌است. در حقیقت، نظر مورد پسند چند-فرهنگی، تصور فرهنگ‌های به یک اندازه معتبر را به وجود آورده‌است. ریشه و بالندگی فرهنگ باشکوه اروپایی هم تراز با دیگر فرهنگ‌های منطقه‌ای گرفته شده و با مفاهیم به طور ضمنی تحقیرآمیزی مانند امپریالیسم فرهنگی و اروپامحوری

[۳۰] Charles Percy Snow
[۳۱] Two Cultures
[۳۲] Shakespeare
[۳۳] Cultre with capital C
[۳۴] Homer
[۳۵] Bach
[۳۶] Tolstoy
[۳۷] Einstein

از قدر و منزلت آن کاسته شده است. طرفداران محیط زیست علم و تکنولوژی را به دلیل استفاده‌های مخربی که از آن‌ها می‌کنیم سرزنش می‌کنند و و بنابراین جاذبه‌ی فرهنگی آن‌ها را باز هم کاهش می‌دهند. شگفت این‌که، استدلالی که دانشمندان برای موجه جلوه دادن پیشه‌ی خود به‌خدمت می‌گرفتند، اکنون علیه آن‌ها به کار می‌رود. روند گفتمان ساختارشکن[۳۸] و پست‌مدرن[۳۹]، ملاک‌های اساسی تشخیص حقیقت علمی را که به زمان گالیله و بیکن[۴۰] بازمی‌گردند مورد تردید قرار داده است و سعی در جای‌گزینی آن‌ها با ساختمان‌های عقلانی دل‌به‌خواه دارد. بدین صورت بسیاری از اندیشمندان تأثیرگذار نه تنها همتایان علمی فرهنگ معاصر را نادیده می‌گیرند بلکه پرخاش‌گرانه آن‌ها را رد می‌کنند. من ممکن است (کما این‌که این‌طور هست) که این وضع را تأسف‌بار بیابم، اما با نگاهی واقع‌بینانه، نمی‌توانم در آینده‌ای قابل‌پیش‌بینی روی بهبود اوضاع حساب کنم.

به آینده‌ی ریاضیات بازگردیم، آیا شخصاً نظریه‌ای دارید که در مورد آن بگویید: "اگر به اندازه‌ی کافی زندگی کنم، این چیزی هست که دوست دارم ببینم."؟

این چیزی هست که به این دلیل نمی‌دانم: در طول کار علمی، من موضوع کارم را چندین بار، اما نه خیلی، عوض کردم زیرا بعضی چیزها را جذاب‌تر از بعضی دیگر می‌دانستم. در واقع هر چیزی را جالب می‌پنداشتم، اما امکان این نیست که همه‌ی کارها را در یک زمان انجام داد. راه دوم ،که از نظر من راه بهتری است، این است که سعی کنید در چند رشته به نوبت حرفه‌ای شوید. دو چیزی که من به آن‌ها علاقه‌مند بودم نظریه اعداد و فیزیک بود. بنابراین در دو زمینه فکر کردم و سعی کردم از شهودی که در هر دو زمینه رشد یافته‌بود استفاده کنم. فهمیدن مسائل در نظریه اعداد به من کمک کرد که مسائل فیزیک را بفهمم و برعکس. من در میان ارزش‌های شخصی‌ام برای این عبارت رنسانس ،varieta، ارزش زیادی قائل هستم— غنای زندگی و جهان با بسیاری از تجربه‌ها و تفکراتی که توسط ذهن‌های بزرگ به دست آمده و ما سعی بر سرمشق گرفتن از آن‌ها داریم، مطابق است.

[۳۸] Deconstructionist
[۳۹] Postmodern
[۴۰] Bacon

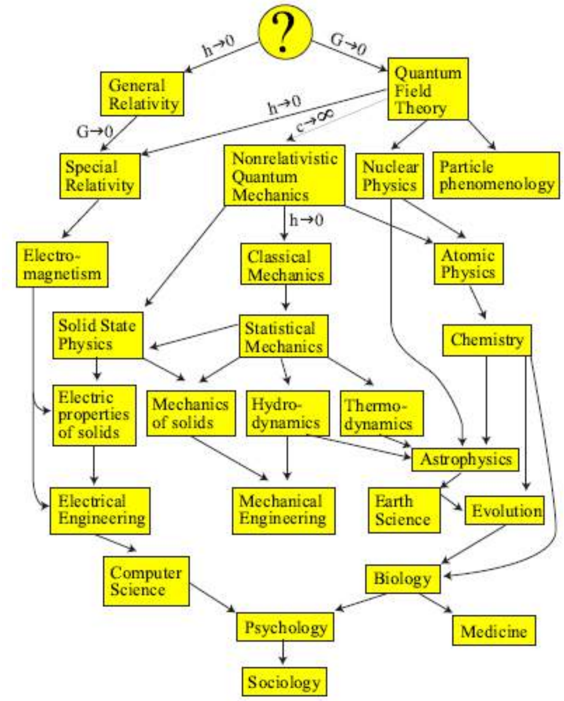
جهان ریاضیات

بر اساس نظریه‌ی جهان ریاضیاتی از ماکس تگمارک[۱]

سامان حبیبی

تا به امروز موفق‌ترین نظریات فیزیکی آن دسته از نظریات‌اند که به جنبه‌های خاص‌تری از دنیای واقعی پیرامون ما می‌پردازند. هر چه شرایط خاص‌تر و موضوع مورد مطالعه محدودتر می‌شود، دقت نظریات و توفیق عملی آنها در توجیه و پیش بینی پدیده‌های فیزیکی افزایش می‌یابد. اما آرمان فیزیک‌دانان چیز دیگری است. آن ها دوست دارند نظریاتی داشته باشند که با وجود دقت بالا، حوزه‌ها و شرایط فراگیرتری را در برگیرند. جام مقدس فیزیک‌دانان یافتن تئوری‌ای است که بتواند تمام پدیده‌های جهان را توضیح دهد، بدون خطا. نظریه‌ای که به طور کامل همه چیز را در برگیرد و نتیجه‌ی هر آزمایشی را به صحت پیش بینی کند. آنان چنین تئوری را «نظریه‌ی همه چیز[۲]» می‌نامند. البته چنین نظریه‌ای (با فرض وجود آن) هنوز یافت نشده است. تئوری جهان ریاضیاتی بیان می‌کند که اگر چنین نظریه‌ای وجود داشته باشد این نظریه یک ساختار ریاضی خواهد بود. منظور از ساختار ریاضی مجموعه‌ای از نمادها و روابط ریاضی بین آنها است. در ادامه سعی در روشن کردن این تئوری خواهیم داشت.

نظریه همه چیز، اگر واقعا وجود داشته باشد، باید واجد ویژگی‌های خاصی باشد. اما قبل از پرداختن به آن باید در مورد مطلبی توافق کنیم. آن هم وجود یک جهان فیزیکی واقعی خارج از ذهن ماست. اغلب دانشمندان این را به عنوان یک اصل می‌پذیرند و تحقیقات خود را صرف شناخت این جهان می‌کنند و دنیای بیرونی را کاملاً مستقل از ذهن انسان در نظر می‌گیرند. اما این فرضیه به صورت پیش‌فرض و برای همگان پذیرفته شده نیست. برای مثال نفس‌گراها[۳] معتقدند ذهن تنها چیزی است که هر فرد کاملاً می‌تواند به وجود آن اطمینان داشته باشد یا طرفداران تفسیر کپنهاگی از مکانیک کوانتومی که معتقدند بدون مشاهده‌ی انسان، حقیقتی وجود ندارد. اما به هر حال ما فرضیه وجود حقیقت خارجی را می‌پذیریم و با آنکه شاید به نظر برسد که پذیرش و یا عدم پذیرش آن اهمیت چندانی در مطالعه جهان نخواهد داشت، خواهیم دید که این فرضیه نتایج چشمگیری خواهد داشت.



شکل فوق (با مسامحه و اندکی شلختگی) نشان می‌دهد که چطور می‌توان نظریات علمی مختلف را روی یک درخت مرتب کرد به طوری که هر نظریه علمی از نظریات بالاییش (که با یال هایی جهت‌دار به هم متصل شده‌اند) به اضافه حداقل یک اصل جدید بدست آورد. برای نمونه مکانیک کلاسیک را می‌توان از نسبیت خاص با فرض کردن اینکه سرعت نور بی‌نهایت است بدست آورد یا اینکه زیست شناسی را از شیمی گرفت و علم طب را از زیست شناسی و....

در سلسله‌ی تئوری‌ها، در هر نظریه یک مفهوم جدید معرفی می‌شود مثل پروتون، اتم، سلول، ارگانیسم‌ها، فرهنگ و.... تعریف مفاهیم جدید برای ساده‌تر کردن کار است به جای اینکه از همان مفاهیم اولیه و بنیادین استفاده کنیم. مثلاً تصور کنید یک تئوری در مورد گیاهان و درخت‌ها داشته باشیم. اغلب این تئوری با تعریفی از درخت و گیاه و... بدون توسل به مفاهیم بنیادی‌تر ارائه می‌شود. یا اینکه تصور کنید تعریفی که از یک درخت می‌دهیم «مجموعه‌ای از اتم هایی خاص که با چینشی معین کنار هم قرار گرفته اند» باشد که البته بسیار پیچیده و عملاً ناممکن خواهد بود.

همه‌ی تئوری‌های فوق (و سایر نظریات علمی) را می‌توان به دو بخش تقسیم کرد. بخش اول دسته‌ای از تعاریف و واژگان که سعی می‌کند ارتباط میان مشاهدات و چیزهایی که نهایتاً می‌فهمیم را

---

[۱] Max Tegmark
[۲] Theory of everything
[۳] solipsists

توضیح دهد و بخش دوم که شامل معادلات و فرمول‌های ریاضی است.

اما نکته‌ی اساسی این است که به خاطر داشته باشیم که این ما انسان‌ها هستیم که این تعاریف را ارائه می‌دهیم و این مفاهیم ساخته‌ی ذهن ماست. همه این مفاهیم از جمله درخت، اتم و....

این تعاریف وابسته به ذهن ما هستند و اصالتی از خود در جهان خارجی ندارند.

با اندکی تسامح می‌توانیم ادعا کنیم در این درخت نظریات علمی، هنگامی که از بالا شروع می‌کنیم هرچه به پایین می‌آییم از حجم معادلات ریاضی کاسته شده و بر تعاریف و مفاهیم معرفی شده افزوده شده است. در قسمت‌های فوقانی درخت با نظریاتی مثل میدان کوانتومی و نسبیت عام مواجه‌ایم که مملو از روابط ریاضی است در بخش‌های پایینی مثلاً در زیست شناسی و زمین شناسی، فرمول‌های ریاضی بسیار اندک بوده و در بخش‌های پایین‌تر مثل جامعه‌شناسی و... به صفر میل می‌کند اما در عوض این تئوری‌ها پر از تعاریفی ساخته ذهن انسان است.

فرض وجود جهان خارجی مستقل از ذهن ما، این نکته را متذکر می‌شود که اگر نظریه‌ای تحت عنوان نظریه‌ی همه چیز وجود داشته باشد، این نظریه نباید به برداشت‌های ذهنی ما مرتبط باشد و در نتیجه بایستی مستقل از تعاریف و مفاهیمی که انسان‌ها ارائه کرده اند باشد. یعنی این نظریه تنها یک ساختار ریاضی خواهد بود. یک ساختار ریاضی شامل نمادها (که معنی خاصی ندارند) و روابط بین آنها خواهد بود.

نکته‌ای جالب توجه این است که در صورت صحت نظریه‌ی جهان ریاضیاتی، تقارن‌های ساختار منطبق بر جهان فیزیکی باید بر تقارن‌های فیزیکی موجود در دنیای اطرافمان منطبق باشد.

به عنوان یک مثال از ساختار ریاضی‌ای که سعی در توصیف فضای ۳بعدی اطرافمان دارد، به نمونه‌ی زیر دقت کنید :

- $S_۱$ مجموعه‌ای شامل اعضای به فرم x_α است که با عدد حقیقی α اندیس‌گذاری شده‌اند.
- $S_۲$ مجموعه‌ای شامل اعضای به فرم y_r است که با یک بردار ۳بعدی r اندیس‌گذاری شده‌اند.

به اضافه روابط زیر :

- $R_1(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}) = x_{\alpha_1 - \alpha_2} \in S_1$
- $R_2(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}) = x_{\alpha_1/\alpha_2} \in S_1$
- $R_3(y_{r_1}, y_{r_2}) = y_{r_1+r_2} \in S_2$
- $R_4(x_\alpha, y_r) = y_{\alpha r} \in S_2$
- $R_5(y_{r_1}, y_{r_2}) = x_{r_1.r_2} \in S_1$

بنابراین می‌توانیم $S_۱$ را به عنوان میدان اعداد حقیقی rigid در نظر بگیریم و $S_۲$ را به عنوان فضای اقلیدسی ۳بعدی به همراه ضرب داخلی متعارف. با ترکیب روابط فوق همه‌ی روابط آشنا را می‌توانیم به دست آوریم. برای نمونه مبدا را $R_۱(x_\alpha, x_\alpha) = x_۰$ می‌گیریم و هم‌چنین عنصر همانی ضربی در $S_۱$ برابر با $R_۲(x_\alpha, x_\alpha) = x_۱$ خواهد بود به همراه وارون جمعی $R_۱(R_۱(x_\alpha, x_\alpha), x_\alpha) = x_{-\alpha}$ و مبدا در فضای ۳بعدیمان $R_۴(R_۱(x_\alpha, x_\alpha), y_r) = y_۰$ می‌شود.

این ساختار مطرح شده، دارای تقارن نسبت به دوران می‌باشد. گروه اتومورفیسم $Aut(S) = O(۳)$، با ماتریس ۳ × ۳ دوران R پارامتریزه می‌شود که به صورت زیر عمل می‌کند:

$$x'_\alpha = x_\alpha, y'_r = y_{Rr}$$

برای نشان دادن این که این ساختار سه بعدی تقارن دورانی دارد، کافی است که نشان دهیم هر کدام از روابط اولیه تعریف شده روی این فضا به این تقارن احترام می‌گذارند :

$$R_۳(y'_{r_۱}, y'_{r_۲}) = y_{Rr_۱+Rr_۲} = y_{R(r_۱+r_۲)} = R_۳(y_{r_۱}, y_{r_۲})'$$

$$R_۴(x'_\alpha, y'_r) = y_{\alpha Rr} = y_{R\alpha r} = R_۴(x_\alpha, y_r)'$$

$$R_۵(y'_{r_۱}, y'_{r_۲}) = x_{(Rr_۱).(Rr_۲)} = x_{r_۱.r_۲} = R_۵(y_{r_۱}, y_{r_۲})'$$

همانطور که گفته شد، از نتایج فرضیه‌ی جهان ریاضیاتی این است که تقارن‌های ساختارهای ریاضی بر تقارن‌های جهان فیزیکی منطبق خواهند بود. برای نمونه مثال فوق نشان می‌دهد که یک ناظر درون فضای $S_۲$ نمی تواند میان این فضا و نسخه‌ای از این فضا که دوران داده شده است تمایزی قائل شود..

نکته دیگر اینکه روابط، پتانسیل مشاهده شدن را دارند چراکه آنها خاصیت‌هایی از ساختار هستند. بنابراین بسیار مهم است که یک ساختار ریاضی را چگونه تعریف می‌کنیم از آنجا که تفاوت‌های به ظاهر کوچک در تعریف ریاضی ساختار، باعث تفاوت‌های بزرگ در فیزیک می‌شود.

برای مثال خمینه‌ی $\mathbb{R}$، فضای متریک $\mathbb{R}$، فضای برداری $\mathbb{R}$، میدان اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ همگی به اعداد حقیقی اشاره دارند اما این‌ها چهار ساختار ریاضی مختلف هستند با چهار گروه تقارن کاملاً مختلف.

اجازه دهید برای روشن شدن این مطلب دوباره به مثال فضای ۳بعدی‌مان باز گردیم. فضای ۳بعدی که در مثال بالا مطرح شد با مبدا $R_۴(R_۱(x_\alpha, x_\alpha), y_r) = y_۰$ را در نظر بگیرید بدون هیچ معادلی واقعی در دنیای فیزیکی. به نظر می‌رسد فضای فیزیکی اطراف ما

تقارن‌های بیشتری داشته باشد از جمله تقارن انتقالی که این ساختار ریاضی مطرح شده همچین تقارنی ندارد.

فرض کنید در مثال فوق $R_۳$ و $R_۴$ را حذف کنیم و به جای آن تعریف کنیم:

$$R_۵(y_{r_۱}, y_{r_۲}) = x_{|r_۱-r_۲|}$$

یعنی از $S_۲$ که یک فضای برداری بود یک فضای متریک بسازیم. اما در واقع این ساختار چیزی بیش از فضای فیزیکی اطراف ما را ارائه می‌دهد چرا که این فضا یک مقیاس طول ارجح دارد. طول واحد یعنی $x_۱$ در حالی که در دنیای فیزیکی اطرافمان به نظر نمی‌آید هیچ طولی با مقیاس "۱" موجود باشد.

ساده‌ترین ساختاری که می‌توان ارائه داد که بر فضای ۳بعدی اطراف ما (با نگاه فیزیک کلاسیک) منطبق باشد، با عدم در نظرگیری نسبیت، به صورت زیر است :

- S_1 is set of elements x_α labeled by real numbers α
- S_2 is set of elements y_α labeled by real numbers α
- S_3 is a set of elements $z_r$labeled by 3-vectors r
- $R_1(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}) = x_{\alpha_1-\alpha_2} \in S_1$
- $R_2(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}) = x_{\alpha_1/\alpha_2} \in S_1$
- $R_3(y_{\alpha_1}, y_{\alpha_2}) = y_{\alpha_1+\alpha_2} \in S_2$
- $R_4(x_{\alpha_1}, y_{\alpha_2}) = y_{\alpha_1\alpha_2} \in S_2$
- $R_5(z_{r_1}, z_{r_2}, z_{r_3}) = y_{(r_2-r_1).(r_3-r_1)} \in S_2$

که در آن $S_۱$ میدان اعداد حقیقی است و $S_۲$ فضای برداری ۱ بعدی حقیقی است، بدون تقسیم و بدون هیچ طول واحد ارجح و $S_۳$ نیز یک فضای متریک است که در آن زاویه‌ها نیز تعریف شده اند. به بیان دیگر هر ۳ نقطه یک زاویه را مشخص می‌کند و هر دو نقطه یک طول را با رابطه‌ی

$$R_۵(z_{r_۱}, z_{r_۲}, z_{r_۲}) = y_{|r_۲-r_۱|^۲} \in S_۲$$

عام‌ترین اتومورفیسم تعریف شده روی این ساختار دوران با ماتریس R، انتقال با بردار a و تجانس با ضریب غیرصفر λ است.

$$x'_\alpha = x_\alpha, y'_\alpha = y_{\lambda^۲\alpha}, z'_r = z_{\lambda Rr+a}$$

به سادگی می‌توان این تقارن‌ها را بررسی کرد. برای مثال :

$$R_۵(z'_{r_۱}, z'_{r_۲}, z'_{r_۳}) = y_{[(\lambda Rr_۲+a)-(\lambda Rr_۱+a)].[(\lambda Rr_۳+a)-(\lambda Rr_۱+a)]}$$
$$= y_{\lambda^۲(r_۲-r_۱).(r_۳-r_۱)} = R_۵(z_{r_۱}, z_{r_۲}, z_{r_۳})'$$

موفقیت نسبیت عام نشان می‌دهد که فضای فیزیکی هنوز دارای تقارن‌های بیشتری است. همین طور روابط بین نقاط کاملاً جدا از هم طرد شده و فاصله تنها برای نقاط بسیار نزدیک به هم تعریف می‌شود. توجه داشته باشید که نه تقارن دیفیمورفیسم[۴] و نه تقارن پیمانه‌ای[۵] بر اتومورفیسم‌های این ساختار منطبق نیستند. به یک معنی این‌ها تقارن‌هایی منطبق بر دنیای فیزیکی نیستند و تقارن‌هایی زائد هستند. اگر به سبب فیزیک کوانتوم نبود ساختار ریاضی نسبیت عام کاندیدای خوبی به عنوان ساختار ریاضی منطبق بر دنیای واقعی‌مان می‌بود. تعریف یک ساختار ریاضی دقیق برای انطباق بر گروه تقارن‌های $SU(۳) \times SU(۲) \times U(۱)$ نظریه میدان کوانتومی از نوع استاندارد هنوز به عنوان یک مساله باز مطرح می‌شود.

[۴] Diffeomorphism
[۵] Gauge

احتمال جابه‌جا شدن دو عضو تصادفی در یک گروه[1]

عرفان صلواتی

۱ مقدمه

هر دانشجویی که مقدماتی از احتمال و جبر را بداند می‌تواند روی این سؤال فکر کند. در این بخش راه حل این مسأله را در حالت گروه‌های متناهی که نسبتاً سرراست است ارائه می‌دهیم:

فرض کنید G یک گروه متناهی مرتبه n باشد. $Pr(G)$ را احتمال این می‌گیریم که دو عضو که به تصادف (و با جایگذاری) از بین اعضای G انتخاب شده‌اند با یکدیگر جابه‌جا شوند. روشن است که $Pr(G)=|C|/n^2$ که $C=\{(x,y)\in G\times G|xy=yx\}$. فرض کنید C_x مجموعه‌ی عناصری از گروه باشد که با x جابه‌جا می‌شوند. روشن است که

$$|C|=\sum|C_x|,$$

که مجموع روی همه‌ی $x\in G$ است. اکنون دقت کنید که اگر x و y مزدوج یکدیگر باشند، C_x و C_y زیرگروه‌هایی مزدوج هستند. به سادگی می‌توان دید که تعداد اعضای کلاس تزویجی x برابر است با $[G:C_x]$. بنابراین، اگر $x_1,x_2,\dots,x_k$ نماینده‌هایی از کلاس‌های تزویجی در G باشند، داریم

$$|C|=\sum_{i=1}^{k}[G:C_{x_i}].|C_{x_i}|=k.n$$

بنابراین $Pr(G)=\frac{k}{n}$، یعنی نسبت تعداد کلاس‌های تزویجی G به مرتبه‌ی G. این روش توسط اردوش و توران [۳] به کار گرفته شده است.

اکنون نشان می‌دهیم وقتی که G غیر آبلی باشد، $Pr(G)\le\frac{5}{8}$. می‌دانیم که G به کلاس‌های تزویجی افراز می‌شود. بعضی کلاس‌های تزویجی، تک عضوی هستند که عبارتند از اعضای مرکز G[2]. بنابراین

$$|G|=|Z|+|K_1|+\cdots+|K_t|,$$

که Z مرکزِ G و $K_1,\dots,K_t$ کلاس‌های تزویجی با بیش از یک عضو هستند. داریم $|K_i|\ge 2$، بنابراین $t\le(|G|-|Z|)/2$. بنابراین $k=t+|Z|\le(|G|+|Z|)/2$. چون G غیرآبلی است، بنابر گزاره‌ای کلاسیک G/Z دوری نیست ([۵] صفحه ۵۰) و بنابراین $|Z|\le\frac{|G|}{4}$. بنابراین $k\le\frac{5}{8}.|G|$ و در نتیجه $Pr(G)\le\frac{5}{8}$. خواننده میتواند با بررسی گروه‌های مرتبه ۸ مشاهده کند که $\frac{5}{8}$ بهترین کران ممکن است.

۲ گروه‌های نامتناهی

آیا استدلال‌های بخش قبل به هیچ نحوی در مورد گروه‌های نامتناهی هم برقرار هستند؟ اگر چه نسبت k/n در گروه‌های نامتناهی بی‌معنی است ولی خواهیم دید که کران ۵/۸ برای دسته‌ای از گروه‌های توپولوژیک نیز برقرار است.

فرض کنید G یک گروه توپولوژیک هاوسدورف و فشرده باشد. بنابر قضیه‌ای معروف، G دارای یک *اندازه‌ی هار چپ*[3] است، یعنی یک اندازه‌ی برل μ به طوری که برای هر باز U از G، $\mu(U)>0$ و برای هر زیرمجموعه‌ی برل E از G و هر $x\in G$، $\mu(x.E)=\mu(E)$. به علاوه، μ در حد یک ضریب یکتاست، یعنی اگر فرض کنیم $\mu(G)=1$، آن‌گاه μ به طور یکتا مشخص می‌شود. خواننده‌ی برای آشنایی بیشتر با اندازه‌ی هار میتواند به مرجع [۴] فصل XI مراجعه کند.

روی فضای حاصل‌ضربی $G\times G$، اندازه‌ی حاصل‌ضربی $\mu\times\mu$ را قرار می‌دهیم. دوباره تعریف می‌کنیم

$$C=\{(x,y)\in G\times G|xy=yx\}$$

. داریم $C=f^{-1}(1)$ که $f:G\times G\to G$ تابع پیوسته‌ای است که به صورت $f(x,y)=xyx^{-1}y^{-1}$ تعریف می‌شود. پس C بسته و در نتیجه اندازه‌پذیر است. اگر $\mu\times\mu$ را به عنوان یک اندازه‌ی احتمال در نظر بگیریم، آن‌گاه $Pr(G)=\mu\times\mu(C)$. اکنون نتیجه‌ی بخش قبل را به گروه G تعمیم می‌دهیم:

قضیه ۱. *فرض کنید G یک گروه فشرده‌ی غیرآبلی باشد. آن‌گاه* $Pr(G)\le 5/8$.

اثبات. فرض کنید χ_C تابع مشخصه‌ی C باشد. پس

$$\mu\times\mu(C)=\int_{G\times G}\chi_C d(\mu\times\mu),$$

بنابر قضیه‌ی فوبینی،

$$=\int_G\int_G\chi_C(x,y)d\mu(x)d\mu(y).$$

[1] این مقاله ترجمه‌ای است از مقاله‌ی What is the Probability that Two group Elements Commute که در شماره‌ی نوامبر ۱۹۷۳ مجله American Mathematical Monthly چاپ شده است.

[2] مرکز G عبارت است از $\{x\in G|\forall y\in G,xy=yx\}$.

[3] Left Haar measure

از طرفی برای هر x،

$$\int_G \chi(x,y)d\mu(y)=\mu(C_x)$$

که $C_x=\{y|xy=yx\}$. به دلیل مشابه قسمت قبل، $[G:Z]\geq ۴$ و چون G اجتماع مجزای هم‌دسته‌های Z است نتیجه می‌شود که $\mu(Z)\leq \frac{۱}{۴}$ (دقت کنید که Z بسته و در نتیجه اندازه‌پذیر است).اکنون توجه کنید که اگر $x\in Z$، آن‌گاه $C_x=G$ و بنابراین $\mu(C_x)=۱$. از طرف دیگر، اگر $x\in G-Z$، آن‌گاه C_x دارای اندیس حداقل ۲ است و در نتیجه $\mu(C_x)\leq \frac{۱}{۲}$.بنابراین داریم

$$\begin{aligned}Pr(G)=\mu\times\mu(C)&=\int_G \mu(C_x)d\mu(x)\\&=\int_Z \mu(C_x)d\mu(x)+\int_{G-Z}\mu(C_x)d\mu(x)\\&\leq \mu(Z).۱+\mu(G-Z).\frac{۱}{۲}=\mu(Z)+\frac{۱}{۲}-\frac{\mu(Z)}{۲}\leq\frac{۵}{۸}.\end{aligned}$$

$\square$

۳ مسائل

چند مسأله در رابطه با تخمین $Pr(G)$ برای گروه‌های متناهی مطرح می‌کنیم.

۱. ثابت کنید $Pr(G\times H)=Pr(G).Pr(H)$.

۲. اگر $Pr(G)=\frac{۵}{۸}$ آن‌گاه G پوچ‌توان است.

۳. اگر G متناهی باشد و $Pr(G)=\frac{۵}{۸}$، آن‌گاه G ضرب مستقیم یک گروه آبلی و یک ۲-گروه H است به طوری که $|H|\geq ۸$ و H جمع مستقیم هیچ دو گروهی نیست و $Pr(H)=\frac{۵}{۸}$.

۴. همه‌ی گروه‌های H با ویژگی‌های گفته شده در مسأله قبل را شناسایی کنید.

۵. از رابطه‌ی $Pr(G)=\frac{k}{n}$ می‌توان برای محاسبه‌ی کران‌های بهتری برای $Pr(G)$ در حالت گروه‌های خاص استفاده کرد. نشان دهید برای p-گروه‌های[۴] غیر آبلی، $Pr(G)\leq\frac{p^۲+p-۱}{p^۳}$.

۶. اگر G ساده و غیر آبلی باشد، آن‌گاه $Pr(G)\leq\frac{۱}{۱۲}$ و تساوی تنها برای گروه $A_۵$ رخ می‌دهد.

۷. به طور کلی در مورد ویژگی‌های احتمالاتی گروه‌های متناهی تحقیق کنید. به طور خاص، در مورد حدسی از دیکسون [۲] می‌توانید فکر کنید: احتمال این که دو عضو که به تصادف از یک گروه متناهی ساده‌ی G انتخاب می‌شوند، G را تولید کنند، به طور یکنواخت به یک میل می‌کند وقتی که مرتبه‌ی G به بی‌نهایت میل می‌کند.

در انتها یک مسأله‌ی دشوار هم مطرح می‌کنیم: کران‌های پایینی برای $Pr(G)$ بیابید. به راحتی می‌توان دید که کران ثابتی در حالت کلی وجود ندارد، اما اردوش و توران [۳] نشان داده‌اند که $Pr(G)\geq\frac{\log_۲\log_۲|G|}{G}$. در مرجع [۱] نیز کران‌های پایینی برای p-گروه‌های از مرتبه‌ی پایین ارائه‌شده است.

مراجع

[۱] C. Ayoub, On the number of conjugate classes in a group, Proc. Internat. Conf. Theory of Groups, Gordon and Breach, New York, 1967, pp. 7-10.

[۲] J. Dixon, The probability of generating the symmetric group, Math. Z., 110(1969) 199-205.

[۳] P. Erdos and P. Turan, On some problems of a statistical group-theory, IV, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 19 (1968) 413-435.

[۴] P. Halmos, Measure Theory, Van Nostrand, Princeton, N. J. 1950.

[۵] W. Scott, Group Theory, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. 1964.

[۴] یعنی گروه‌هایی که مرتبه‌ی آن‌ها توانی از p است

الگوریتم جستجوی گوگل

محمد علی کرمی

گوگل[۱] موفق‌ترین موتور جستجو[۲]ی دنیاست و شاید یکی از رمزهای موفقیت آن، الگوریتم جستجوی آن باشد. در این نوشتار سعی می‌کنیم ایده‌ی استفاده شده توسط گوگل برای جستجو در شبکه‌ی اینترنت را توضیح دهیم.

مدلی که برای شبکه‌ی اینترنت می‌توان در نظر گرفت، یک گراف جهت‌دار است که در آن راس‌ها نماینده‌ی سایت‌های اینترنتی (یا سرور آن سایت‌ها) و یال‌های جهت‌دار نماینده‌ی وجود یک پیوند[۳] از سایت مبدا به سایت مقصد است. اگر بتوانیم به هر سایت، یک عدد به عنوان ارزش یا معیار اهمیت نسبت دهیم، آن‌گاه می‌توانیم برای جستجو در اینترنت، در میان سایت‌هایی که واژه‌ی جستجو شده را دربردارند، آن‌هایی که ارزش بیشتری گرفته‌اند را زودتر نشان داده و در اولویت بالاتر قرار دهیم. بنابراین گوگل در کنار یک الگوریتم سریع و کارآمد جستجوی رشته[۴] از یک الگوریتم تخصیص ارزش به صفحات وب نیز استفاده می‌کند که Page Rank نام دارد.

پس هدف یافتن تابعی مانند $PR : V \to \mathbb{R}^+$ است که در آن V مجموعه‌ی راس‌های گراف یا همان مجموعه‌ی کل سایت‌های اینترنت است و فرض می‌کنیم هر سایت یک Page Rank مثبت دارد (ارزش هیچ سایتی را صفر در نظر نمی‌گیریم)، البته این موضوع زیاد اهمیتی ندارد ولی چیزی که مهم است این است که ارزش هیچ سایتی منفی نیست، یعنی به نحوی دنبال یک اندازه احتمال روی شبکه‌ی اینترنت هستیم به گونه‌ای که سایت‌های با اهمیت‌تر، احتمال بالاتری بیابند.

مبتکر ایده‌ی Page Rank لری پیج[۵]، که خود یکی از دو موسس شرکت گوگل نیز هست، ایده‌ی این ارزش‌گذاری را از روش ارزش‌گذاری مقالات علمی اخذ کرد. مقالات علمی براساس تعداد ارجاع[۶] و تعداد نقل قول[۷] ارزش‌گذاری می‌شوند و هر چه به مقاله‌ای بیشتر ارجاع داده شده باشد، نشان از با اهمیت‌تر بودن و پرکاربردتر بودن آن مقاله دارد. از طرفی اگر در مقاله‌ای با اهمیت، به یک مقاله‌ی دیگر ارجاع داده شده باشد، ارزش آن مقاله‌ی دیگر هم بالا می‌رود، زیرا به نوعی تبلیغ شده است. بنابراین ما انتظار داریم دو عامل در افزایش Page Rank یک سایت اینترنتی تاثیر مثبت داشته باشند:

۱. تعداد بالای سایت‌هایی که به سایت موردنظر پیوند دارند.

۲. وجود سایت‌های با اهمیت، یا با Page Rank بالا که به سایت موردنظر پیوند دارند.

بنابراین تعریف Page Rank به نوعی بازگشتی است و دور دارد؛ زیرا ارزش سایتی بالاتر است که تعداد بیش‌تری سایت با ارزش بالا به آن پیوند داشته باشند. به زبان احتمالات PR (همان Page Rank) یک توزیع احتمال روی شبکه‌ی اینترنت است که نشان می‌دهد اگر شخصی با شروع از یک سایت به تصادف و با کلیک کردن روی پیوندها به تصادف و احتمال برابر، از سایتی به سایت دیگر برود، بعد از مدت نسبتا طولانی با توزیع PR در سایت‌ها خواهد گشت، یعنی با احتمال بیش‌تری در سایت‌های دارای PR بیش‌تر قرار خواهند داشت. (به نسبت $\frac{PR(s)}{\sum_t PR(t)}$ از زمان را در سایت s خواهد گذراند.) بنابراین می‌توان این کار را به منزله‌ی یک فرآیند تصادفی مارکوف نگریست که احتمال گذر از سایتی به سایت دیگر برای تمام پیوندهای درون یک سایت مساوی فرض می‌شود و ما به دنبال توزیع پایا و نهایی این فرآیند هستیم که همان PR است.

توزیع پایا توزیعی است که تحت انجام فرآیند مارکوف بدون تغییر باقی بماند. بنابراین برای هر سایت u، اگر B_u مجموعه‌ی سایت‌هایی باشد که به u پیوند دارند و اگر برای هر سایت w، $L(w)$ را تعداد پیوندهای سایت w به بیرون بگیریم (تکرار مجاز نیست و از هر سایت به سایت دیگری حداکثر یک پیوند داریم و از هیچ سایتی به خودش پیوند نداریم) در این صورت:

$$PR(u) = \sum_{v \in B_u} \frac{PR(v)}{L(v)} \qquad (۱)$$

زیرا احتمال این که در گام بعد در u باشیم از طرفی $PR(u)$ است و از طرف دیگر، در حال حاضر باید در یکی از سایت‌های B_u باشیم تا بتوانیم در گام بعد به u برویم و برای هر سایت که به u پیوند دارد مانند v، احتمال رفتن از v به u در یک گام $\frac{1}{L(v)}$ است. (قدم زدن تصادفی با گام‌های مستقل و در هر راس به احتمال برابر را در نظر بگیرید.)

برای پاره‌ای از سهولت‌های ریاضی در جهت حل یا محاسبه‌ی تقریبی جواب دستگاه معادلات (۱) یک فرض را اضافه می‌کنیم؛

[۱] Google
[۲] Search Engine
[۳] Link
[۴] String Matching
[۵] Larry Page
[۶] Reference
[۷] Citation

فرضی که اضافه می‌کنیم این است که قدم زدن تصادفی روی وب، در هر گام به احتمال d به یکی از پیوندهای موجود می‌رود و به احتمال $۱-d$، یک سایت کاملا تصادفی درون شبکه‌ی اینترنت را انتخاب می‌کند و به آن می‌رود. یک دلیل برای چنین فرضی این است که ممکن است بعد از چند کلیک درون سایتی برویم که هیچ پیوندی به بیرون ندارد، در این صورت داخل آن گیر می‌افتیم. برای رفع این مشکل کار را با یک سایت کاملا تصادفی ادامه می‌دهیم. دلیل دیگر افزودن این عامل (به نام Damping Factor) این است که یک کاربر ممکن است بعد از دنبال کردن لینک‌های متوالی خسته شده و به کلی با یک سایت جدید کار را ادامه دهد. دلیل سوم هم این است که معادلاتی که با در نظر گرفتن Damping Factor نوشته می‌شوند از لحاظ تحلیلی بهتر و راحت‌تر حل می‌شوند و از لحاظ محاسباتی نیز بهتر می‌توان PR را با الگوریتم‌هایی تخمین زد. (مثلا در حالت اول که $d=۱$ بود ممکن بود فرآیند مارکوف نقاط جاذب داشته باشد یا تناوبی شود و در این دو حالت توزیع پایای خوش‌تعریفی نمی‌شد داد.) پس معادلات به این شکل در می‌آید:

$$PR(p_i)=\frac{۱-d}{N}+d\sum_{p_j\in M(p_i)}\frac{PR(p_j)}{L(p_j)} \qquad (۲)$$

که p_j سایت iام، N تعداد کل سایت‌ها، d عددی بین صفر و یک (معمولا d را ۸۵٪ می‌گیرند، که به صورت تجربی به دست آمده است) و $M(p_i)$ همان B_{p_i} است.

دستگاه N معادله، N مجهول (۲) را به شکل فشرده می‌توان چنین نوشت:

$$R=\frac{۱-d}{N}\begin{bmatrix}۱\\۱\\۱\\\vdots\\۱\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}l(p_۱,p_۱) & l(p_۱,p_۲) & \cdots & l(p_۱,p_N)\\ l(p_۲,p_۱) & l(p_۲,p_۲) & \cdots & l(p_۲,p_N)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ l(p_N,p_۱) & l(p_N,p_۲) & \cdots & l(p_N,p_N)\end{bmatrix}R \qquad (۳)$$

که

$$R=\begin{bmatrix}PR(p_۱)\\\vdots\\PR(p_N)\end{bmatrix}$$

و

$$l(p_i,p_j)=\begin{cases}۰ & \text{اگر } p_j \text{ به } p_i \text{ پیوند نداشته باشد}\\ \frac{۱}{L(p_j)} & \text{اگر } p_j \text{ به } p_i \text{ پیوند داشته باشد}\end{cases}$$

بنابراین برای هر j: $\sum_{i=۱}^{N} l(p_i,p_j)=۱$.

ماتریس $N\times N$ در (۳) یک ماتریس تصادفی است و اگر جمله‌ی

$$\frac{۱-d}{N}\begin{bmatrix}۱\\۱\\۱\\\vdots\\۱\end{bmatrix}$$

را نیز با آن ترکیب کنیم به معادله‌ای به شکل $R=AR$ می‌رسیم که A یک ماتریس تصادفی متناظر با یک فرآیند مارکوف غیرتناوبی تحویل‌ناپذیر است. کافی است بنویسیم:

$$R=MR+LR$$

که M ماتریسی است که تمام درایه‌های آن $\frac{۱-d}{N}$ است و L همان ماتریس حاوی درایه‌های $l(p_i,p_j)$ است. بنابراین بایستی بردار ویژه‌ی متناظر با مقدار ویژه‌ی ۱ را پیدا کنیم که طبق قضیه‌ای در فرآیندهای تصادفی وجود دارد و یکتاست و درایه‌های آن بردار، مثبت است و می‌تواند در صورت نرمالیزه شدن به عنوان R یا همان Page Rank استفاده شود.

با توجه به این که طیف ماتریس A به نحوی است که فقط چند مقدار ویژه‌ی اول آن از اندازه‌ی قابل توجهی برخوردارند، لذا بردار R (توزیع پایا) با دقت نسبتا بالا و فقط با تعداد کمی مرحله از الگوریتم تکرر، یعنی محاسبه‌ی $v_۰, Av_۰, A^۲v_۰, \ldots$ قابل محاسبه است [۱].

یک نقطه‌ی ضعف الگوریتم Page Rank این است که به صفحات قدیمی اهمیت بیش‌تری می‌دهد و یک صفحه‌ی وب جدید و تازه تاسیس حتی در صورت خوب بودن، PR بالایی نمی‌گیرد مگر این که تا حد زیادی محبوب شده باشد و تعدادی از صفحات با PR بالای قدیمی به آن ارجاع داده باشند.

روش‌های تقریبی و محاسباتی زیادی برای محاسبه‌ی سریع و کاربردی Page Rank ارائه شده است [۲] و [۳].

یکی از این الگوریتم‌ها یک الگوریتم توزیعی[۸] و تقریبی ساده و سریع است که از ایده‌ی قدم‌زدن تصادفی استفاده می‌کند [۲]. الگوریتم توزیعی، الگوریتمی است که بتوان پردازش موردنیاز برای آن را بر روی تعدادی پردازنده تقسیم کرد و به طور موازی اجرا کرده و سپس نتایج هر بخش را گرفته و با هم ترکیب کرد و جواب نهایی را به دست آورد. (مثلا می‌توان مرتب‌سازی تعداد زیادی عدد را به روش توزیعی انجام داد که خود مساله‌ی جالبی است.) این الگوریتم در $O(\frac{\log n}{\epsilon})$ مرحله، با احتمال زیاد Page Rank را محاسبه می‌کند که n تعداد کل سایت‌ها و ϵ همان d در (۲) است. الگوریتم‌هایی با هزینه‌ی $O(\sqrt{\frac{\log n}{\epsilon}})$ و $O(\frac{\sqrt{\log n}}{\epsilon})$ نیز در شرایط خاص دیگری وجود

[۸] Distributed

دارد. روش دیگر برای محاسبه‌ی تقریبی PR، پیدا کردن بردار ویژه‌ی ماتریس با روش تکرری توانی است. روش دیگری هم می‌شد برای محاسبه‌ی PR به کار برد و آن پیدا کردن بردار ویژه‌ی نظیر مقدار ویژه‌ی ۱ از طریق حل دستگاه معادلات مذکور است. ولی این روش دارای کاربرد عملی نیست، زیرا حل دستگاه N معادله و N مجهول، یا وارون کردن یک ماتریس $N \times N$ وقتی N از مرتبه‌ی ۱.۵ میلیارد صفحه‌ی وب است، چندان کار به صرفه‌ای نیست و علاوه بر هزینه‌ی بالای محاسباتی و زمانی، ممکن است به دلیل خطای محاسباتی در پیدا کردن وارون ماتریس و پایدار نبودن الگوریتم‌های وارون‌سازی ماتریس، PR به کلی غلط به دست بیاید. روش تکرری توانی برای این مقصود بهتر است که در آن از توزیع اولیه‌ی v_0، مثلا توزیع یکنواخت شروع می‌کنیم و دنباله‌ی $v_0, Av_0, A^2v_0, \ldots$ را محاسبه می‌کنیم. بعد از تعداد کمی مرحله، مثلا k مرحله طبق قضیه‌ای در فرآیندهای تصادفی با تقریب خوبی $A^k v_0$ با R برابر می‌شود و همین روش تکرری نیز الگوریتم‌های توزیعی دارد.

تلاش‌هایی در راستای دستکاری Page Rank

برخی مدیران سایت‌ها تلاش می‌کنند PR خود را به شکل مصنوعی بالا ببرند، مثلا تعداد زیادی پیوند از سایت‌های بی‌اهمیت یا ضعیف به سایت خود ایجاد کنند. هم‌چنین نوعی کسب و کار پدید آمده که در آن برخی سایت‌های مهم و پربازدید و با PR بالا، با گرفتن مبالغی، پیوندهایی به سایت‌هایی که به دنبال کسب PR بالاتر در موتور جستجوی گوگل هستند، ایجاد می‌کنند. خود گوگل با این کار مخالف است و معتقد است کیفیت موتور جستجو را کاهش می‌دهد و تهدید کرده است که این نوع پیوندها را در صورت کشف در نتیجه‌ی جستجو بی‌اثر خواهد ساخت.

البته خود گوگل کاملا به Page Rank خود برای مرتب‌سازی سایت‌ها وفادار نیست و بعضی از سایت‌ها را با دید تبلیغاتی و با گرفتن دستمزد در میان نتایج جستجو نشان می‌دهد، هم‌چنین گوگل از روش‌های دیگری نیز برای بهبود و ارتقاء نتایج جستجو استفاده می‌کند، به ویژه روش‌هایی برای تشخیص مزرعه‌های پیوندی[۹] (مجموعه سایت‌هایی که به طور بیش از حد و غیرعادی و احتمالا عمدی به هم پیوند دارند) و خرید و فروش پیوند. در ضمن به این نکته باید اشاره کرد که گوگل تنها به این الگوریتم اکتفا نکرده و از روش‌های بسیار متنوعی در علوم مختلف برای بهبود نتایج جستجو استفاده می‌کند و خیلی از این روش‌ها تجربی است، در ضمن برخی از راه‌کارهای گوگل مخصوصا قسمت‌های علمی و مربوط به پیاده‌سازی و مبارزه با تقلب، محرمانه است.

[۹] Link Farms

مراجع

[1] Taher Haveliwala and Sepandar Kamvar, The Second Eigenvalue of the Google Matrix, Stanford University Techical Report:7056, March 2003.

[2] Atish Das Sarma, Anisur Rahaman Molla, Gopal Pandurangan and Eli Upfal, Fast Distributed PageRank Computation, 2012.

[3] Gianna M. Del Corso, Antonio Gull and Francesco Romani, Fast PageRank Computation via a Sparse Linear System, Internet Mathematics, Lecture notes in Computer Science 2(3):118, 2005.

[4] S. Brin and L. Page, The Anatomy of Large-Scale Hypertextual Web Search Engine, Computer Networks and ISDN Systems, ISSN 0169-7552, 1998.

[5] David Rise and Mark Malseed, The Google Story, ISBN 0553-80457-x, 2005.

ترجمه‌ی فارسی این کتاب با نام سرگذشت شگفت‌انگیز گوگل، ترجمه‌ی سینا قربانلو توسط انتشارات مبلغان به چاپ رسیده است.

[6] L. Page, S. Brin, R. Motwani and T. Winograd, The PageRank Citation Ranking: Bringing Order to the Web, 1999.

قضیه‌ی بئر و کاربردهایی از آن

خشایار فیلُم

۱ مقدمه

«قضیه‌ی بئر» [۱] یا آنگونه که در برخی از مراجع نامیده می‌شود «قضیه‌ی رسته‌ی بئر»[۲]، بخشی ضروری از هر درسِ استاندارد در آنالیز ۱ یا توپولوژی عمومی است. در این مقاله‌ی کوتاه می‌خواهیم با پرداختن به برخی از کاربردهای این قضیه در شاخه‌های گوناگون ریاضی، قدرت این قضیه را نشان دهیم. به طور شهودی قضیه‌ی بئر تضمین می‌کند که زیرمجموعه‌ی خاصی از یک فضای توپولوژیک به اندازه‌ی کافی «بزرگ» است و از آنجا می‌توان وجود اشیاء خاصی را نتیجه گرفت یا حتی نشان داد که «به طور نوعی»[۳] هر نقطه از فضا به زیرمجموعه‌ی مذکور تعلق دارد. ابتدا به صورت متداولی از این قضیه می‌پردازیم که در هر درس استانداردِ آنالیز ۱ بیان می‌شود :

قضیه ۱. *اگر (X,d) یک فضای متریک کامل[۴] باشد و $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های باز و چگال، آنگاه زیرمجموعه‌ی $\cap_{n=1}^{\infty}U_n$ از فضای متریکِ X نیز چگال است. علی‌الخصوص $\cap_{n=1}^{\infty}U_n \neq \emptyset$.*

(یادآوری می‌کنیم که کامل بودن یک فضای متریک به معنای همگراییِ هر دنباله‌ی کوشی در آن است.) اثبات این قضیه چندان سخت نیست، ولی در اینجا به آن نمی‌پردازیم و خواننده را به [۴] یا [۵] ارجاع می‌دهیم. طبعاً با تبدیل مجموعه‌های باز به بسته، با مکمل کردن می‌توان صورت معادل زیر را هم بیان کرد [۵]:

قضیه ۲. *اگر (X,d) یک فضای متریک کامل باشد و $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های بسته‌ای که نقطه‌ی درونی ندارند، آنگاه زیرمجموعه‌ی $\cup_{n=1}^{\infty}A_n$ از فضای متریکِ X هم فاقد نقطه‌ی درونی است. علی‌الخصوص $\cup_{n=1}^{\infty}A_n \neq X$.*

در واقع به وضوح اشتراکِ تعدادی متناهی از زیرمجموعه‌های باز و چگال یا اجتماعِ تعدادی متناهی از زیرمجموعه‌های بسته و بدون نقطه‌ی درونی، خودِ زیرمجموعه‌ای از این دست خواهد بود. نکته‌ی اساسی در هردو صورت‌بندیِ قضیه آن است که اشتراک یا اجتماعِ خانواده‌ای نامتناهی از این زیرمجموعه‌ها در نظر گرفته شده است.

از نظر تاریخی، جالب است بدانید که ریاضیدانِ فرانسوی بئر[۶]، قضیه‌ی مذکور را (برای $\mathbb{R}^n$) در سالِ ۱۸۹۹ و در پایان‌نامه‌ی دکترای خود اثبات نمود، در حالی که دو سال زودتر در ۱۸۹۷ این قضیه برای فضای اعداد حقیقی توسط ریاضیدانِ آمریکایی اوسگود[۷] ثابت شده بود![۸]

قبل از ادامه‌ی کار به یادآوریِ چند مفهوم می‌پردازیم: در یک فضای توپولوژیکِ X زیرمجموعه‌ی $A \subseteq X$ را G_δ می‌نامیم هرگاه اشتراکِ خانواده‌ای شمارا از زیرمجموعه‌های باز باشد و F_σ می‌نامیم هرگاه اجتماعِ خانواده‌ای شمارا از زیرمجموعه‌های بسته باشد. A «هیچ‌جا چگال»[۹] نامیده می‌شود اگر بستارش در X فاقدِ نقطه‌ی درونی باشد. یک زیرمجموعه‌ی «از رسته‌ی اول » از X[۱۰] (که در برخی مراجع اصطلاحِ «نحیف» [۱۱] هم برای آن به کار می‌رود.) عبارت است از زیرمجموعه‌ای که اجتماعِ تعدادی شمارا زیرمجموعه‌ی هیچ‌جا چگالِ X باشد. این دسته از زیرمجموعه‌ها را می‌توان مشابه توپولوژیکِ زیرمجموعه‌های از اندازه‌ی صفر در نظر گرفت[۱۲]. یک زیرمجموعه‌ی «از رسته‌ی دوم» [۱۳] زیرمجموعه‌ای است که از رسته‌ی اول نباشد! حال می‌توان توضیح داد که چرا گاهی از اصطلاحِ «قضیه‌ی رسته‌ی بئر» استفاده می‌گردد. حکم قضیه‌ی ۱ را می‌توان اینگونه بیان کرد که فضای متریکِ کامل (که البته تهی نباشد!) از رسته‌ی اول نیست. در نهایت، زیرمجموعه‌ای از فضای توپولوژیکِ X «پسمانده»[۱۴] تعریف می‌شود [۱۵] اگر مکملش از رسته‌ی اول باشد. اینها به طور شهودی زیرمجموعه‌های «بزرگ» X هستند و اگر ویژگی‌ای برای نقاطِ چنین زیرمجموعه‌ای از X برقرار باشد، می‌گوییم آن ویژگی «نوعی»[۱۶] است. حکم قضایای ۱و۲ در فضاهای توپولوژیک هم معنی دارد. پس می‌توان تعریف کلی زیر را ارائه کرد:

---

[۱] Baire Theorem

[۲] Baire Category Theorem

[۳] generically

[۴] complete

[۵] واضح است که در هردو قضیه $X \neq \emptyset$ فرض شده!

[۶] Rene-Louis Baire (1874-1932)

[۷] William Fogg Osgood (1864-1943)

[۸] رجوع کنید به [۳].

[۹] nowhere dense

[۱۰] of first category

[۱۱] meager

[۱۲] البته باید توجه کرد که ممکن است مفاهیم کوچک بودنی که از دو تعریفِ «اندازه‌ی صفر» و «نحیف» استنباط می‌شوند، در مواردی متضاد باشند. مثلاً محور حقیقی را می‌توان به اجتماعِ زیرمجموعه‌ای از اندازه‌ی صفر و زیرمجموعه‌ای نحیف افراز نمود (معادلاً $\mathbb{R}$ زیرمجموعه‌ای پسمانده و از اندازه‌ی صفر دارد. رجوع کنید به تمرینِ ۷.) و حال هریک از این مجموعه‌ها در یکی از این تعابیر بزرگ و در تعبیرِ دیگر کوچک خواهد بود.

[۱۳] of second category

[۱۴] residual

[۱۵] ترجمه‌های «نحیف» برای meager و «پسمانده» برای residual از ترجمه‌ی فارسی کتابِ رویدن اقتباس شده است.

[۱۶] generic

تعریف ۳. *فضای توپولوژیکِ X یک «فضای بئر» [17] نامیده می‌شود، هرگاه اگر $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های بسته و با درونِ تهی از X باشد، آنگاه درونِ $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ هم تهی شود.*

پس یک فضای توپولوژیک، فضایی بئر است اگر و تنها اگر هر باز ناتهی از آن از رسته‌ی دوم باشد و همچنین قضیه‌ی ۱ را می‌توان اینگونه تعبیر کرد که هر فضای متریکِ کامل، یک فضای بئر است. خانواده‌های دیگری از فضاهای توپولوژیک نیز موجودند که بئر هستند. به عنوان مثال در [۵] ثابت شده که هر فضای توپولوژیکِ هاسدورف و فشرده حائز این ویژگی است.

تمرین ۴. *الف) ثابت کنید هر باز از یک فضای بئر، خود در توپولوژی القایی فضایی بئر است.*

ب) *نشان دهید اگر هر نقطه‌ی x از فضای توپولوژیکِ X همسایگی بازی داشته باشد که (در توپولوژی القایی از X) بئر باشد، آنگاه فضای X هم بئر خواهد بود.*

پ) *از قسمت قبل نتیجه بگیرید که هر فضای توپولوژیکِ موضعاً فشرده یک فضای بئر است.*

ت) *ثابت کنید مکملِ زیرمجموعه‌ای شمارا در فضای بئری که در آن تک‌نقطه‌ای‌ها بسته‌اند، خود با توپولوژی القایی یک فضای بئر است.*

ث) *با در نظر گرفتنِ خانواده‌ی $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ از فضاهای توپولوژیکِ بئر، نشان دهید $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ نیز در توپولوژیِ حاصلضربی بئر است.*

ج) *با ذکر یک مثال نقض، تحقیق کنید که حکمِ قضیه‌ی ۱ برای یک خانواده‌ی ناشمارا از زیرمجموعه‌های باز و چگال لزوماً برقرار نیست.*

از هریک از قسمت‌های (الف) و (پ) در تمرین فوق می‌توان نتیجه گرفت که هر بازی از $\mathbb{R}^n$ یک فضای بئر است.

۲ حلِ چند مثال

حال که صورتِ قضیه‌ی بئر را می‌دانیم، با حل چند مسأله‌ی جالب (که البته برخی از آنها در تمرینات به شما محول شده!) قدرتِ این قضیه را خواهیم دید:

[17] Baire space

مثال ۵. *زیرمجموعه‌ی $\mathbb{Q}$ از $\mathbb{R}$، G_δ نیست. چرا که در غیر این صورت، خانواده‌ی $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ از بازهای $\mathbb{R}$ موجود خواهد بود که برای آن $\cap_{n=1}^{\infty} U_n = \mathbb{Q}$. حال مجموعه‌ی شمارای $\mathbb{Q}$ را به شیوه‌ای دلخواه مانند $\mathbb{Q}=\{r_1,r_2,\dots,r_n,\dots\}$ شماره‌گذاری کنید. یک زیرمجموعه‌ی باز از $\mathbb{R}$ با حذف یک نقطه هم باز می‌ماند. پس برای هر n، $U_i-\{r_i\}$ هم در $\mathbb{R}$ باز است و به علاوه چون تمامی اعداد گویا به جز یکی را دربردارد، چگال نیز هست. لذا بنابر قضیه‌ی بئر $\cap_{n=1}^{\infty}(U_n-\{r_n\})$ باید زیرمجموعه‌ای چگال از $\mathbb{R}$ باشد، در حالی که برابر است با $\cap_{n=1}^{\infty} U_n-\{r_1,r_2,\dots\}=\mathbb{Q}-\{r_1,r_2,\dots\}=\emptyset$.*

با دانستنِ این حکم، می‌توان به این گزاره‌ی معروف پرداخت: «هیچ تابع پیوسته‌ی $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ای که نقاط پیوستگی‌اش دقیقاً مجموعه‌ی اعداد گویا باشد موجود نیست. چرا که به سادگی می‌توان دید که مجموعه‌ی نقاط پیوستگیِ یک تابع زیرمجموعه‌ای G_δ است (اگر X فضایی توپولوژیک و $g: X\to\mathbb{R}$ تابعی دلخواه باشد، با تعریفِ U_n به عنوان اجتماعِ تمامی بازهای V از X که $diam(g(V))<\frac{1}{n}$[18]، به وضوح زیرمجموعه‌ی نقاطی از X که g در آنها پیوسته است با $\cap_{n=1}^{\infty} U_n$ داده می‌شود که G_δ است.) و در نتیجه از آنجا که دیدیم $\mathbb{Q}$، G_δ نیست، امکان ندارد تابعِ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تنها در نقاط گویا پیوسته باشد.

جالب است بدانید که نقاط پیوستگیِ یک تابعِ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (که ثابت کردیم نمی‌تواند برابرِ $\mathbb{Q}$ باشد.) ممکن است برابر زیرمجموعه‌ی اعداد گنگ شود:

تمرین ۶. تحقیق کنید

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{q} & \text{اگر } x=\frac{p}{q} \text{ که در آن } p\in\mathbb{Z} \text{ و } q\in\mathbb{N} \text{ و } (p,q)=1\\ 0 & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

در نقاط گنگ پیوسته است و در نقاط گویا ناپیوسته.

یک نتیجه‌ی معروف دیگر مربوط به نقاط ناپیوستگی توابع که به کمک قضیه‌ی بئر ثابت می‌شود:

تمرین ۷. *در این تمرین نشان می‌دهیم که حد نقطه به نقطه‌ی دنباله‌ای از توابع پیوسته، باید بر زیرمجموعه‌ای چگال از دامنه‌ی تعریف پیوسته باشد. $\{f_n:[a,b]\to\mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$ را دنباله‌ای از توابع پیوسته بگیرید که به طور نقطه به نقطه به $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ همگرایند.*

الف) *برای هر $\theta>0$ و $n\in\mathbb{N}$ قرار دهید:*

$$F_n=\{t\in[a,b]\mid \forall k,m\geq n: |f_k(t)-f_m(t)|\leq\theta\}$$

نشان دهید هر F_n بسته است و $\cup_{n\in\mathbb{N}} F_n=[a,b]$.

[18] منظور قطرِ زیرمجموعه‌ی $g(V)$ از $\mathbb{R}$ است، یعنی سوپریممِ فاصله‌ی دو نقطه از این مجموعه.

ب) فرض کنید $\epsilon > 0$ و I زیربازه‌ای بسته و به طول مثبت از $[a,b]$ باشد. به کمک قضیه‌ی بئر و (الف) نشان دهید که یک بازه‌ی به طول مثبت و بسته‌ی J مشمول در $Int(I)$ موجود است به قسمی که $|f(t)-f(s)| \leq \epsilon$ برای هر $s,t \in J$.

پ) I را یک زیربازه‌ی بسته و به طول مثبتِ دلخواه از $[a,b]$ بگیرید. با استفاده‌ی مکرر از (ب) یک دنباله‌ی $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ از زیربازه‌های بسته و به طول مثبت از I بسازید با این خواص که:

۱) $I_1 \supset int(I_1) \supset I_2 \supset int(I_2) \supset I_3 \dots$

۲) برای هر $s,t \in I_n$: $|f(t)-f(s)| \leq \frac{1}{n}$.

تحقیق کنید تحت شرایط فوق $\cap_{n=1}^{\infty} I_n$ ناتهی است و f در نقاط واقع در آن پیوسته است.

ت) از قسمت قبلی نتیجه بگیرید f بر زیرمجموعه‌ای چگال از $[a,b]$ پیوسته است.

در مثالِ ۵ دیدیم که زیرمجموعه‌ی چگال و از اندازه‌ی صفرِ $\mathbb{Q}$ از اعداد حقیقی، G_δ نیست. معهذا زیرمجموعه‌های چگال و اندازه‌ی صفری از $\mathbb{R}$ موجودند که G_δ نیز هستند[19]:

تمرین ۸. فرض کنید اعداد گویا به صورتِ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ شماره‌گذاری شده باشند و قرار دهید:

$$E = \cap_{m=1}^{\infty} \cup_{n=1}^{\infty} \left(r_n - \frac{1}{2^{n+m}}, r_n + \frac{1}{2^{n+m}}\right)$$

الف) تحقیق کنید E در $\mathbb{R}$، G_δ، چگال و از اندازه‌ی صفر است.

ب) با به کار بردنِ قضیه‌ی بئر، ثابت کنید برای هر همیومورفیسمِ $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ داریم: $h(E) \cap E \neq \emptyset$.

مثال ۹. هر فضای بئر مانندِ X که زیرمجموعه‌های تک‌نقطه‌ای در آن بسته باشند [20] و به علاوه نقطه‌ی تنها (یعنی نقطه‌ای همچون $x \in X$ که برای آن $\{x\}$ باز باشد.) نداشته باشد ناشماراست. چرا که در غیراین صورت با درنظرگرفتنِ X به صورت $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ و قرار دادنِ $U_n = X - \{x_n\}$، هر U_n به دلیلِ بسته بودنِ $\{x_n\}$ باز و به دلیل باز نبودنِ $\{x_n\}$ چگال است. پس بنابر قضیه‌ی بئر، $\cap_{n=1}^{\infty} U_n$ باید چگال باشد در حالی که این اشتراک هیچ‌یک از x_n ها را دربرندارد و لذا تهی است! تناقض حاصله حکم مطلوب را بدست می‌دهد. به ویژه توجه کنید که این نشان می‌دهد فضاهای متریک کامل یا فضاهای توپولوژیکِ فشرده و هاسدورف به شرط عدم وجود نقاط تنها ناشمارا خواهند بود.

مثال ۱۰. ثابت می‌کنیم برای $n \geq 2$ هیچ نگاشتِ پیوسته، یک‌به‌یک و پوشای $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ موجود نیست. فرض کنید اینگونه نباشد و چنین fای را در نظر بگیرید. تنها ویژگی‌ای از یک همیومورفیسم که ممکن است نگاشتی با خواصِ ذکر شده برای f حائز آن نباشد، عبارت است از پیوستگیِ وارون. اگر بدانیم چنین نگاشتی بسته نیز هست، پیوستگیِ وارون و از آنجا همیومورفیسم بودن تضمین می‌شود. نگاشتِ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ لزومی ندارد بسته باشد، ولی به دلیلِ پیوستگی، زیرمجموعه‌ای فشرده از دامنه را به زیرمجموعه‌ای فشرده و به تبع آن بسته از $\mathbb{R}^n$ می‌برد. بنابراین با تحدیدِ f زیرمجموعه‌ای فشرده از دامنه همچون بازه‌ی بسته‌ی $[a,b]$، یک همیومورفیسمِ $[a,b] \to f([a,b])$ حاصل می‌شود. زیرمجموعه‌ی همبندِ $f([a,b])$ از $\mathbb{R}^n$ فاقد نقطه‌ی درونی است. چرا که اگر یک گوی بازِ $B \neq \emptyset$ از $\mathbb{R}^n$ را شامل شود، با حذف هریک از نامتناهی نقطه‌ی متعلق به B هم همبند می‌ماند. زیرا به دلیلِ $n \geq 2$، با حذف نقطه‌ای دلخواه از هر گوی باز در $\mathbb{R}^n$ همچون B، زیرمجموعه‌ی باقی‌مانده نیز همبند خواهد بود. امری که به سادگی نشان می‌دهد برای هر $x \in B$، $f([a,b]) - \{x\}$ هم همبند است. ولی به دلیلِ همیومورف بودنِ $f([a,b])$ با بازه‌ی $[a,b]$، این بازه هم باید حائزِ ویژگی‌ای مشابه باشد: نامتناهی نقطه از آن موجودند که با حذفشان فضای حاصل هم همبند خواهد بود، گزاره‌ای که به وضوح غلط است. حال روشن است که چگونه باید با به کار بردنِ قضیه‌ی بئر فرض خلف را به تناقض بکشانیم: بنابر مطالب فوق تصویر هر بازه‌ی فشرده تحتِ f زیرمجموعه‌ای بسته و بدون نقطه‌ی درونی از $\mathbb{R}^n$ است و بنابراین $\mathbb{R}^n = f(\mathbb{R})$ (توجه کنید که f پوشا بود.) نمی‌تواند اجتماع تعدادی شمارا از چنین زیرمجموعه‌هایی باشد، در حالی که $f(\mathbb{R}) = \cup_{n \in \mathbb{N}} f([-n,n])$.

مثال ۱۱. آیا اگر تابع پیوسته‌ی $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ چنان باشد که برای هر $x \in \mathbb{R}^+$ دنباله‌ی $\{f(nx)\}_{n=1}^{\infty}$ به صفر همگرا شود، می‌توان نتیجه گرفت که $\lim_{t \to \infty} f(t) = 0$؟ به کمک قضیه‌ی بئر خواهیم دید که پاسخ مثبت است. یک $\epsilon > 0$ تثبیت کنید. $\mathbb{R}^+$ را-که چون بازی از فضای متریک کاملِ $\mathbb{R}$ است، بنابر ۴الف خود یک فضای بئر است- به دلیل ویژگیِ مفروض برای f، می‌توان اینگونه نوشت:

$$\mathbb{R}^+ = \cup_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R}^+ | \ |f(mx)| \leq \epsilon \ \ \forall m \geq n\}$$

چون f پیوسته است، زیرمجموعه‌های ظاهر شده در سمت راست بسته‌اند و حال با اعمالِ قضیه‌ی بئر، درونِ حداقل یکی از آنها ناتهی است: $0 < a < b$ و $n \in \mathbb{N}$ موجودند به قسمی که هرگاه x واقع در

[19] توجه کنید با توجه به تعاریفی که ارائه شد، یک زیرمجموعه‌ی G_δ و چگال از فضایی توپولوژیک، زیرمجموعه‌ای پسمانده به عبارت دیگر مکملِ زیرمجموعه‌ای نحیف (از رسته‌ی اول) است.

[20] به اصطلاح فضا T_1 باشد.

(a,b) و عدد طبیعیِ m بزرگتر یا مساوی با n انتخاب گردد، داشته باشیم: $\epsilon \leq |f(mx)|$. حال اگر $k \in \mathbb{N}$ از هردوی $\frac{a}{b-a}$ و n بزرگتر انتخاب شود، به سادگی می‌توان تحقیق کرد که:

$$(ka,\infty) \subseteq \cup_{m=n}^{\infty}(ma,mb)$$

آنچه که در بالا گفتیم به معنای آن است که در نقاط متعلق به سمت راستِ تساوی فوق $|f|$ از ϵ تجاوز نمی‌کند و بنابراین به ازای $x > ka$ خواهیم داشت: $\epsilon \leq |f(x)|$، امری که به دلیل دلخواه بودنِ $\epsilon > 0$، $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$ را بدست می‌دهد.

مثال ۱۲. f و g دو تابعِ هولومورف بر صفحه‌ی مختلط هستند. منظور از یک کلمه برحسب f و g چندبار ترکیبِ این توابع است در یک ترتیب دلخواه (مثلاً $f \circ g \circ g \circ f \circ f \circ f \circ g$)، که خود تابعی هولومورف بر صفحه‌ی مختلط خواهد شد. فرض کنید برای هر $z \in \mathbb{C}$ کلمه‌ای برحسب f و g موجود باشد که در z صفر شود. نشان می‌دهیم کلمه‌ای موجود است که در سرتاسر صفحه صفر است[۲۱]. اثبات ساده است: تعداد کلمات شماراست و برای هر کلمه زیرمجموعه‌ی بسته‌ای از $\mathbb{C}$ را در نظر می‌گیریم که متشکل است از نقاطی که در آنها تابع هولومورفِ متناظرِ این کلمه صفر می‌شود. شرط بیان شده به معنای آن است که اجتماعِ این خانواده‌ی شمارا از زیرمجموعه‌های بسته منطبق است بر کلِ $\mathbb{C}$. پس بنابر قضیه‌ی بئر یکی از این زیرمجموعه‌های بسته نقطه‌ی درونی دارد که به معنای آن است که کلمه‌ی متناظر به عنوان تابعی هولومورف به دامنه‌ی $\mathbb{C}$، بر بازی ناتهی صفر می‌گردد که این هم بنابر اصل یگانگی، متحد با صفر بودنِ تابع مذکور را نتیجه می‌دهد.

مثال بعدی را می‌توان ابتکاری‌ترین کاربردی از قضیه‌ی بئر در نظر گرفت که تا اینجا مطرح شده:

مثال ۱۳. به این مسأله می‌پردازیم:«فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی هموار باشد با این ویژگی که برای هر $x \in \mathbb{R}$، $n \in \mathbb{N}$ای وابسته به x موجود است که $f^{(n)}(x) = 0$. ثابت کنید f یک تابع چندجمله‌ای است.»[۲۲] به منظور حلِ این مسأله[۲۳]،برای هر عدد طبیعیِ $n \in \mathbb{N}$ قرار می‌دهیم: $S_n = \{x \mid f^{(n)}(x) = 0\}$ و

$X = \{x|$ برای هر بازه بازِ $(a,b) \ni x$، $f|_{(a,b)}$ چندجمله‌ای نیست$\}$

هردوی این زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$ بسته‌اند و به سادگی می‌توان دید که X نقطه‌ی تنها ندارد. زیرا اگر $x \in X$ یک نقطه‌ی تنها باشد، آنگاه باید بازه‌ی بازِ (u,v) حول این نقطه موجود باشد به قسمی که f حول هر نقطه از $(u,v) - \{x\}$ با یک چندجمله‌ای داده شود، امری که به دلیل هموار بودنِ f تنها وقتی می‌تواند رخ دهد که $f|_{(u,v)}$ چندجمله‌ای باشد. در واقع f باید بر هریک از بازه‌های بازِ (u,x) و (x,v) به یک چندجمله‌ای تحدید گردد و به دلیل وجود مشتقات f از همه‌ی مراتب در x، تمامی مشتقات این دو چندجمله‌ای در x یکسان هستند و بنابراین چندجمله‌ای‌ها با هم برابرند و f بر کلِ (u,v) با یک چندجمله‌ای داده خواهد شد. با اثباتِ تهی بودنِ X حکم مطلوب حاصل می‌گردد: در این صورت f حول هر نقطه با تابعی چندجمله‌ای داده خواهد شد. ولی هر دو چندجمله‌ای‌ای که بر یک باز ناتهی برابر باشند بر هم منطبقند و در نتیجه با استدلالی مبتنی بر همبندی، f باید به طور سرتاسری یک چندجمله‌ای باشد. پس فرض می‌کنیم $X \neq \emptyset$ و به تناقض می‌رسیم. ویژگی مفروض برای این تابع در صورت مسأله نتیجه می‌دهد که زیرمجموعه‌های بسته‌ی $S_n \cap X$ از X آن را می‌پوشانند. ولی X یک فضای متریکِ کامل است (زیرمجموعه‌ای بسته از فضای کاملِ $\mathbb{R}$) و لذا با به کار بردن قضیه‌ی بئر، یکی از این زیرمجموعه‌های بسته دارای درونِ ناتهی است: $n \in \mathbb{N}$ و بازه‌ی (a,b) موجودند که

$$\emptyset \neq (a,b) \cap X \subseteq S_n$$

ادعا می‌کنیم که سمت چپِ بالا برای هر $m \geq n$ مشمول در S_m نیز هست. در واقع تنها ثابت می‌کنیم که مشمول است در S_{n+1} و آنگاه با همان استدلال چون $(a,b) \cap X \subseteq S_{n+1}$، $(a,b) \cap X$ زیرمجموعه‌ی S_{n+2} هم خواهد بود و الی آخر. یک $x \in (a,b) \cap X$ دلخواه را در نظر بگیرید. از آنجا که X نقطه‌ی تنها نداشت، هر نقطه از زیرمجموعه‌ی $(a,b) \cap X$ از $\mathbb{R}$ حد دنباله‌ای از عناصر دوبدو متمایزِ این زیرمجموعه است. پس می‌توان دنباله‌ی $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ از عناصرِ $(a,b) \cap X$ را چنان برگزید که $x_k \neq x$ برای هر k و به علاوه این دنباله به x همگرا گردد. چون $\emptyset \neq (a,b) \cap X \subseteq S_n$، برای هر k، $x_k \neq x$ در S_n واقع است و لذا $\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(x_k)}{x-x_k} = 0 \Leftarrow f^{(n)}(x_k) = f^{(n)}(x) = 0$. ولی از قضیه‌ی مقدار میانگین این کسر مقدارِ مشتقِ $n+1$ام در نقطه‌ای بینِ x و x_k است. اگر $k \to \infty$، این نقاط هم مانند دنباله‌ی $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ به x همگرا می‌شوند و در نتیجه از پیوستگیِ $f^{(n+1)}$ (توجه کنید که f هموار بود): $x \in S_{n+1} \Leftarrow f^{(n+1)}(x) = 0$. تا اینجا نشان دادیم که:

$$\forall m \geq n : \emptyset \neq (a,b) \cap X \subseteq S_m$$

حال ادعا می‌کنیم که $f^{(n)}$ در همه‌ی نقاطِ (a,b) صفر است. تنها باید به نقاطِ $(a,b) - X$ بپردازیم چرا که از بالا $(a,b) \cap X$ مشمول است S_n یعنی مجموعه‌ی ریشه‌های $f^{(n)}$. چون $(a,b) \cap X$ زیرمجموعه‌ای

[۲۱] مطرح شده در شماره‌ی ۹ مجله‌ی ریاضی شریف، زمستان ۷۹

[۲۲] مطرح شده در مسابقاتِ Vojtěch Jarník، سال ۲۰۰۴

[۲۳] راه‌حل برگرفته از http://mathoverflow.net/questions/34059/if-f-is-infinitely-differentiable-then-f-coincides-with-a-polynomial

بسته و ناتهی از X بود، زیرمجموعه‌ی باز $X - (a,b)$ از $\mathbb{R}$ اجتماع تعدادی شمارا بازه‌ی باز دوبدو مجزاست که دو انتهای هریک از آنها (به جز احتمالاً a و b) در X واقعند. به منظور اثبات ادعای فوق کافی است یکی از این بازه‌ها همچون (c,d) را در نظر گرفت و نشان داد که $f^{(n)}$ بر آن متحد است با صفر. $(c,d) \cap X = \emptyset$ و لذا از تعریف X، $f|_{(c,d)}$ تابعی چندجمله‌ای به عنوان مثال از درجه‌ی t است. اگر $t < n$ که صفر بودن $f^{(n)}$ بر (c,d) بدیهی است و در غیر این صورت $t \geq n$ و $f^{(t)}$ بر (c,d) (و به تبع آن بر $[c,d]$) یک تابع ثابت ناصفر است و به ویژه $f^{(t)}(c), f^{(t)}(d) \neq 0$، در حالی که حداقل یکی از نقاط c و d به $(a,b) \cap X$ و از آنجا چون $t \geq n$ بنابر حکم ثابت شده به S_t تعلق دارند و لذا $f^{(t)}$ باید در حداقل یکی از c, d صفر باشد که چنین نیست. پس حالت $t \geq n$ رخ نمی‌دهد و نشان دادیم که $f^{(n)}$ بر بازه‌ی باز (a,b) صفر است و بنابراین $f|_{(a,b)}$ چندجمله‌ای‌ای است از درجه‌ی حداکثر n و این با توجه به چگونگی تعریف X به معنای $(a,b) \cap X = \emptyset$ است که با روش انتخاب (a,b) تناقض دارد.

تمرین ۱۴. *توابع پیوسته‌ی f_n $(n = 1, 2, \dots)$ به دامنه‌ی بازه‌ی $[a,b]$ دارای این ویژگی‌اند که هر نقطه از این بازه به ازای اعدادی طبیعی مانند $m \neq n$، ریشه‌ی معادله‌ی $f_m = f_n$ است. ثابت کنید بر زیربازه‌ای به طول مثبت از $[a,b]$ دو تا از این توابع با هم برابرند.*

تمرین ۱۵. *فرض کنید E یک فضای باناخ[24] باشد که متناهی‌البعد نیست. نشان دهید E به عنوان فضایی برداری نمی‌تواند پایه‌ای شمارا داشته باشد. (راهنمایی: اگر $\{v_1, v_2, \dots\}$ چنین پایه‌ای باشد، زیرفضاهای بسته‌ی $A_k = Span\{v_1, \dots, v_k\}$ را در نظر بگیرید و قضیه‌ی بئر را اعمال کنید.)*

تمرین ۱۶. *آیا $\mathbb{R}^2 - \mathbb{Q}^2$ تصویر پیوسته‌ی $\mathbb{R}$ است؟*[25] *(راهنمایی: مشابه مثال ۱۰ عمل کنید. برای اثبات اینکه فضای $\mathbb{R}^2 - \mathbb{Q}^2$ بئر است می‌توانید از تمرین ۴ ت استفاده کنید.)*

مثال بعدی بسیار زیباست:

مثال ۱۷. *می‌خواهیم این مسأله را حل کنیم: «T اندومورفیسمی کراندار از فضای باناخ مختلط E است به قسمی که برای هر $x \in E$ به ازای یک چندجمله‌ای مناسب $f \neq 0$ با ضرایب مختلط داریم: $f(T)(x) = 0$. نشان دهید چندجمله‌ای ناصفر g موجود است با این ویژگی که $g(T) = 0$.» اولین ایده‌ای که به ذهن می‌رسد آن است که مشابه مثال ۱۲ عمل کنیم: ویژگی مفروض برای T بدین معنا است که هر عضو از E به ازای یک چندجمله‌ای مناسب $0 \neq f(t) \in \mathbb{C}[t]$ در هسته‌ی $f(T) : E \to E$ واقع است. پس می‌توان نوشت:*

$$E = \cup_{f(t) \in \mathbb{C}[t] - \{0\}} Ker\big(f(T)\big)$$

و هر زیرفضای خطی $Ker\big(f(T)\big)$ از E به دلیل کراندار بودن اندومورفیسم‌های $f(T)$ (که از کراندار بودن $T : E \to E$ ناشی می‌شود.) بسته است. پس فضای کامل E در تساوی فوق به عنوان اجتماع خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های بسته توصیف شده و اگر یکی از آنها نقطه‌ی درونی داشته باشد، این بدان معنی خواهد بود که به ازای یک چندجمله‌ای $g(t) \neq 0$، عملگر خطی $g(T) : E \to E$ بر بازی ناتهی صفر است که تنها زمانی می‌تواند رخ دهد که متحد با صفر باشد و وجود چنین چندجمله‌ای‌ای همان حکم مطلوب است. ولی متأسفانه قضیه‌ی بئر برای خانواده‌ای ناشمارا از زیرمجموعه‌های بسته صحیح نیست (رجوع کنید به تمرین ۴ ج.) و بنابراین نمی‌توان در تساوی مذکور حکم کرد که در اجتماع ناشمارای $\cup_{f(t) \in \mathbb{C}[t] - \{0\}} Ker\big(f(T)\big)$ درون حداقل یکی از زیرمجموعه‌های ظاهر شده باید ناتهی باشد. به منظور فائق آمدن بر این مشکل، E را به صورت یک اجتماع شمارا می‌نویسیم به این روش که برای هر عدد صحیح طبیعی n قرار می‌دهیم:

$$A_n = \cup_{f(t) \in \mathbb{C}[t] - \{0\}, \deg(f) \leq n} Ker\big(f(T)\big)$$

به عبارت دیگر A_n مجموعه‌ی بردارهایی در E است که به ازای یک چندجمله‌ای ناصفر با درجه‌ی حداکثر n با ضرایب مختلط مانند $f(t)$، توسط اندومورفیسم $f(T)$ از E به صفر می‌روند. دوباره بنابر ویژگی مفروض برای T در صورت مسأله: $E = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. حال می‌توان از قضیه‌ی بئر استفاده کرد و نشان داد که حداقل یکی از زیرمجموعه‌های ظاهر شده در اجتماع سمت راست نقطه‌ی درونی دارد مشروط به اینکه ابتدا بسته بودن A_nها را نشان دهیم. برای این کار فرض کنید که دنباله‌ی $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ از عناصر E به v همگرا باشد و هریک از اعضایش در A_n واقع باشند: برای هر k یک چندجمله‌ای $0 \neq f_k(t) \in \mathbb{C}[t]$ از درجه‌ی حداکثر n موجود است به قسمی که $f_k(T)(v_k) = 0$ و بایستی وجود چندجمله‌ای‌ای با خواص مشابه برای v را نشان داد. با تقسیم هر $f_k(t)$ بر ضریب جمله‌ی پیشروی آن و سپس ضربش در $t^{n - \deg(f_k)}$، بدون کاسته شدن از کلیت می‌توان فرض کرد که هر f_k تکین و از درجه‌ی n است و سپس با توجه به بسته‌ی جبری بودن $\mathbb{C}$، هر f_k تجزیه‌ای به شکل

$$f_k(t) = (t - \alpha_1^{(k)}) \dots (t - \alpha_n^{(k)})$$

خواهد داشت که در آن هر $\alpha_i^{(k)}$ یک عدد مختلط است. توجه کنید

[24] فضای نرم‌دار کامل
[25] مطرح شده در شماره‌ی ۸ مجله‌ی ریاضی شریف، بهار ۷۹

که اگر $\| T \| < |\alpha_i^{(k)}|$ [۲۶]، آنگاه عملگر $T-\alpha_i^{(k)}.1_E : E \to E$ وارون‌پذیر خواهد شد (1_E عملگر همانی) و لذا می‌توان در تساوی

$$f_k(T)(v_k) = \big((T-\alpha_1^{(k)}.1_E)\dots(T-\alpha_n^{(k)}.1_E)\big)(v_k)=0$$

$T-\alpha_i^{(k)}.1_E$ را از سمت حذف کرد و سپس در تساوی حاصل به جای آن عاملی همچون $T-\tilde{\alpha}_i^{(k)}.1_E$ که در آن $\| T \| \le |\tilde{\alpha}_i^{(k)}|$ جایگزین کرد به گونه‌ای که باز هم تساوی برقرار بماند. پس بدون کاسته شدن از کلیت می‌توان فرض کرد که نرم ریشه‌های $\alpha_i^{(k)}$ ($1 \le i \le n$) از هر چندجمله‌ای $f_k(t)$، از $\| T \|$ تجاوز نمی‌کنند. بنابراین دنباله‌های $\{\alpha_i^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ ($1 \le i \le n$) از نقاط $\mathbb{C}$ همگی کراندار هستند و در نتیجه می‌توان زیردنباله‌های همگرای $\{\alpha_i^{(k_j)}\}_{k_j=1}^{\infty}$ را از آنها برگزید: $\beta_1,\dots,\beta_n$ در $\mathbb{C}$ موجودند با این ویژگی که

$$\forall 1 \le i \le n \quad \lim_{j\to\infty} \alpha_i^{(k_j)} = \beta_i$$

حال در فضای عملگرهای کراندار $E \to E$:

$$\lim_{j\to\infty}(T-\alpha_1^{(k_j)}.1_E)\dots(T-\alpha_n^{(k_j)}.1_E) = (T-\beta_1.1_E)\dots(T-\beta_n.1_E)$$

از طرف دیگر اثر عملگر ظاهر شده در سمت چپ حد فوق بر v_{k_j} صفر بود. پس چون زیردنباله‌ی $\{v_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ از $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$، مانند خود این دنباله در E به v همگرا بود، باید به ازای چندجمله‌ای درجه‌ی n تکین $f(t) := (t-\beta_1)\dots(t-\beta_n)$ داشته باشیم $f(T)(v)=0$، امری که تعلق v به A_n و از آنجا بسته بودن این زیرمجموعه را ثابت می‌کند. پس همان‌گونه که پیشتر گفتیم باید به ازای یک عدد طبیعی n، A_n نقطه‌ی درونی داشته باشد. یعنی به ازای بازی ناتهی همچون U از فضای باناخ E: برای هر $x \in U$ یک چندجمله‌ای از درجه‌ی حداکثر n مانند $0 \neq f(t) \in \mathbb{C}[t]$ موجود است که $f(T)(x)=0$ را برآورده می‌کند. با تثبیت یک $z \in U$ و بزرگتر کردن n در صورت لزوم، ویژگی مشابهی برای هر نقطه از E برقرار خواهد بود و به عبارت دیگر می‌توان در بالا به جای U کل فضای E را قرار داد. چرا که یک چندجمله‌ای $q(t) \neq 0$ موجود است که برای آن $q(T)(z)=0$ و حال اگر $x \in E$ دلخواه باشد، به دلیل باز بودن U می‌توان $r>0$ را آنقدر بزرگ گرفت که $\frac{1}{r}.x+z \in U$ و لذا به ازای یک $f(t) \neq 0$ با $\deg f \le n$: $f(T)(\frac{1}{r}.x+z)=0$ و از آنجا:

$$\big(q(T)f(T)\big)(x) = r.\Big(q(T)\big(\overbrace{f(T)(\frac{1}{r}.x+z)}^{=0}\big) - f(T)\big(\overbrace{q(T)(z)}^{=0}\big)\Big) = 0$$

درجه‌ی $q(t)f(t) \neq 0$ حداکثر $n+\deg q$ است و لذا با در نظر گرفتن عدد فوق به عنوان n، گزاره‌ی زیر صادق خواهد بود:

(*) برای هر $x \in E$ یک چندجمله‌ای $f(t) \in \mathbb{C}[t]-\{0\}$ از درجه‌ی حداکثر n موجود است به قسمی که: $f(T)(x)=0$.

با به کار بردن (*) می‌توان به سادگی حل را تکمیل کرد. به هر $x \in E$ یک «چندجمله‌ای مینیمال» که با نماد $p_x(t)$ نشان داده می‌شود نسبت می‌دهیم که عبارت است از چندجمله‌ای تکین و ناصفری با کمترین درجه‌ی ممکن که در $p_x(T)(x)=0$ صدق می‌کند. به وضوح شرط لازم و کافی برای آنکه برای چندجمله‌ای $q(t) \in \mathbb{C}[t]$ تساوی $q(T)(x)=0$ را برآورده کند آن است که در حلقه‌ی چندجمله‌ای $\mathbb{C}[t]$ داشته باشیم $p_x(t)|q(t)$ به علاوه (*) نشان می‌دهد که $\deg p_x \le n$ برای هر x. به منظور اثبات حکم مسأله کافی است نشان داد که چندجمله‌ای مختلط ناصفری موجود است که همه‌ی p_xها آن را می‌شمارند. توجه کنید که اگر تعداد اعداد مختلطی که ریشه‌ی حداقل یکی از p_xها هستند متناهی باشد، این امر با توجه به اینکه درجه‌ی هریک از این چندجمله‌ای‌ها حداکثر n است بدیهی خواهد بود: اگر فرض کنیم

$$\cup_{x\in E}\{c \in \mathbb{C} \mid p_x(c)=0\} = \{b_1,\dots,b_m\}$$

آنگاه هر p_x مقسوم‌علیه‌ای از $(x-b_1)^n\dots(x-b_m)^n$ خواهد بود چرا که $\deg p_x \le n$. بنابراین فرض کنید دنباله‌ی $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ از اعداد مختلط دوبدو متمایز موجود باشد به گونه‌ای که هر c_k به ازای یک $x_k \in E$ ریشه‌ای از چندجمله‌ای مینیمال $p_{x_k}(t)$ متناظر x_k است. هر c_k باید مقدارویژه‌ای از عملگر $T : E \to E$ باشد: در $\mathbb{C}[t]$ چندجمله‌ای $p_{x_k}(t) \neq 0$ را می‌توان به صورت $p_{x_k}(t)=(t-c_k)q(t)$ تجزیه کرد. داریم:

$$p_x(T)(x_k)=0 \Rightarrow (T-c_k.1_E)\big(q(T)(x_k)\big)=0$$
$$\Rightarrow T\big(q(T)(x_k)\big)=c_k.\big(q(T)(x_k)\big)$$

که در آن چون درجه‌ی $q(t) \neq 0$ از درجه‌ی چندجمله‌ای مینیمال x_k یا همان $p_{x_k}(t)$ کمتر است، $(q(T))(x_k)$ ناصفر و لذا بردار ویژه‌ای متناظر مقدار ویژه‌ی c_k است. پس می‌توان دنباله‌ی $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ از بردارهای به طول واحد در E را چنان برگزید که هر y_k بردار ویژه‌ای متناظر مقدارویژه‌ی c_k باشد: $Ty_k=c_k.y_k$. می‌دانیم بردار ویژه‌های متناظر مقدارویژه‌های متمایز مستقل خطی هستند و لذا زیرمجموعه‌ی $\{y_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ از فضای باناخ E مستقل خطی است. حال به تناقض می‌رسیم: بنابر (*) باید درجه‌ی چندجمله‌ای مینیمال نسبت داده شده به بردار $\sum_{k=1}^{n+1}y_k$ از E حداکثر n باشد. یعنی به ازای یک $q(t) \in \mathbb{C}[t]-\{0\}$ با $\deg q \le n$ داریم $q(T)(\sum_{k=1}^{n+1}y_k)=0$. در نتیجه عناصر $y'_i := T^i(\sum_{k=1}^{n+1}y_k)$ $0 \le i \le n$ (T^i به معنای ترکیب i باره‌ی T با خودش است.) از E وابسته‌ی خطی هستند. ولی توجه کنید که از بالا، برای هر $0 \le i \le n$ می‌توان نوشت: $y'_i =$

[۲۶] $\| T \|$ نرم عملگر $T : E \to E$ است: $\| T \| := \sup_{x\in E-\{0\}}\frac{|T(x)|}{|x|}$.

$T^i(\sum_{k=1}^{n+1} y_k) = \sum_{k=1}^{n+1} c_k^i . y_k$ و در نتیجه عناصر وابسته‌ی خطیِ $y'_0, \dots, y'_n$ از E در زیرفضای متناهی‌البعدِ $Span\{y_1,\dots,y_{n+1}\}$ واقعند و در پایه‌ی مرتبِ $\{y_1,\dots,y_{n+1}\}$ برای این زیرفضا، بردارهای واقع در $\{y'_0,\dots,y'_n\}$ با ماتریسِ $(n+1)\times(n+1)$ زیر توصیف می‌شوند (در ستونِ $1 \le j \le n+1$ اُم مختصات y'_{j-1} در این پایه‌ی مرتب نوشته شده.):

$$\begin{bmatrix} 1 & c_1 & \cdots & c_1^n \\ 1 & c_2 & \cdots & c_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & c_{n+1} & \cdots & c_{n+1}^n \end{bmatrix}$$

لذا دترمینان ماتریس فوق باید صفر باشد در حالی که این دترمینان، «دترمینانِ واندرموند» است و حکمی استاندارد از جبر خطی بیان می‌کند که به دلیل دوبدو متمایز بودنِ $c_1,\dots,c_{n+1}$، این دترمینان ناصفر است. تناقض حاصله حل را تکمیل می‌کند.

تمرین ۱۸. حکم ثابت شده در مثال ۱۷ را به فضاهای باناخ حقیقی تعمیم دهید: اگر اندومورفیسم کراندارِ $T: E \to E$ از فضای باناخ حقیقیِ E دارای این ویژگی باشد که برای هر $x\in E$، $f(T)(x)=0$ به ازای یک چندجمله‌ایِ $f(t)\in\mathbb{R}[t]-\{0\}$، آنگاه چندجمله‌ای ناصفرِ $g(t)$ با ضرایب حقیقی موجود خواهد بود که $g(T)=0$. (راهنمایی: مختلط سازیِ[27] E که عبارت است از $\mathbb{C}$- فضای برداریِ $E\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$، به روش واضح ساختارِ یک فضای باناخ مختلط را دارد و T به یک عملگر پیوسته بر آن گسترش می‌یابد. حال تحقیق کنید که حکم ثابت شده در مثال مذکور را می‌توان به این عملگر اعمال کرد.)

و آخرین مثال این بخش:

مثال ۱۹. [28] با فرضِ $m>n$، آیا ممکن است یک نگاشتِ $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ فواصل را کاهش ندهد یا به عبارت دیگر برای هر $x,y\in\mathbb{R}^m$ فاصله‌ی نقاطِ $f(x),f(y)$ در $\mathbb{R}^n$ از فاصله‌ی x,y در $\mathbb{R}^m$ کمتر نباشد؟ در این مثال با به تناقض کشاندن فرض وجود چنین f ای، خواهیم دید که پاسخ منفی است. ایده‌ی کار آن است که ابتدا نشان دهیم نگاشتی به دامنه‌ی زیرمجموعه‌ی بازی از $\mathbb{R}^m$ به مقصد زیرمجموعه‌ای کراندار از $\mathbb{R}^n$ حتماً در جایی فاصله را کاهش می‌دهد. در واقع نشان خواهیم داد که بستارِ تصویر وارون هر زیرمجموعه‌ی کراندار همچون A از $\mathbb{R}^n$ تحت نگاشت $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ مفروض در بالا، فاقد نقطه‌ی درونی است. برای دیدن دلیل فرض کنید چنین نباشد و به ازای بازِ ناتهیِ U از $\mathbb{R}^m$ و زیرمجموعه‌ی کراندارِ A از $\mathbb{R}^n$: $U\subseteq\overline{f^{-1}(A)}$. چون U ناتهی است، می‌توان نقطه‌ی $(a_1,\dots,a_m)$ در U و $c>0$ را چنان انتخاب کرد که مکعبِ $\prod_{i=1}^m[a_i-c,a_i+c]$ به مرکزِ $(a_1,\dots,a_m)$ مشمول باشد در U. حال برای هر عدد طبیعی دلخواه k زیرمجموعه‌ی

$$\{(a_1+\frac{j_1c}{k},\dots,a_n+\frac{j_mc}{k}) \mid j_1,\dots,j_m\in\{-k,\dots,0,\dots,k\}\}$$

از این مکعب $(2k+1)^m$ عضو دارد و فاصله‌ی هر دو عضو متمایز از آن حداقل $\frac{c}{k}$ است. ولی $U\subseteq\overline{f^{-1}(A)}$ لذا می‌توان یک زیرمجموعه‌ی B با همین تعداد عضو از $f^{-1}(A)$ انتخاب کرد با این ویژگی که فاصله‌ی هر نقطه‌ی آن از حداقل یکی از نقاط مجموعه‌ی مذکور کمتر از $\frac{c}{4k}$ باشد. حال با استفاده از نامساوی مثلث فاصله‌ی هر دو نقطه از B حداقل $\frac{c}{k}-2\frac{c}{4k}=\frac{c}{2k}$ است. پس چون بنابر ویژگی مفروض برای f همواره $|f(x)-f(y)|\ge|x-y|$، با اثر دادنِ f بر اعضای $B\subseteq f^{-1}(A)$، اعضای $f(B)$ به تعداد $(2k+1)^m$ نقطه در A بدست می‌دهند که فاصله‌ی هر دو تا از آنها حداقل $\frac{c}{2k}$ است و لذا گوی‌های بازی در $\mathbb{R}^n$ که به مرکز این نقاط و شعاع $\frac{c}{4k}$ رسم می‌شوند، دوبدو مجزا خواهند بود. ولی همه‌ی این گوی‌های باز مشمول هستند در زیرمجموعه‌ی

$$C:=\cup_{a\in A}(\text{گوی باز به مرکز } a \text{ به شعاع } c \text{ در } \mathbb{R}^n)$$

زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ که به دلیل کراندار بودنِ A کراندار خواهد بود. پس برای هر عدد طبیعیِ k، زیرمجموعه‌ی کراندارِ C از $\mathbb{R}^n$، $(2k+1)^m$ تا گوی بازِ دوبدو مجزا هریک به شعاع $\frac{c}{4k}$ را در بردارد. حجم اجتماع این گوی‌ها اگر $\alpha>0$ حجم گوی باز واحد در $\mathbb{R}^n$ گرفته شود، برابر خواهد بود با $\alpha(2k+1)^m(\frac{c}{4k})^n$ عددی که وقتی $k\to\infty$ به دلیلِ $m>n$ به بی‌نهایت می‌رود و لذا زیرمجموعه‌ی کراندارِ C از $\mathbb{R}^n$ زیرمجموعه‌هایی با حجم به دلخواه بزرگ را در بردارد که به وضوح تناقض است. حال می‌توان اثبات را با به کار بردنِ قضیه‌ی بئر تکمیل کرد: در بالا دیدیم که تصویر وارونِ هر زیرمجموعه‌ی کراندار از $\mathbb{R}^n$ تحتِ $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ هیچ‌جا چگال است. ولی این بدان معنی است که در تساویِ

$$\mathbb{R}^m=\cup_{j=1}^\infty\overline{f^{-1}(\{a\in\mathbb{R}^n \mid |a|\le j\})}$$

هیچ‌یک از زیرمجموعه‌های بسته‌ی ظاهر شده در سمت راست نقطه‌ی درونی ندارند، امری که بنابر قضیه‌ی بئر امکان‌پذیر نیست.

تمرین ۲۰. با فرضِ $0<\alpha<1$. نشان دهید هیچ تابعِ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با این ویژگی که

$$\forall x,y\in\mathbb{R}: |f(x)-f(y)|\ge|x-y|^\alpha$$

موجود نیست. (راهنمایی: دقیقاً مشابه مثال بالا عمل کنید و ابتدا نشان دهید که برای چنین تابعی، به ازای هر بازه‌ی بسته‌ی $[a,b]$، $\overline{f^{-1}([a,b])}$ نمی‌تواند نقطه‌ی درونی داشته باشد.)

[27] complexification

[28] این مثال را دکتر جعفری به من پیشنهاد داد.

۳ کاربردهایی از قضیه‌ی بئر در فضاهای توابع و آنالیز تابعی

در بسیاری از کاربردهای کلاسیک قضیه‌ی بئر، وجود تابعی با ویژگی‌های معین ثابت می‌گردد. فضای بئری که اینجا در نظر می‌گیریم، فضای برداریِ توابع پیوسته بر بازه‌ی $[a,b]$ یا $C([a,b])$ است که هرگاه به نرمِ

$$\parallel f \parallel = \sup\{|f(x)| \mid x \in [a,b]\}$$

موسوم به نرم سوپریمم مجهز گردد یک فضای باناخ و همگرایی در این فضا به معنای همگرایی یکنواخت توابع خواهد بود.
در اولین کاربرد خواهیم دید که به طور نوعی یک تابع پیوسته در هیچ نقطه‌ای مشتق‌پذیر نیست.

قضیه ۲۱. *زیرمجموعه‌ای از $C([a,b])$ متشکل از توابع پیوسته‌ای که در هیچ نقطه‌ای مشتق‌پذیر نیستند شامل یک زیرمجموعه‌ی پسمانده (بنابر تعریفی که کردیم یعنی یک زیرمجموعه‌ی چگال و G_δ) است.*

اثبات. در اینجا روند کلی اثبات را شرح می‌دهیم و جزئیات به خواننده محول می‌شود. بدون کاسته شدن از کلیت می‌توان مسأله را برای بازه‌ی واحد در نظر گرفت: $[a,b]=[0,1]$. تابع پیوسته‌ای می‌سازیم که مشتق راستش در هر نقطه از $(0,1)$ نامتناهی باشد. برای هر عدد طبیعی n، A_n را به عنوان مجموعه‌ی توابع پیوسته‌ای بر $[0,1]$ تعریف کنید که برای هریک از آنها مانند f یک $x \in [0,1-\frac{1}{n}]$ موجود است به قسمی که برای هر $h \in (0,\frac{1}{n})$: $|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}| \leq n$. به وضوح هر تابع پیوسته‌ی $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ای در یک نقطه پیوسته باشد در یکی از A_nها واقع خواهد بود. پس به منظور اثبات وجود تابع پیوسته‌ای بر $[0,1]$ که در هیچ نقطه‌ای از $(0,1)$ مشتق‌پذیر نباشد کافی است نشان داد که $\cup_{n=1}^{\infty}A_n$ بر $C([0,1])$ منطبق نیست. قضیه‌ی بئر ابزار لازم برای انجام این کار را در اختیار ما می‌گذارد: کافی است نشان دهیم که هر A_n بسته و فاقد نقطه‌ی درونی است. بسته بودن به سادگی قابل اثبات است: اگر $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعضای A_n باشد که $f_j \to f$ در $C([0,1])$، برای هر f_j نقطه‌ی $x_j \in [0,1-\frac{1}{n}]$ موجود خواهد بود که ویژگی گفته شده را برآورده می‌کند و با توجه به فشردگی می‌توان با جایگزین کردنِ $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ با زیردنباله‌ای از آن در صورت لزوم می‌توان فرض کرد که $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ به نقطه‌ی x از $[0,1-\frac{1}{n}]$ همگراست و حال این نقطه از دامنه‌ی f ویژگی مطلوب در تعریفِ A_n را برآورده می‌کند: با تثبیتِ یک $h \in (0,\frac{1}{n})$ به ازای هر j: $|\frac{f_j(x_j+h)-f_j(x_j)}{h}| \leq n$ و وقتی $j\to\infty$ به دلیلِ $f_j \rightrightarrows f$ و $x_j \to x$ سمت چپِ نامساوی همگرا می‌شود به $|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}|$ و بنابراین به $|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}| \leq n$ برای هر $h \in (0,\frac{1}{n})$ می‌رسیم، امری که نشان می‌دهد $f \in A_n$. ایده‌ی اثباتِ اینکه A_n نقطه‌ی درونی ندارد را به اجمال شرح می‌دهیم: هر عضوِ A_n را می‌توان به طور یکنواخت با توابعی «قطعه به قطعه خطی» [29] بر $[0,1]$ که شیبِ هریک از پاره‌خط‌هایی در صفحه که نمودار آنها را تشکیل می‌دهند $\pm 2n$ است تقریب زد و چنین توابعی به وضوح عضوِ A_n نیستند. □

در استدلالی دیگر از این نوع به کمک قضیه‌ی بئر می‌توان نشان داد کهتابع هموار نوعی تحلیلی نیست. رجوع کنید به [۱]. یک مورد دیگر از اثبات وجود تابعی با خواص معین به کمک قضیه‌ی بئر:

قضیه ۲۲. *یک تابع پیوسته‌ی $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ موجود است که بر هیچ زیربازه‌ای یکنوا (صعودی یا نزولی) نیست.*

اثبات. برای هر جفت از اعداد طبیعیِ $k \leq n$ قرار می‌دهیم:

$$A_{k,n} = \{f \in C([0,1]) \mid \text{بر بازه‌ی } [\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}] \text{ یکنوا است.}\ f\}$$

به وضوح تابع پیوسته‌ای بر $[0,1]$ که بر زیربازه‌ای به طول مثبت یکنوا باشد باید به یکی از $A_{k,n}$ها تعلق داشته باشد و لذا باید نشان دهیم که فضای توابع پیوسته بر $[0,1]$ یا $C([0,1])$ بر زیرمجموعه‌ی $\cup_{k\leq n}A_{k,n}$ منطبق نیست و مجدداً با توجه به قضیه‌ی بئر روند کار مشخص است: کافی است اثبات کرد که هر $A_{k,n}$ در فضای $C([0,1])$ که به نرمِ سوپریمم مجهز شده - بسته و با درونِ تهی است. مورد اول ساده است، چرا که حد یکنواخت و در واقع حد نقطه به نقطه‌ی دنباله‌ای از توابع صعودی یا نزولی بر بازه‌ای دلخواه خود به ترتیب صعودی یا نزولی خواهد بود. در مورد دیگر باید نشان دهیم که هرگاه $\epsilon > 0$ دلخواه و تابع پیوسته‌ی $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ بر زیربازه‌ی $[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]$ از دامنه‌ی تعریفش یکنوا باشد، آنگاه تابع پیوسته‌ی $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ موجود است با این ویژگی که $\parallel f-g \parallel \leq 2\epsilon$ و g بر زیربازه‌ی $[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]$ صعودی یا نزولی نیست. به دلیل پیوستگی یکنواختِ f می‌توان $\frac{k-1}{n} < a < \frac{k}{n}$ را چنان برگزید که قدرمطلق تفاضل مقادیرِ f در هر دو نقطه از بازه‌ی $[a,\frac{k}{n}]$ از $\frac{\epsilon}{2}$ کمتر باشد. حال g با ضابطه‌ی

$$g(x)=\begin{cases} 2\frac{-\epsilon}{\frac{k}{n}-a}(x-a)+f(a) & x\in[a,\frac{a+\frac{k}{n}}{2}] \text{ اگر} \\ 2\frac{f(\frac{k}{n})-f(a)+\epsilon}{\frac{k}{n}-a}(x-\frac{k}{n})+f(\frac{k}{n}) & x\in[\frac{a+\frac{k}{n}}{2},\frac{k}{n}] \text{ اگر} \\ f(x) & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که با تغییر f بر زیربازه‌ی $[a,\frac{k}{n}]$ به یک تابع قطعه به قطعه خطی که در دو سر بازه با f مطابقت دارد حاصل شده، همانند f پیوسته است، چون

$$g(\frac{a+\frac{k}{n}}{2}) = f(a)-\epsilon < \min\{f(a), g(\frac{k}{n})=f(\frac{k}{n})\}$$

[29] piecewise linear

بر $[a,\frac{k}{n}]$ و به تبع آن $[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]$ یکنوا نیست و در نهایت از آنجا که g تنها بر زیربازه‌ی $[a,\frac{k}{n}]$ با f یکی نیست و به دلیل قطعه به قطعه خطی بودن بر این زیربازه، مقادیرش بر آن محصورند میان اعداد

$$g(a)=f(a), g(\frac{a+\frac{k}{n}}{2})=f(a)-\epsilon, g(\frac{k}{n})=f(\frac{k}{n})$$

شرطِ $\|f-g\|\leq 2\epsilon$ را هم برآورده می‌کند، چرا که

$$\forall x\in[a,\frac{k}{n}]: |f(x)-f(a)|, |f(x)-f(\frac{k}{n})|\leq\epsilon$$

پس این تابع پیوسته‌ی $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ همه‌ی خواص مطلوب را دارد و اثبات تمام است. □

هر درس استانداردی در آنالیز تابعی مقدماتی، سه قضیه‌ی «اصل کرانداری یکنواخت» [30] -که به «قضیه‌ی باناخ-اشتاینهاوس» [31] نیز معروف است- «قضیه‌ی نگاشت باز» [32] و «قضیه‌ی نمودار بسته» [33] را دربرمی‌گیرد. احکامی که در اثبات آنها از قضیه‌ی بئر استفاده می‌شود. ما در اینجا تنها درباره‌ی اصل کرانداری یکنواخت بحث می‌کنیم و دو مورد دیگر را می‌توان در هر کتاب آنالیز تابعی یافت.

قضیه ۲۳. *فرض کنید X فضایی باناخ، Y یک فضای برداری نرم‌دار و $\mathcal{F}$ خانواده‌ای از عملگرهای پیوسته‌ی $X\to Y$ باشد به قسمی که برای هر $x\in X$ زیرمجموعه‌ی $\{T(x)\}_{T\in\mathcal{F}}$ از Y کراندار است. آنگاه خانواده‌ی $\mathcal{F}$ به طور یکنواخت کراندار خواهد بود: $M\geq 0$ موجود است به قسمی که $\|T\|\leq M$ [34] برای هر $T\in\mathcal{F}$.*

اثبات. اگر برای هر عدد طبیعیِ n قرار دهیم:

$$A_n=\{x\in X \mid \forall T\in\mathcal{F}: |T(x)|\leq n\}$$

A_nها اولاً به دلیل کراندار بودن عملگرهای واقع در $\mathcal{F}$ بسته خواهند بود و ثانیاً به دلیل شرطی که قائل شده‌ایم X را می‌پوشانند. پس بنابر قضیه‌ی بئر به ازای یک عدد طبیعیِ n، A_n نقطه‌ی درونی دارد. فرض کنید گوی باز به مرکز z و شعاعِ $r>0$ مشمول در آن باشد. برای هر $x\in X$ نقطه‌ی $z+\frac{r}{2|x|}.x$ از X در این گوی باز و لذا در A_n واقع خواهد بود و از آنجا:

$$\forall T\in\mathcal{F}: |T(z+\frac{r}{2|x|}.x)|\leq n\Rightarrow |T(x)|\leq\frac{2|x|}{r}(n+|T(z)|)$$

و بنابراین با فرضِ $M:=\frac{2}{r}(n+\sup_{T\in\mathcal{F}}|T(z)|)$ خواهیم داشت

$$\forall T\in\mathcal{F}, x\in X: |T(x)|\leq M|x|$$

□

[30] The Uniform Boundedness Principle

[31] The Theorem Banach-Steinhaus

[32] The Open Mapping Theorem

[33] The Closed Graph Theorem

[34] مشابه قبل منظور از $\|T\|$ نرم عملگرِ T است.

این قسمت را با تمرینی که برای حل آن می‌توان از اصل کرانداریِ یکنواخت استفاده کرد به پایان می‌بریم:

تمرین ۲۴. *فرض کنید $(H,\langle,\rangle)$ فضایی هیلبرت [35] و $T:H\to H$ نگاشتی خطی باشد با این ویژگی که*

$$\forall x,y\in H: \langle T(x),y\rangle=\langle x,T(y)\rangle$$

نشان دهید عملگرِ T کراندار است.(راهنمایی: خانواده‌ی $\{x\mapsto\langle x,T(y)\rangle\}_{y\in H,|y|\leq 1}$ از تابعک‌های کراندار بر H را در نظر بگیرید و به آنها اصل کرانداری یکنواخت را اعمال کنید.)

۴ دو نکته‌ی کوتاه درباره‌ی توابع مختلط

در اینجا به بیان دو گزاره درباره‌ی توابع هولومورف (تحلیلی مختلط) می‌پردازیم که در اثباتشان از قضیه‌ی بئر استفاده می‌شود. قضیه‌ی اول که از [۶] اقتباس شده، بیان می‌کند که حد نقطه به نقطه‌ی دنباله‌ای از توابع هولومورف، باید بر زیرمجموعه‌ای باز و ناتهی از دامنه‌ی تعریف هولومورف باشد. امری که به وضوح برای توابع C^∞ برقرار نیست.

قضیه ۲۵. *Ω بازی ناتهی از $\mathbb{C}^n$ است و $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ دنباله‌ای از توابع هولومورف بر آن که به طور نقطه به نقطه به یک تابعِ $f:\Omega\to\mathbb{C}$ همگرا هستند. آنگاه زیرمجموعه‌ی باز و چگالِ V از Ω موجود است که f بر آن به تابعی هولومورف تحدید می‌شود.*

اثبات. حول هر نقطه از Ω می‌توان یک همسایگی بازِ U در نظر گرفت با این ویژگی که بستارِ U در $\mathbb{C}^n$، فشرده است و مشمول در Ω. کافی است نشان دهیم که f بر بازی ناتهی مشمول در U هولومورف است تا حکم نتیجه شود. ایده‌ی کار استفاده از قضیه‌ی معروفِ «مُنتل» [36] است که بیان می‌کند خانواده‌ای از توابع هولومورف و به طور موضعی کراندار (یعنی بر زیرمجموعه‌های فشرده به طور یکنواخت کراندار باشد.) بر بازی همچون D، نرمال است به این معنی که هر دنباله از اعضای آن زیردنباله‌ای دارد که بر هر زیرمجموعه‌ی فشرده از D به طور یکنواخت همگراست. پس در اینجا اگر نشان دهیم که بر یک بازِ $\emptyset\neq W\subseteq U$، دنباله‌ی $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ به طور یکنواخت کراندار است، آنگاه یک زیردنباله‌ی $\{f_{k_j}\}_{j=1}^\infty$ از آن موجود خواهد بود که بر زیرمجموعه‌های فشرده‌ی W به طور یکنواخت همگراست. ولی حدِ چنین دنباله‌ای از توابعِ هولومورف خود هولومورف خواهد بود و از طرف دیگر اینجا این حد همان تحدیدِ f به W است، زیرا $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ و درنتیجه $\{f_{k_j}\}_{j=1}^\infty$ بر باز بزرگترِ Ω به طور نقطه به نقطه به f همگرا

[35] فضای ضرب داخلیِ کامل

[36] Montel's Theorem

می‌شدند و بنابراین f بر بازِ $W \neq \emptyset$ مشمول در U هولومورف خواهد بود، همان چیزی که در پی آن بودیم. پس به منظور اتمام کار کافی است نشان دهیم $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ بر بازی ناتهی از U به خانواده‌ای به طور یکنواخت کراندار تحدید می‌شود. مجدداً ابزاری که به کار خواهیم برد قضیه‌ی بئر است: هر f_k چون بر زیرمجموعه‌ی فشرده‌ی $\bar{U}$ به طور پیوسته تعریف شده، بر U کراندار است و لذا می‌توان نوشت $U = \cup_{m=1}^{\infty}\{z \in U \mid \forall k \in \mathbb{N}\ |f_k(z)| \leq m\}$. زیرمجموعه‌هایی از U که در سمت راستِ تساوی آمده‌اند، همگی در آن بسته‌اند و لذا یکی از آنها باید حائز نقطه‌ی درونی باشد [۳۷]: بازی ناتهی مانندِ W از U به همراه عدد طبیعیِ m موجودند به گونه‌ای که برای هر $z \in W$ و $k \in \mathbb{N}$ داریم $|f_k(z)| \leq m$ و این به معنای کرانداری یکنواخت خانواده‌ی $\{f_k|_W\}_{k=1}^{\infty}$ خواهد بود. □

مثال ۲۶. *«قضیه‌ی کازوراتی-وایرشتراس» [۳۸] بیان می‌کند که اگر Ω بازی از $\mathbb{C}$ باشد، $a \in \Omega$ و $f : \Omega - \{a\} \to \mathbb{C}$ تابعی هولومورف که a یک نقطه‌ی تکینگی اساسی [۳۹] از آن است، آنگاه مقادیرِ f در هر همسایگی محذوف از a، به هر عضوی از $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ [۴۰] به دلخواه نزدیک می‌شوند. قضیه‌ی بئر به ما اجازه می‌دهد این حکم را اندکی قوی‌تر کرده و وجود یک زیرمجموعه‌ی چگالِ X از $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ را نتیجه بگیریم با این ویژگی که برای هر بازِ $D \subseteq \Omega$ از $\mathbb{C}$ حولِ a، $f(D - \{a\})$ زیرمجموعه‌ی X را دربردارد. بدین منظور خانواده‌ی $\{f(\{z \in \Omega \mid 0 < |z-a| < \frac{1}{n}\})\}_{n=1}^{\infty}$ از زیرمجموعه‌های $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ را در نظر می‌گیریم که عناصرش به دلیل باز بودنِ هر تابع هولومورف غیر ثابت باز و به دلیل قضیه‌ی کازوراتی-وایرشتراس چگالند. پس بنابر قضیه‌ی بئر*

$$X = \cap_{n=1}^{\infty} f\big(\{z \in \Omega \mid 0 < |z-a| < \frac{1}{n}\}\big)$$

زیرمجموعه‌ای چگال از $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ خواهد بود و به وضوح ویژگی مطلوب را برآورده می‌کند. لازم به ذکر است که این حکمِ قوی‌تر از قضیه‌ی کازوراتی-وایرشتراس، همچنان از «قضیه‌ی پیکار» [۴۱] که بیان می‌کند «تابع هولومورفِ تک‌متغیره در هر همسایگی محذوفی از تکینگی اساسی خود، هر مقدار مختلطی به جز احتمالاً یکی را بی‌نهایت بار می‌پذیرد.» بسیار ضعیف‌تر است!

[۳۷] استفاده از قضیه‌ی بئر مجاز است، چرا که U یک فضای بئر است: بازی از فضای کاملِ $\mathbb{C}^n$.

[۳۸] Casorati-Weierstrass Theorem

[۳۹] essential singularity

[۴۰] $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ کره‌ی ریمان یا همان فشرده‌سازیِ تک‌نقطه‌ایِ $\mathbb{C}$ است.

[۴۱] Picard Theorem

۵ قضیه‌ی بئر و اصل انتخاب

قضیه‌ی بئر به روشی جالب و غیرمنتظره در اثبات «اصل انتخاب وابسته»[۴۲] به کار می‌رود. اصل انتخاب وابسته که از «اصل انتخاب»[۴۳] ضعیف‌تر و از «اصل انتخاب شمارا»[۴۴] قوی‌تر است، به شکل زیر قابل بیان است:

اصل انتخاب وابسته. فرض کنید R رابطه‌ای بر مجموعه‌ی $X \neq \emptyset$ باشد با این ویژگی که برای هر $a \in X$، $b \in X$ با aRb موجود است. آنگاه می‌توان دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ از اعضای X را انتخاب کرد با این ویژگی که x_nRx_{n+1} برای هر عدد طبیعیِ n.

توجه کنید n جمله‌ی اول چنین دنباله‌ای بدون به کار بردن اصل انتخاب هم قابل ساختن هستند و نکته آن است که می‌توان تا بی‌نهایت پیش رفت و کل چنین دنباله‌ای را تشکیل داد مشابه آنچه در قسمت نخست درباره‌ی قضیه‌ی بئر گفتیم مبنی بر اینکه برای تعداد متناهی زیرمجموعه‌ی باز و چگال بدیهی است. مشابهت بین این دو گزاره بیش از این است و در واقع می‌توان نشان داد که این دو معادلند![۴۵] به این که چرا حکم مذکور قضیه‌ی بئر را نتیجه می‌دهد می‌توان با رجوع به اثبات‌های قضیه‌ی بئر به عنوان مثال در [۱] یا [۴] پی برد و مشاهده کرد که در همه‌ی آنها در واقع باید انتخابِ یک دنباله از نقاط صورت پذیرد. در اینجا توجه خود را به عکس گزاره معطوف می‌کنیم:

قضیه ۲۷. *قضیه‌ی کتگوری بئر برای فضای متریک کامل ⇐ اصل انتخاب وابسته*

اثبات. X و رابطه‌ی R بر آن را با ویژگی موصوف در نظر بگیرید: برای هر $a \in X$ وجود دارد $b \in X$ به قسمی که aRb. حال باید امکان انتخابِ دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ را نشان داد که در آن همواره داشته باشیم x_nRx_{n+1}. رابطه‌ی R بر مجموعه‌ی X را می‌توان به عنوان زیرمجموعه‌ی $\{(a,b) \in X \times X \mid aRb\}$ از $X \times X$ در نظر گرفت. فضای تمام توابع $\mathbb{N} \to X$ را به $X^{\mathbb{N}}$ نشان دهید و به متریکِ

$$d(f,g) = 2^{-\min\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \neq g(n)\}}$$

مجهز کنید. به سادگی می‌توان دید که این یک متریک است و با آن $X^{\mathbb{N}}$ به یک فضای متریک کامل تبدیل می‌شود: اینکه دنباله‌ی $\{f_n : \mathbb{N} \to X\}_{n=1}^{\infty}$ از نقاطِ این فضا کوشی باشد، به وضوح معادل

[۴۲] Axiom of dependent choice

[۴۳] Axiom of choice

[۴۴] Axiom of countable choice

[۴۵] این حکم اولین بار در مقاله‌ی زیر اثبات گردید:
Blair, Charles E. The Baire category theorem implies the principle of dependent choices. Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 25 (1977), no. 10, 933–934

است با اینکه برای هر عدد طبیعیِ m دنباله‌ی $\{f_n(m)\}_{n=1}^{\infty}$ از اعضای X از جایی به بعد ثابت باشد. ولی آنگاه می‌توان یک تابعِ $f:\mathbb{N}\to X$ معرفی کرد که در این متریک حدِ دنباله‌ی مذکور باشد. کافی است $f(m)$ را برابر با $f_n(m)\in X$ به ازای nهای به اندازه‌ی کافی بزرگ بگیریم. حال آماده‌ایم تا زیرمجموعه‌های باز و چگالی از فضا را که باید قضیه‌ی بئر به آنها اعمال گردد معرفی کنیم. قرار دهید:

$$U_n = \cup_{m>n}\cup_{(a,b)\in R}\{f\in X^{\mathbb{N}} \mid f(n)=a, f(m)=b\}$$

U_n باز است چرا که $f\in U_n$ معادل با وجودِ $k>n$ است با این ویژگی که $f(n)Rf(k)$ و حال توابعِ $g:\mathbb{N}\to X$ای که در گوی بازِ به شعاعِ 2^{-k-1} از f واقعند باید بر $\{1,\dots,k\}$ با آن مطابقت داشته باشند و علی‌الخصوص در n و k مقادیرِ به ترتیب $f(n)$ و $f(k)$ را اتخاذ کنند، امری که نشان می‌دهد $g(n)Rg(k)$ و از آنجا چون $k>n$: $g\in U_n$. چگال بودنِ U_n هم از ویژگی‌ای که برای رابطه‌ی R فرض شده حاصل می‌شود: $h:\mathbb{N}\to X$ را دلخواه بگیرید. عنصرِ $t\in X$ موجود است که برای آن $g(n)Rt$. پس برای هر $k>n$، تابعِ f_k که در k برابرِ t و بر $\mathbb{N}-\{k\}$ برابر با h درنظر گرفته می‌شود، به U_n تعلق دارد زیرا $f_k(n)Rf_k(k)$. به علاوه چون $h(m)=f_k(m)$ به جز احتمالاً در $m=k$، خواهیم داشت $d(h,f_k)\le 2^{-k}$. لذا دنباله‌ی $\{f_k\}_{k>n}$ از اعضای U_n به h همگراست و از آنجا چگال بودنِ U_n هم بدست می‌آید. حال بنابر قضیه‌ی بئر (نسخه‌ای از آن که در قضیه‌ی ۱ بیان شده) یک $f\in\cap_{n=1}^{\infty}U_n$ موجود است. پس می‌توان دنباله‌ی اکیداً صعودیِ $k_1<k_2<\dots$ از اعداد طبیعی را چنان برگزید که $f(k_n)Rf(k_{n+1})$ برای هر n. این همان تابع انتخابِ مطلوب است چرا که با قرار دادنِ $x_n:=f(k_n)$، دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ از عناصرِ X انتخاب می‌شود که در x_nRx_{n+1} برای هر n صدق می‌کند. □

۶ کاربردی از قضیه‌ی بئر در جبر جابجایی

بحث را با نتایجِ عمدتاً آنالیزی و توپولوژیکِ قضیه‌ی بئر شروع کردیم، در ادامه به احکامی مرتبط با آن در توابع مختلط و منطق پرداختیم و حال با کاربردی شگفت‌انگیز از این قضیه در جبرجابجایی[۴۶] برگرفته از [۷] به این مقاله خاتمه می‌دهیم! در این قسمت همه‌جا منظور از «حلقه»، «حلقه‌ی جابجایی و یکدار» است.

هدف ما تعمیم گزاره‌ی مقدماتیِ «اجتناب از ایده‌آل‌های اول»[۴۷] است که در دروس جبر دوره‌ی کارشناسی بیان می‌شود:

قضیه‌ی اجتناب از ایده‌آل‌های اول. فرض کنید A یک حلقه و $\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_n$ ایده‌آل‌هایی اول از آن باشند. اگر برای ایده‌آلِ $\mathfrak{a}$ از A داشته باشیم $\mathfrak{a}\subseteq\cup_{i=1}^n\mathfrak{p}_i$، آنگاه باید $\mathfrak{a}$ مشمول در یکی از $\mathfrak{p}_i$ها باشد: $\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{p}_i$ به ازای یک $1\le i\le n$.

این در واقع بیان می‌کند که اگر $\mathfrak{a}\nsubseteq\mathfrak{p}_i$ برای هر i، آنگاه یک عنصرِ x در ایده‌آلِ $\mathfrak{a}$ وجود دارد که از تمامیِ $\mathfrak{p}_i$ها «اجتناب» می‌کند. مواردی در رابطه با قضیه‌ی اجتناب از ایده‌آل‌های اول در تمرین زیر گنجانده شده‌اند.

تمرین ۲۸. *در برخی مراجع حکمی قوی‌تر از آنچه که در اینجا بیان گردید به عنوان «قضیه‌ی اجتناب از ایده‌آل‌های اول» در نظر گرفته می‌شود که به این شرح است: «فرض کنید $n\ge 2$ و $\mathfrak{a},\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_n$ ایده‌آل‌هایی از حلقه‌ی A باشند با این ویژگی که $\mathfrak{a}\subseteq\cup_{i=1}^n\mathfrak{p}_i$. آنگاه اگر حداکثر دو تا از ایده‌آل‌های $\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_n$ اول نباشند، به ازای حداقل یک $1\le i\le n$ خواهیم داشت $\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{p}_i$.»*

الف) *حکم فوق را برای $n=2$ ثابت کنید.*

ب) *حکم مذکور را با استقرا بر $n\ge 2$ ثابت کنید. (راهنمایی: پایه‌ی استقرا همان قسمت (الف) است. برای رسیدن از فرض استقرا به حکم استقرا، در حالت $n\ge 3$ مسأله را به حالتی تقلیل دهید که $\mathfrak{a}$ در اجتماع $\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_n$ مشمول باشد ولی در اجتماع هیچ $n-1$ تایی از آنها خیر. بدون کاسته شدن از کلیت می‌توان فرض کرد $\mathfrak{p}_n$ اول است. سپس برای هر $1\le j\le n$ یک عنصرِ $x_j\in\mathfrak{a}-\cup_{1\le i\le n, i\ne j}\mathfrak{p}_i$ انتخاب کنید و با بررسیِ $x_1\dots x_{n-1}+x_n\in\mathfrak{a}$ حل را تکمیل کنید.)*

پ) *یک صورت‌بندیِ دیگر از قضیه‌ی اجتناب از ایده‌آل‌های اول اینگونه بیان می‌شود: «اگر حلقه‌ی A شاملِ یک میدان نامتناهی باشد، آنگاه برای ایده‌آل‌های $\mathfrak{a},\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_n$ از A، $\mathfrak{a}\subseteq\cup_{i=1}^n\mathfrak{p}_i$ نتیجه می‌دهد که حداقل یکی از $\mathfrak{p}_i$ها $\mathfrak{a}$ را دربردارند.» این گزاره را ثابت کنید. (راهنمایی: یک فضای برداری بر میدانی نامتناهی به صورت اجتماع تعدادی متناهی از زیرفضاهای سره‌اش قابل بیان نیست.)*

ت) *حلقه‌ی خارج‌قسمتیِ*

$$\frac{\mathbb{Z}[x,y]}{(x^2,y^2)}$$

را در نظر بگیرید. تحقیق کنید برای ایده‌آل‌های $(\bar{x})$، $(\bar{y})$، $(\bar{x}+\bar{y})$ و $(\bar{x},\bar{y})$ از این حلقه داریم:

$$(\bar{x},\bar{y})=(\bar{x})\cup(\bar{y})\cup(\bar{x}+\bar{y})$$

در حالی که سمتِ چپ زیرمجموعه‌ی هیچ‌یک از سه ایده‌آل ظاهر شده در سمت راست نیست. نتیجه بگیرید که هیچ‌یک

[۴۶]این کاربرد از قضیه‌ی بئر را دکتر پورنکی به من معرفی کرد.
[۴۷]Prime avoidance theorem

از دو نسخه‌ای از قضیه‌ی اجتناب از ایده‌آل‌های اول که در این تمرین بیان شدند، قابل ارتقا نیستند. به عبارت دیگر نمی‌توان در صورت‌بندیِ نخست که در ابتدای مسأله داشتیم، تعداد ایده‌آل‌هایی را اول نیستند از دو بیشتر گرفت یا در صورت‌بندیِ ارائه شده در (ج)، شرط نامتناهی بودنِ میدان را حذف نمود.

هدف آن است که قضیه‌ی اجتناب از ایده‌آل‌های را به حالت شمارا تعمیم دهیم و بررسی کنیم که در صورت $\mathfrak{a} \subseteq \cup_{i=1}^{\infty}\mathfrak{p}_i$ در حالتی که هر ایده‌آلِ $\mathfrak{p}_i$ اول باشد، آیا لزوماً $\mathfrak{a}$ مشمول در یکی از $\mathfrak{p}_i$ها خواهد بود یا خیر؟ در حالت کلی پاسخ منفی است:

مثال ۲۹. *در حلقه‌ی چندجمله‌ایِ $\mathbb{Q}[x,y]$، به دلیل آنکه هر چندجمله‌ای عاملی تحویل‌ناپذیر دارد برای ایده‌آل ماکسیمالِ (x,y) می‌توان نوشت:*

$$(x,y) = \cup_{f(0,0)=0 \text{ تحویل‌ناپذیر با } f\in\mathbb{Q}[x,y]}(f)$$

در سمتِ راست، تعدادی شمارا ایده‌آل اول از $\mathbb{Q}[x,y]$ ظاهر شده‌اند در حالی که برای هر چندجمله‌ایِ f، $(x,y) \subseteq (f)$ تنها وقتی می‌تواند رخ دهد که f در $\mathbb{Q}[x,y]$ عامل مشترکی باشد از x و y. یعنی یک چندجمله‌ایِ ثابت و ناصفر باشد. پس در تساوی بالا هیچ‌یک از ایده‌آل‌های (f) شاملِ (x,y) نیستند.

همان‌گونه که مثال بالا نشان می‌دهد، به منظور آنکه حکم قضیه‌ی اجتناب از ایده‌آل‌های اول در حالت شمارا درست باقی بماند، باید خود را به کلاسی خاص از حلقه‌ها محدود کنیم.
تا اینجا همه‌ی صحبت‌ها جبری بود! قطعاً اگر بخواهیم در اثبات چیزی از قضیه‌ی بئر استفاده کنیم، باید با یک فضای توپولوژیک سروکار داشته باشیم. این مضمون تعریف زیر است:

تعریف ۳۰. *$\mathfrak{a}$ را ایده‌آلی بگیرید از حلقه‌ی A. «توپولوژیِ $\mathfrak{a}$-ادیک»[۴۸] بر حلقه‌ی A توپولوژی یکتایی است که این حلقه را به یک حلقه‌ی توپولوژیک[۴۹] تبدیل می‌کند به گونه‌ای که پایه‌ای برای بازهای حول صفر [۵۰] در این توپولوژی عبارتند از:*

$$A \supseteq \mathfrak{a} \supseteq \cdots \mathfrak{a}^n \supseteq \cdots$$

به عبارت دیگر در این توپولوژی زیرمجموعه‌ی U بازی حولِ $x \in A$ را دربردارد اگر وتنها اگر به ازای یک عدد طبیعیِ n داشته باشیم $x + \mathfrak{a}^n \subseteq U$.[۵۱]

[۴۸] $\mathfrak{a}$-adic topology

[۴۹] حلقه‌ای که ساختار یک فضای توپولوژیک را نیز دارد با این ویژگی که جمع و تفریق و ضرب در آن پیوسته‌اند.

[۵۰] توجه کنید که در یک گروه توپولوژیک، بازهای حول عنصر همانی به طور یکتا توپولوژی را مشخص می‌کنند.

[۵۱] همه‌جا منظور از نمادگذاریِ $S + x$ که در آن x عضوی از حلقه است و S زیرمجموعه‌ای از حلقه، عبارت است از زیرمجموعه‌ی $\{x + s \mid s \in S\}$.

قطعاً با داشتنِ یک فضای توپولوژیک، می‌توان از کامل بودن یا نبودن آن سخن گفت: در تعریف قبلی دنباله‌های کوشی عبارتند از دنباله‌هایی به صورتِ $\{x_\mu\}_{\mu=1}^{\infty}$ با این ویژگی که برای هر n به ازای μ و νهای به اندازه‌ی کافی بزرگ داشته باشیم: $x_\mu - x_\nu \in \mathfrak{a}^n$. همگرایی این دنباله‌ی کوشی به $x \in A$ به معنای آن است که برای هر ایده‌آلِ $\mathfrak{a}^n$ به ازای μهای به اندازه‌ی کافی بزرگ، $x_\mu - x$ در $\mathfrak{a}^n$ واقع شود. کامل بودن حلقه‌ی A در توپولوژیِ $\mathfrak{a}$-ادیک به این معنی تعریف می‌شود که هر دنباله‌ی کوشی در آن حدی یکتا داشته باشد. در صورت کامل نبودنِ فضا می‌توان آن را کامل کرد به این معنی که به طور چگال آن را در یک فضای کامل نشاند[۵۲]. دو دنباله‌ی کوشیِ $\{x_\mu\}_{\mu=1}^{\infty}$ و $\{y_\mu\}_{\mu=1}^{\infty}$ معادل نامیده می‌شوند اگر برای هر n داشته باشیم $x_\mu - y_\mu \in \mathfrak{a}^n$ هرگاه n به اندازه‌ی کافی بزرگ اختیار شود. حال می‌توان فضایی معرفی کرد که در آن تمامی دنباله‌های کوشی همگرا هستند و هر دنباله‌ی کوشی در A نقطه‌ای از آن را معین می‌کند. به این صورت که مجموعه‌ی $\hat{A}$ متشکل از تمامی کلاس‌های هم‌ارزیِ دنباله‌های کوشی در A را در نظر گرفت و آن را مجهز به توپولوژی یکتایی نمود که در آن نگاشتِ $A \to \hat{A}$ که هر عضو از A را به دنباله‌ی کوشی‌ای که جملاتش ثابتند می‌برد پیوسته است. این همان مفهومِ «تکمیل» [۵۳] است که در جبر جابجایی کاربردهای بسیاری دارد. در اینجا ضرب و جمع دنباله‌های کوشی و به تبع آن ضرب و جمع نقاطِ $\hat{A}$ معنی دارد و در واقع اعمال حلقه‌ی A به طور پیوسته به فضای $\hat{A}$ گسترش می‌یابند و آن را به یک حلقه‌ی توپولوژیک بدل می‌کنند. این همان چیزی است که در جبرجابجایی «تکمیلِ A در توپولوژیِ $\mathfrak{a}$-ادیک» نامیده می‌شود. می‌توان نشان داد که در این صورت حلقه‌ی توپولوژیکِ $\hat{A}$ [۵۴] کامل خواهد بود و $A \to \hat{A}$ یک همریختی حلقه‌ای. برای بررسی دقیق‌تر این مباحث به فصل ۱۰ از کتاب جبر جابجایی «عطیه-مک‌دونالد» مراجعه کنید.

مثال ۳۱. *اگر $A = \mathbb{Z}$ و $\mathfrak{a} = p\mathbb{Z}$ که در آن p عددی اول است، آنگاه $\hat{A}$ حلقه‌ی اعداد صحیحِ p-ادیک [۵۵] خواهد بود. هر عنصر آن یک سری نامتناهیِ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n p^n$ است که در آن داریم $0 \leq a_n \leq p-1$ در واقع این عضو را می‌توان به عنوان حد دنباله‌ی کوشیِ $\{\sum_{n=1}^{k} a_n p^n\}_{k=1}^{\infty}$ از اعضای $\mathbb{Z}$ تلقی کرد. به عنوان یک*

[۵۲] البته باید توجه کرد که چون اینجا با فضاهای متریک سروکار نداریم و ممکن است حلقه‌ی A در توپولوژی معرفی شده هاسدورف نبوده و در نتیجه حد دنباله یکتا نباشد، شاید لفظ «نشاندن» صحیح نباشد یا به عبارت دیگر $A \to \hat{A}$ یک‌به‌یک نشود.

[۵۳] completion

[۵۴] در واقع می‌توان این حلقه را به طور صریح معرفی کرد:

$$\hat{A} = \lim_{\leftarrow} \frac{A}{\mathfrak{a}^n}$$

که در آن $\lim_{\leftarrow}$ نمادِ «حد معکوس» inverse limit است.

[۵۵] p-adic integers

مثال دیگر، حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های n-متغیره با ضرایب در میدانِ k را در نظر بگیرید: $A = k[x_1,\dots,x_n]$ که به توپولوژی ناشی از ایده‌آل ماکسیمالِ $\mathfrak{m} = (x_1,\dots,x_n)$ مجهز شده است. $\hat{A}$ حلقه‌ی سری‌های توانی صوری n-متغیره با ضرایب در k یا $k[[x_1,\dots,x_n]]$ خواهد بود.

ما به کمک قضیه‌ی بئر، اجتناب از ایده‌آل‌های اول در حالت شمارا را برای آن دسته از حلقه‌های موضعی و نوتری[56] همچون $(A,\mathfrak{m})$[57] ثابت می‌کنیم که در توپولوژیِ $\mathfrak{m}$-ادیک کامل هستند. پس توجه خود را به حلقه‌های موضعی، نوتری و کامل معطوف می‌کنیم که حلقه‌ی اعداد صحیح p-ادیک و حلقه‌ی $k[[x_1,\dots,x_n]]$ مثال‌هایی از این نوعند [58]. توجه کنید که برای حلقه‌ی موضعی و نوتریِ $(A,\mathfrak{m})$، در حالت کامل بودن، توپولوژیِ $\mathfrak{m}$-ادیک از یک متر حاصل می‌شود: برای $x,y\in A$، فاصله‌ی $d(x,y)$ صفر گرفته می‌شود اگر $x=y$ و در غیر این صورت برابر با $\frac{1}{2^n}$ تعریف می‌شود که در آن $n\geq 0$ بزرگترین عدد صحیح نامنفی‌ای است با این ویژگی که $x-y\in\mathfrak{m}^n$. تحقیق آنکه این یک متریک است و همان توپولوژی فوق را القا می‌کند به سادگی امکان‌پذیر است و تنها نکته‌ی مبهم، دلیل خوشتعریفیِ d است که به معنای آن است که $\cap_{n=1}^{\infty}\mathfrak{m}^n = \{0\}$. این نتیجه‌ای است از قضیه‌ی معروفِ اشتراک کرول [59] که بیان می‌کند چنین تساوی‌ای در A و در حالت کلی‌تر در هر حلقه‌ی موضعی و نوتری صادق است. هر ایده‌آل از A همچون $\mathfrak{a}$ در توپولوژیِ $\mathfrak{m}$-ادیک بسته خواهد بود، چرا که اگر $x\in A-\mathfrak{a}$، آنگاه بازی حولِ x موجود است که $\mathfrak{a}$ را قطع نمی‌کند یا معادلاً به ازای یک عدد صحیح نامنفیِ n داریم $(x+\mathfrak{m}^n)\cap\mathfrak{a}=\emptyset$. این هم از آنجا ناشی می‌شود که در حلقه‌ی موضعی و نوتریِ $\frac{A}{\mathfrak{a}}$، عنصرِ $\bar{x}\neq 0$ بنابر قضیه‌ی اشتراک کرول در یکی از توان‌های ایده‌آل ماکسیمال یکتای حلقه، یعنی در حداقل یکی از ایده‌آل‌های

$$(\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{a}})^n = \frac{\mathfrak{m}^n+\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}} \quad (n\geq 0)$$

از حلقه‌ی $\frac{A}{\mathfrak{a}}$ واقع نیست. حال همه‌چیز برای بیان قضیه‌ی زیر آماده است:

قضیه ۳۲. تعمیم قضیه‌ی اجتناب از ایده‌آل‌های اول . *فرض کنید $(A,\mathfrak{m})$ یک حلقه‌ی موضعی، نوتری و کامل (به معنای کامل بودن در توپولوژیِ $\mathfrak{m}$-ادیک) باشد، $\mathfrak{a}$ ایده‌آلی از A و $\{\mathfrak{p}_i\}_{i=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از ایده‌آل‌های اولِ این حلقه. آنگاه اگر $\mathfrak{a}\subseteq\cup_{i=1}^{\infty}\mathfrak{p}_i$، باید $\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{p}_i$ به ازای یک $i\geq 1$.*

اثبات. در فضای متریک کاملِ A، $\mathfrak{a}$ و همچنین $\mathfrak{p}_i$ها زیرمجموعه‌هایی بسته‌اند و بنابراین $\mathfrak{a}$ ساختار یک فضای متریک کامل را از A به ارث می‌برد. فضای متریک کاملی که با توجه به $\mathfrak{a}\subseteq\cup_{i=1}^{\infty}\mathfrak{p}_i$، به صورت $\mathfrak{a}=\cup_{i=1}^{\infty}(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{p}_i)$ به عنوان اجتماع زیرفضاهای بسته‌اش نوشته شده. از قضیه‌ی ۲ باید حداقل یک زیرمجموعه‌ی $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{p}_i$ از فضای $\mathfrak{a}$ دارای نقطه‌ی درونی باشد. اگر چنین نقطه‌ای را x بنامیم، باید اشتراک بازی از A حولِ x با $\mathfrak{a}$ مشمول باشد در $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{p}_i$. ولی با توجه به توصیفی که از توپولوژی $\mathfrak{m}$-ادیک ارائه گردید، این به معنای وجودِ $x\in\mathfrak{a}$ و $n\in\mathbb{N}$ است با این ویژگی که $\mathfrak{a}\cap(x+\mathfrak{m}^n)\subseteq\mathfrak{a}\cap\mathfrak{p}_i$. از این نتیجه خواهیم گرفت که $\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{p}_i$. $1\notin\mathfrak{a}$ و لذا این ایده‌آل به تمامی داخل ایده‌آل ماکسیمال یکتای حلقه یا $\mathfrak{m}$ قرار دارد. پس برای یک $y\in\mathfrak{a}$ دلخواه، $y^n\in\mathfrak{a}\cap\mathfrak{m}^n$. پس $x+y^n\in\mathfrak{a}\cap(x+\mathfrak{m}^n)$ که بنابر شمول فوق ثابت می‌کند $x+y^n\in\mathfrak{a}\cap\mathfrak{p}_i$ در حالی که بنابر همان شمول، اینجا x هم به سمتِ راست تعلق دارد. پس $y^n\in\mathfrak{p}_i$ که چون $\mathfrak{p}_i$ اول است، $y\in\mathfrak{p}_i$ و از آنجا $\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{p}_i$ را بدست می‌دهد. $\square$

لازم به ذکر است که اینجا شرط کامل بودنِ حلقه ضروری است. چرا که مثال نقضِ ارائه شده در مثال ۲۹ برای حالت شمارای قضیه‌ی اجتناب از ایده‌آل‌های اول ، اگر حلقه‌ی $\mathbb{Q}[x,y]$ در ایده‌آل ماکسیمالِ (x,y) هم موضعی شود باز هم کار می‌کند و لذا مثالی از یک حلقه‌ی نوتری و موضعی ارائه می‌دهد که حکم قضیه‌ی ۳۲ برای آن صادق نیست. این به آن دلیل است که $\mathbb{Q}[x,y]_{(x,y)}$ در توپولوژی حاصل از ایده‌آل ماکسیمالش کامل نیست[60]. البته می‌توان اینجا هم صورت‌بندی‌های دیگری ارائه داد و شرطِ کامل بودن در قضیه‌ی ۳۲ را با شرط‌های دیگری مثلاً اینکه حلقه‌ی موضعی ونوتریِ A، جبری بر یک میدان ناشمارا باشد جایگزین کرد. رجوع کنید به [۷].

مراجع

[1] Dylan Wilson,THIS AIN'T NO MEAGER THEOREM, http://www.math.washington.edu/~morrow/336_09/papers/Dylan.pdf

[2] Sara Hawtrey Jones, Applications of Baire Category Theorem, http://projecteuclid.org/

[56] Noetherian

[57] منظور آن است که A یک حلقه‌ی موضعی (local) است. یعنی یک ایده‌آل ماکسیمال یکتا دارد که عبارت است از $\mathfrak{m}$.

[58] چرا که به عنوان حلقه‌هایی توپولوژیک فضاهایی کاملند زیرا از تکمیلِ یک فضای دیگر حاصل شده‌اند و همچنین قضیه‌ای از جبر جابجایی بیان می‌کند که با تکمیلِ یک حلقه در توپولوژی حاصل از یک ایده‌آل ماکسیمالش، حلقه‌ی حاصل نیز نوتری و به علاوه موضعی خواهد بود.

[59] Krull's intersection theorem

[60] تکمیل (completion) آن با $\mathbb{Q}[[x,y]]$ داده می‌شود.

DPubS/Repository/1.0/Disseminate?view=body&id=pdf_1&handle=euclid.rae/1337001353

[3] THE BAIRE CATEGORY THEOREM AND ITS CONSEQUENCES, http://www.ucl.ac.uk/~ucahad0/3103_handout_7.pdf

[4] Charles Chapman Pugh ,Real Mathematical Analysis, Springer-Verlag, New York, 2002.

[5] James R. Munkres, Topology 2ed, Prentice Hall, 2000.

[6] Steven G. Krantz, Complex Analysis as Catalyst, http://arxiv.org/pdf/math/0703006v1.pdf

[7] R. Y. Sharp, P. Vámos, Baire's category theorem and prime avoidance in complete local rings, Arch. Math. 44 (1985), 243-248

[8] The Baire Category Theorem, Ben Green, http://people.maths.ox.ac.uk/greenbj/notes.html

[9] http://mathoverflow.net

[10] http://mathlinks.ro

آیا گوی‌های بازِ توپولوژیک در $\mathbb{R}^n$ دیفئومورف‌اند؟

ک.

مقدمه

فرض کنید D یک n-گوی بازِ توپولوژیک باشد، که یعنی، D زیرمجموعه‌ی بازی در $\mathbb{R}^n$ باشد که با n-گوی باز B^n، همسانریخت است. در این صورت، آیا D با B^n دیفئومورف است؟ پاسخ این سئوالِ طبیعی، بسیار غافل‌گیر کننده است: زمانی که $n \neq ۴$، هر مجموعه‌ی بازی در $\mathbb{R}^n$ که با B^n همسانریخت باشد، C^∞ دیفئومورف با B^n نیز است، اما این گزاره به ازای $n = ۴$ برقرار نیست!

روش‌های اثبات نتایج فوق، غیرمقدماتی هستند. اما اگر n-گوی توپولوژیک مورد نظر، ستاره‌گون باشد، قادریم تا پاسخی مقدماتی برای سئوال فوق بیابیم. در حقیقت با این شرط اضافه، هر n-گوی باز توپولوژیک، C^∞ دیفئومورف با B^n است. هم‌چنین قادریم تا دیفئومورفیسم مورد نظر را به گونه‌ای بسازیم که راستاها را نیز حفظ کند. توجه کنید که در این حالت، هیچ‌گونه محدودیتی روی بعد وجود ندارد.

در ادامه و پس از اندکی نمادگذاری، مراحل ساختن دیفئومورفیسم مورد نظر را تعقیب خواهیم کرد. این مراحل، در قالب مسأله‌هایی تنظیم شده‌اند و پیشنهاد می‌کنیم که پیش از مرور پاسخ‌ها، نخست پاسخ خود را برای آن‌ها بیابید.

نمادگذاری

فرض کنید $||.||$ نرم اقلیدسی در $\mathbb{R}^n$ باشد و برای هر $r > ۰$ تعریف کنید:

$$S_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| = r\}$$

$$B_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| < r\}$$

هم‌چنین فرض کنید $\mu : S_۱ \to \mathbb{R}^۱$ تابعی پیوسته باشد که برای هر $\theta \in S_۱$، $\mu(\theta) > ۰$ و مجموعه باز $U_\mu \subset \mathbb{R}^n$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$U_\mu = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = ۰ \text{ یا } ۰ < ||x|| < \mu(x/||x||)\}$$

اگر U_μ به صورت فوق تعریف شده باشد، تابع μ را تابعِ تعریف کننده‌ی U_μ می‌نامیم.

۱

فرض کنید $\mu : S_۱ \to \mathbb{R}^۱$ تابع تعریف کننده U باشد و فرض کنید $r = \inf\{\mu(\theta) \mid \theta \in S_۱\}$ و $R = \sup\{\mu(\theta) \mid \theta \in S_۱\}$. هم‌چنین ثابت $r_۰$ را با $۰ < r_۰ < r$ در نظر بگیرید. در این صورت نشان دهید که دنباله توابع $\{\mu_i : S_۱ \to \mathbb{R}^۱\}_{i=۱}^{\infty}$ وجود دارد به طوری که:

الف) $r_۰ < \mu_۱(\theta) < \mu_۲(\theta) < \cdots$

ب) $\mu_{i+۱}(\theta) - \mu_i(\theta) > ۰$

ج) روی $S_۱$ به صورت یکنواخت $\mu_i \to \mu$.

پاسخ. دنباله‌ی $\{\epsilon_i\}_{i=۱}^{\infty}$ را در نظر بگیرید به طوری که:

(i) $\epsilon_i > ۰$

(ii) $\epsilon_i > \epsilon_{i+۱}$

(iii) $\epsilon_۱ < r - r_۰$

(iv) $\lim_{i\to\infty} \epsilon_i = ۰$

فرض کنید $\delta_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+۱}$. بنابراین $۰ < \delta_i < \epsilon_i$ و به علاوه $\lim_{i\to\infty} \delta_i = ۰$. توابع پیوسته $\tilde{\mu}_i : S_۱ \to \mathbb{R}^۱$ را با $\tilde{\mu}_i = \mu - \epsilon_i + \frac{\delta_i}{۲}$ تعریف کنید. در نتیجه $\tilde{\mu}_i(\theta)$ نقطه میانی بین $\mu(\theta) - \epsilon_i$ و $\mu(\theta) - \epsilon_{i+۱}$ است. برای هر i، فرض کنید $\mu_i : S_۱ \to \mathbb{R}^۱$ تابعی C^∞ باشد چنان که برای هر $\theta \in S_۱$ داشته باشیم $|\mu_i(\theta) - \tilde{\mu}_i(\theta)| < \frac{\delta_i}{۴}$ (وجود چنین تابعی، نتیجه‌ای از قضیه استون-وایرشتراس است). در این صورت $\{\mu_i\}_{i=۱}^{\infty}$ به وضوح در شرایط (الف) تا (ج) صدق می‌کند. □

۲

μ_iها را همان‌هایی بگیرید که در مسأله (۱) به دست آمده‌اند و فرض کنید $\mu_۰ : S_۱ \to \mathbb{R}^۱$ تابع ثابت $\mu_۰ \equiv r_۰$ باشد. هم‌چنین تعریف کنید $r_i = \inf\{\mu_i(\theta) | \theta \in S_۱\}$ و $R_i = \sup\{\mu_i(\theta) | \theta \in S_۱\}$. به علاوه ثابت‌های A_i را به صورت استقرایی با رابطه $A_۱ = R_۱$ و $A_{i+۱} = R_{i+۱}(A_i/r_i)$ تعریف کنید. حال نشان دهید که دنباله‌ی توابع $\{\eta_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^۱\}_{i=۰}^{\infty}$ وجود دارد به طوری که برای هر i، $\eta_i : U \to \mathbb{R}^۱$، C^∞ است و در مختصات قطبی (θ, r) روی $\mathbb{R}^n \backslash \{۰\}$ ($\theta \in S_۱$ و $r > ۰$)، $\eta_i(\theta, r) = \frac{A_i}{\mu_i(\theta)}$ و از آن نتیجه بگیرید که η_i روی شعاع‌ها غیرنزولی است و هم‌چنین روی U، $\eta_i \geq ۱$.

پاسخ. برای هر i فرض کنید $U_i = U_{\mu_i}$ مجموعه‌ای باشد که توسط μ_i تعریف شده است. در این صورت برای هر i، $\bar{U}_i \subset U_{i+1}$ و $U = \cup_{i=1}^{\infty} U_i$. در ضمن توجه کنید که $U_0 = B_{r_0}$ و با توجه به تعریف r_iها و R_iها داریم $r_0 < r_1 < \cdots$ و $R_0 < R_1 < \cdots$. همچنین:

$$\begin{aligned} A_{i+1}/R_{i+1} = A_i/r_i \ge A_i/R_i = A_{i-1}/r_{i-1} \ge \cdots \ge \\ \ge A_1/R_1 = 1 \end{aligned}$$

حال فرض کنید $\alpha : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ یک تابع C^∞ باشد به طوری که:

(i) $\alpha(t) = 0$ اگر $t \le 0$ و $\alpha(t) = 1$ اگر $t \ge 1$.

(ii) $\alpha'(t) > 0$ اگر $t \in (0,1)$.

همچنین مختصات قطبی (θ, r) در $\mathbb{R}^n$ را در نظر بگیرید و توجه کنید که اگر $r > 0$ و θ به یک نقشه مختصاتی روی S_1 محدود شده باشد، آن‌گاه (θ, r) یک نقشه‌ی مختصاتی روی $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ است. دنباله $\{\eta_i\}_{i=0}^{\infty}$ از نگاشت‌های $\eta_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ را به صورت استقرایی با $\eta_0 = 1$ و

$$\eta_i(\theta, r) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } r = 0 \\ \left(1 - \alpha\left(\frac{r - \mu_{i-1}(\theta)}{\mu_i(\theta) - \mu_{i-1}(\theta)}\right)\right)\eta_{i-1}(\theta, r) & \text{اگر } r \neq 0 \\ \quad + \alpha\left(\frac{r - \mu_{i-1}(\theta)}{\mu_i(\theta) - \mu_{i-1}(\theta)}\right)\frac{A_i}{\mu_i(\theta)} & \end{cases}$$

تعریف کنید.

توجه کنید که به ازای $0 < r \le \mu_{i-1}(\theta)$ (یعنی $(\theta, r) \in \bar{U}_{i-1}$) داریم $\eta_i(\theta, r) = \eta_{i-1}(\theta, r)$ و همچنین به ازای $r \ge \mu_i(\theta)$ داریم $\eta_i(\theta, r) = \frac{A_i}{\mu_i(\theta)}$. به خصوص زمانی که $0 \le r < r_0 = R_0$ باشد η_iها متحد ۱ هستند. بنابراین هر $\eta_i : U \to \mathbb{R}^1$ یک تابع C^∞ است. به علاوه اگر $(\theta, r) \in U_i \backslash U_{i-1}$ آن‌گاه $\eta_{i-1}(\theta, r) = A_{i-1}/\mu_{i-1}(\theta)$ و همچنین

$$A_i/\mu_i(\theta) \ge A_i/R_i = A_{i-1}/r_{i-1} \ge A_{i-1}/\mu_{i-1}(\theta)$$

لذا در طول هر شعاع $r \mapsto (\theta, r)$ (θ را ثابت بگیرید)، η_i در هر بازه $[\mu_{i-1}(\theta), \mu_i(\theta)]$ غیرنزولی است و در نتیجه در روی هر شعاعی که از مبدا آغاز می‌شود، غیرنزولی است. همچنین $\eta_i(\theta, 0) = 1$ بنابراین روی U، $\eta_i \ge 1$. □

۳

توابع $f_i : U \to \mathbb{R}^n$ را با ضابطه $f_i(\theta, r) = (\theta, \eta_i(\theta, r)r)$ در نظر بگیرید (η_iها همان‌هایی هستند که در مسأله (۲) ظاهر شدند). نشان دهید که $f(x) = \lim_{i\to\infty} f_i(x)$ نگاشتی C^∞ روی U است.

پاسخ. توجه کنید که $f_i(x) = \eta_i(x).x$. لذا f_iها نگاشت‌هایی C^∞ هستند و $f_i|_{\bar{U}_{i-1}} = f_{i-1}|_{\bar{U}_{i-1}}$. فرض کنید $\eta(x) = \lim_{i\to\infty} \eta_i(x)$. با توجه به اینکه $\bar{U}_{i-1} \subset U_i$، $\eta|_{U_i} = \eta_i|_{U_i}$ و $f|_{U_i} = f_i|_{U_i}$ لذا η و f نگاشت‌هایی C^∞ روی U هستند. توجه کنید که تعاریف استقرایی فوق و مسأله‌ی (۲) برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ معتبرند، اما می‌توان انتظار داشت که η و یا f روی $\partial U = \bar{U} \backslash U$ مشتق‌پذیر نباشند، حتی اگر η_iها و f_iها روی آن مشتق‌پذیر باشند. □

۴

به کمک f به دست آمده در مسأله (۳) نشان دهید که اگر $U \subset \mathbb{R}^n$ به وسیله‌ی نگاشت پیوسته‌ی $\mu : S_1 \to \mathbb{R}^1$ تعریف شده باشد، آن‌گاه دیفیومورفیسم C^∞، $h : U \to B_1$ وجود دارد که راستاها را نیز حفظ می‌کند.

پاسخ. فرض کنید $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_{n-1})$ مختصات روی S_1 باشد. حال $\mathrm{D}f$ را در مختصات $(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}, r)$ در $U \backslash \{0\}$ محاسبه می‌کنیم.

به سادگی می‌توان مشاهده کرد که در $U \backslash \{0\}$ داریم:

$$\mathrm{D}f = \left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & 0 \\ \hline * & r\frac{\partial \eta_i}{\partial r} + \eta_i \end{array}\right)$$

که در آن I_{n-1} ماتریس همانی $(n-1) \times (n-1)$ است. لذا $\det(\mathrm{D}f) = r\frac{\partial \eta_i}{\partial r} + \eta_i$. از طرفی η_i در r-راستا (θ ثابت) غیرنزولی است و بنابراین $\frac{\partial \eta_i}{\partial r} \ge 0$. همچنین با توجه به اینکه $r \ge 0$ و $\eta_i \ge 1$ نتیجه می‌شود که $\det(\mathrm{D}f) > 0$ در $U \backslash \{0\}$. از طرفی در همسایگی مبدأ، $f = id$، بنابراین f روی U ناتبهگون است. با توجه به اینکه f شعاع $r \mapsto (\theta, r)$ را حفظ می‌کند و $\eta_i \ge 1$ می‌توان نتیجه گرفت که f یک به یک است. از آن‌جا که $A_{i+1} = R_{i+1}A_i/r_i$ و $R_{i+1}/r_i \ge 1$ نتیجه می‌شود که $A_1 \le A_2 \le \cdots$. لذا یا $\lim_{i\to\infty} A_i = +\infty$ و یا $\lim_{i\to\infty} A_i = A < \infty$. برای هر $\theta \in S_1$:

$$\begin{aligned} \lim_{t \to \mu_i(\theta)} f(\theta, t) &= \lim f_i(\theta, t) \\ &= \lim(\theta, \eta_i(\theta, t)t) \\ &= (\theta, A_i\mu_i(\theta)/\mu_i(\theta)) \\ &= (\theta, A_i) \end{aligned}$$

(حد روی تمام مقادیر $t < \mu_i(\theta)$ محاسبه شده است). در نتیجه برای هر $i = 1, 2, \ldots$، $f(U_i) = B_{A_i}$ و لذا یا $f(U) = \mathbb{R}^n$ و یا $A < \infty$، $f(U) = B_A$. در نهایت ساختن دیفیومورفیسم C^∞ حافظ راستایی که $B_A \to B_1$ و یا $\mathbb{R}^n \to B_1$ آسان است. به این ترتیب مطلوب حاصل می‌شود. □

آنالیز روی خمینه‌ها (قسمت دوم)

احمدرضا حاج سعیدی صادق

۱ عملگرهای وینر-هوپف

در قسمت قبل مقاله[1] ، به بررسی عملگرهای فردهلم پرداختیم. توانستیم ثابت کنیم یک اختلال در این عملگرها توسط یک عملگر فشرده یا یک عملگر کراندار با نرم به اندازه کافی کوچک، اندیس، آنها را تغییر نمی‌دهد. همچنین دیدیم که هر عدد صحیح یک مولفه همبندی یکتا در فضای عملگرهای فردهلم مشخص می‌کند.

در این قسمت به بررسی رده‌ای از عملگرهای فردهلم به نام عملگرهای وینر-هوپف[2] می‌پردازیم. به ویژه خواهیم دید که اندیس این عملگرها که کاملاً تحلیلی تعریف شده است، برابر یک کمیت تماماً توپولوژیک است. به همین دلیل جدی‌ترین حرکت در نظریه اندیس با این قضیه که به "فرمول گسسته اندیس گوبرگ-کرین"[3] (۱۹۵۶) مشهور است، آغاز شد و به "فرمول اندیس عطیه-سینگر"[4] (۱۹۶۳) که حالت کلی آن روی خمینه‌هاست بدل شد. در ابتدا تعاریف و قضایای ابتدایی را تا حد نیاز بیان می‌کنیم، سپس به اثبات قضیه اصلی و برخی حالت کلی آن می‌پردازیم.

در این مقاله با فضاهای خطی زیر به طور نزدیکی سر و کار داریم (X یک فضای توپولوژیک به همراه یک اندازه روی آن است):

(۱) $C^0(X)$ فضای توابع پیوسته با مقادیر مختلط روی X با نرم سوپریمم، $\| f \|_\infty = \sup\{| f(x) | \mid x \in X\}$

(۲) $L^1(X)$ فضای توابع با مقادیر مختلط مطلقاً انتگرالپذیر روی X با نرم $\| f \|_1 = \int_X | f |$

(۳) $L^2(X)$ فضای توابع با مقادیر مختلط مربع انتگرالپذیر روی X با ضرب داخلی $\langle f, g\rangle_2 = \int_X f\bar{g}$

ممکن است خواننده با نظریه اندازه آشنا نباشد، اما جایی برای نگرانی نیست، چون ما با فضاهای متریک آشنایی مثل $X = S^1$ (دایره واحد در $\mathbb{R}^2$ یا $\mathbb{C}$) و $X = \mathbb{R}^n$ کار خواهیم کرد.

مثال ۱. *فضاهای $C^0(S^1)$، $L^1(S^1)$ و $L^1(\mathbb{R}^n)$ فضاهایی باناخ‌اند. همچنین $L^2(S^1)$ و $L^2(\mathbb{R}^n)$ فضاهایی هیلبرت‌اند.*

مثال ۲. *$L^2(S^1)$ یک پایه شادر طبیعی دارد: $\{z^n | n \in \mathbb{Z}\}$. زیرفضای هیلبرتی که توسط $\{z^n | n \ge k\}$ تولید می‌شود ($\overline{Span\{z^n|n\in\mathbb{Z}\}}$) را با H_k نمایش می‌دهیم. عملگر تصویر متعامد $L^2(S^1)$ روی H_0 را نیز با P نشان می‌دهیم.*

[1] مجله ریاضی شریف، شماره ۴، بهار ۹۲

[2] Wiener-Hopf Operators

[3] Discrete Gohberg-Krein Index Formula

[4] Atiyah-Singer Index Formula

تعریف ۳. *فرض کنیم $f \in C^0(S^1)$ و $M_f : L^2(S^1) \to L^2(S^1)$ عملگر ضرب در f باشد وهمچنین $i : H_0 \to L^2(S^1)$ عملگر شمول. عملگر کراندار T_f روی H_0 را توسط ترکیب $P \circ M_f \circ i$ تعریف می‌کنیم و به آن عملگر (گسسته) وینر-هوپف یا عملگر توپلیتز[5] وابسته به f می‌گوییم.*

از تعریف واضح است که عملگر $T : C^0(S^1) \to B(H_0)$، $f \mapsto T_f$، یک عملگر کراندار است و $\| T_f \| \le \| f \|_\infty$.

از این پس برای هر $u \in L^2(S^1)$ می‌توان نمایش $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{u}(n) z^n$ را در نظر گرفت که در آن $\widehat{u}(n) = \langle u, z^n \rangle_2$ را ضریب فوریه n-ام می نامیم. بنابراین برای $u \in H_0$، خواهیم داشت:

$$\widehat{T_f(u)}(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}(n-k)\widehat{u}(k)$$

برای راحتی $B(H_0)$ را با $\mathcal{B}$ نمایش می‌دهیم و $\mathcal{K}$ زیرفضای عملگرهای فشرده در $\mathcal{B}$ فرض می‌کنیم. نگاشت تصویر $\pi : \mathcal{B} \to \mathcal{B}/\mathcal{K}$ را در نظر بگیرید. نشان خواهیم داد $\pi T(fg) = \pi T(f)\pi T(g)$.

از مقاله قسمت اول می دانیم π عملگری پیوسته است؛ پس πT نیز پیوسته است. از آنجا که هرعضو از $C^0(S^1)$ را می توان با عناصری از $C^0(S^1)$ که تعداد متناهی ضرایب فوریه ناصفر دارد، تقریب زد، کافی است حکم فوق را برای f و g هایی ثابت کنیم که هر دو تعداد متناهی ضریب فوریه ناصفر دارند. پس فرض کنیم $f = \sum_{t=-m}^{m} \widehat{f}(t) z^t$ و $g = \sum_{t-n}^{n} \widehat{g}(t) z^t$. از آنجا که $\widehat{fg}(p) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(p-k)\widehat{g}(k)$ برای $k \ge m+n$ داریم

$$T_f T_g(z^k) = T_f\left(\sum_{t=-n}^{n} \widehat{g}(t) z^{t+k}\right) = \sum_{t=-n}^{n}\sum_{s=-m}^{m} \widehat{f}(s)\widehat{g}(t) z^{s+t+k} = T_{fg}(z^k)$$

بنابراین $T_f T_g |_{H_{m+n}} = T_{fg} |_{H_{m+n}}$. با توجه به شمول $H_{m+n} \subset H_0$، $codim(H_{m+n})$ متناهی است ، و در نتیجه $T_f T_g - T_{fg}$ عملگری از رتبه متناهی است. پس از مقاله قبلی می‌توان نتیجه گرفت $\pi T(fg) = \pi T(f)\pi T(g)$.

اکنون قدم بعدی را برمی‌داریم. به وضوح $\pi T(1) = \pi(Id) = \{Id + K \mid K \in \mathcal{K}\}$. بنابراین اگر $f \in C^0(S^1)$ همه جا ناصفر باشد، داریم:

$$\pi T(f)\pi T(f^{-1}) = \pi T(1) = \pi(Id)$$

و نتیجه می‌گیریم $\pi(T_f)$ وارون پذیر است و بنابر قسمت قبل مقاله T_f یک عملگر فردهلم است. اکنون به محاسبه اندیس این عملگر می‌پردازیم. بەازای $n \in \mathbb{Z}$ داریم $T_{z^n}(z^k) = z^{n+k}$؛ پس $T_{z^n} = (shift^-)^{|n|}$ یا $(shift^+)^n$ (عملگر $shift$ در مقاله قبل معرفی شده‌بود) و بنابراین $index(T_{z^n}) = -n$. اکنون فرض کنیم $f \in C^0(S^1)$ همه‌جا ناصفر باشد. اما از توپولوژی یا توپولوژی دیفرانسیلی می‌دانیم که می‌توان f را به طور پیوسته با گذر از توابع همه‌جا ناصفر به z^m تبدیل کرد که در آن $m = W(f,0)$ [6] . منظور از $W(f,0)$ عددچرخش f حول ۰ است. چون T پیوسته است و از آنجا که تغییرات پیوسته یک تابع فردهلم اندیس آن را تغییر نمی‌دهد پس

[5] Toeplitz Operator

[6] عدد چرخش حول صفر برای یک تابع مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته مانند $f : S^1 \to \mathbb{C} - \{0\}$ با تساوی $W(f,0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{S^1} \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z$ داده می‌شود.

$$index(T_f) = -W(f,۰)$$

پس ما توانستیم قضیه معروف زیر را ثابت کنیم:

قضیه ۴. *(فرمول گسسته اندیس گوبرگ-کرین)اگر $f \in C^{۰}(S^{۱})$ همه‌جا ناصفر باشد آنگاه T_f عملگری فردهلم با اندیس $-W(f,۰)$ است.*

همان طور که در این قضیه مشاهده می‌کنیم اندیس عملگر T_f که یک کمیت تحلیلی است برابر عدد چرخش نگاشت f گردید که یک کمیت توپولوژیک است و تنها به کلاس هوموتوپی این نگاشت بستگی دارد. در بحث‌های پیشرفته‌تر در نظریه اندیس کمابیش همین دیدگاه حاکم است؛ برای مثال اندیس عملگر دیراک[۷] را بر حسب انتگرال کلاس‌های مشخصه[۸] خمینه و مشخصه نسبی چرن[۹] کلاف کلیفورد[۱۰] بدست می‌آوریم که به قضیه اندیس عطیه-سینگر مشهورست. در اینجا پیوندی از آنالیز(اندیس عملگر) و توپولوژی(کلاس‌های مشخصه) دیده می‌شود.

فرض کنیم H یک فضای هیلبرت جدایی‌پذیر و N یک عدد طبیعی باشد. به راحتی می‌توان دید که $H\otimes\mathbb{C}^N$ نیز ساختار یک فضای هیلبرت جدایی‌پذیر را داراست. اکنون با فرض $H = L^{۲}(S^{۱})$، نگاشت تصویر $\overline{P} : L^{۲}(S^{۱}) \otimes \mathbb{C}^N \to H_{۰} \otimes \mathbb{C}^N$ به طور طبیعی تعریف می‌شود. برای نگاشت پیوسته $f : S^{۱} \to GL(N,\mathbb{C})$ نگاشت ضرب‌درf، $M_f : L^{۲}(S^{۱}) \otimes \mathbb{C}^N \to L^{۲}(S^{۱}) \otimes \mathbb{C}^N$، را مشابه قبل تعریف می‌کنیم. نگاشت شمول $H_{۰} \otimes \mathbb{C}^N$ در $L^{۲}(S^{۱}) \otimes \mathbb{C}^N$ را با i نمایش می‌دهیم. عملگر وینر-هوپف متناظر با f را با $T_f : H_{۰} \otimes \mathbb{C}^N \to H_{۰} \otimes \mathbb{C}^N$ نشان می‌دهیم و برابر $\overline{P} \circ M_f \circ i$ تعریف می‌کنیم.اکنون حالت تعمیم یافته قضیه قبل را بیان می‌کنیم:

قضیه ۵. *برای هر نگاشت پیوسته $f : S^{۱} \to GL(N,\mathbb{C})$، T_f عملگری فردهلم است و اندیس آن تنها به کلاس هوموتوپی آن در $[S^{۱}, GL(N,\mathbb{C})]$ وابسته است و برابر است با $-W(\det(f),۰)$.*

اثبات فردهلم بودن حدوداً مشابه قضیه قبل است : نمایش $(u_{۱},\cdots,u_N)$ را برای اعضای $H_{۰}\otimes\mathbb{C}^N$ در نظر می‌گیریم. f را هم با $[f_{ij}]$ نشان می‌دهیم. مانند قبل f و g هایی را در نظر می‌گیریم که f_{ij} و g_{ij}ها متناهی ضرایب فوریه ناصفر دارد و $f_{ij} = \sum_{t=-m}^{m} \widehat{f_{ij}}(t) z^t$ و $g_{ij} = \sum_{t=-n}^{n}\widehat{g_{ij}}(t)z^t$. با استدلال مشابه قبل داریم :

$$T_f T_g(z^{k_{۱}}\cdots,z^{k_N}) = T_{fg}(z^{k_{۱}}\cdots,z^{k_N}) \quad \text{برای} \quad k_{۱}\cdots,k_N \geq m+n$$

بقیه اثبات فردهلم بودن مشابه قبل است. اکنون به سراغ قسمت دوم قضیه می‌رویم. از پیوستگی T نتیجه می‌شود اگر f و g هوموتوپ باشند، آنگاه دو عملگر فردهلم T_f و T_g در یک مولفه همبندی هستند و در نتیجه اندیس برابر دارند. اکنون f_nای را در نظر بگیریم که نمایش زیر را دارد:

$$\begin{pmatrix} z^n & & & \\ & ۱ & & ۰ \\ & & \ddots & \\ ۰ & & & ۱\end{pmatrix}$$

بنابراین مانند استدلال قضیه قبل اندیس T_{f_n} برابر خواهد بود با $-n$. می توان نشان داد $\pi_{۱}(GL(N,\mathbb{C})) = \mathbb{Z}$ و چون اعضای$[S^{۱}, GL(N,\mathbb{C})]$ را می‌توان به عنوان کلاس‌های تزویجی $\pi_{۱}(GL(N,\mathbb{C}))$ درنظر گرفت، پس $[S^{۱},GL(N,\mathbb{C})] = \mathbb{Z}$(ساختار گروهی القایی از$\pi_{۱}(GL(N,\mathbb{C}))$ روی $[S^{۱},GL(N,\mathbb{C})]$ را در نظر می‌گیریم). پس توابع با نمایش ماتریسی فوق نماینده‌های کلاس‌های هوموتوپی $[S^{۱},GL(N,\mathbb{C})]$ هستند. نگاشت پیوسته $H : C^{۰}(S^{۱},GL(N,\mathbb{C})) \to C^{۰}(S^{۱})$ را با ضابطه $f\mapsto \det f$ تعریف می‌کنیم. نگاشت القایی$H_* : [S^{۱},GL(N,\mathbb{C})] \to [S^{۱},\mathbb{C}\backslash\{۰\}]$ را در نظر می‌گیریم. از آنجا که $H(f_n) = z^n$ پس H_*یک ایزومورفیسم است. بنابر آنچه که تاکنون گفته‌ایم، نتیجه می‌گیریم

$$index(T_f) = -W(\det(f),۰)$$

۲ عملگرهای انتگرالی

در این بخش به بررسی عملگرهای انتگرالی خواهیم پرداخت که اندیس آن‌ها به تبدیل فوریه پیوسته مربوطاند همانطور که عملگرهای فوق به تبدیل فوریه گسسته ارتباط داشتند. به همین دلیل به عملگر وینر-هوپف متناظر به آن را عملگر وینر-هوپف پیوسته می‌گوییم.
برای عملگر $f \in L^{۱}(\mathbb{R}^n)$ تبدیل فوریه آن، $\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi x} f(x)dx$$

می‌توان ثابت کرد $\widehat{f} \in C^{۰}(\mathbb{R}^n)$. همچنین $L^{۱}(\mathbb{R}^n)$ دارای ضرب جابه‌جایی و شرکت‌پذیر بنام کانولوشن[۱۱] است:

$$f*g(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

تبدیل فوریه و کانولوشن خواص زیر را دارا هستند:

(۱) $\widehat{fg} = (\widehat{f} * \widehat{g})$ ، $\widehat{f}\widehat{g} = \widehat{f*g}$ و $\mathcal{F}^{-۱}(f)(x) = \frac{۱}{(۲\pi)^n}\mathcal{F}(f)(-x)$ اگر f، g، $\widehat{f}$ و $\widehat{g}$ همگی متعلق به $L^{۲}(\mathbb{R}^n)$ باشند.

(۲) $M^pD^q\mathcal{F} = (-۱)^{|q|}\mathcal{F}D^pM^q$ که در آن

(i) $p = (p_{۱},\cdots,p_n)$، $q = (q_{۱},\cdots,q_n)$ و $|q| = \sum q_i$.

(ii) $M^p(x_{۱},\cdots,x_n) := \Pi x_i^{p_i}$.

(iii) $D^q := (-۱)^{|q|}\frac{\partial^q}{\partial x_{۱}^{q_{۱}}\cdots\partial x_n^{q_n}}$.

(۳) برای $f,g \in L^{۱}(\mathbb{R}^n)\cap L^{۲}(\mathbb{R}^n)$ تساوی پارسوال[۱۲] برقرار است: $\widehat{f},\widehat{g} \in L^{۲}(\mathbb{R}^n)$ و $\langle f,g\rangle_{۲} = (۲\pi)^{-n}\langle\widehat{f},\widehat{g}\rangle_{۲}$.

(۴) تبدیل فوریه متناظر روی $f \in L^{۲}(\mathbb{R})$ را با $\widetilde{f}$ نشان می‌دهیم و توسط $\widetilde{F}(f) = \widetilde{f}(\xi) = \frac{d}{d\xi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ix\xi}-۱}{-iy}f(x)dx$ تعریف می‌کنیم.

[۷] Dirac Operator
[۸] Charactristic Classes
[۹] Relative Chern Character
[۱۰] Clifford Bundle
[۱۱] Convolution
[۱۲] Parseval's Equality

برای هر $\phi \in L^1(\mathbb{R})$ می‌توان عملگر $K_\phi = \phi *$ را تعریف کرد اما پیش از همه باید دامنه و برد آن را مشخص کرد:

لم ۶. *نگاشت* $K_\phi : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ *یک عملگر کراندار است.*

فرض کنیم $f \in L^2(\mathbb{R})$ باید نشان دهیم $K_\phi(f) \in L^2(R)$ و K_ϕ کراندار است:

$$\mid K_\phi(f)(x) \mid^2 \leq$$
$$(\int_{-\infty}^{\infty} \mid f(y) \mid^2 \mid \phi(x-y) \mid dy)(\int_{-\infty}^{\infty} \mid \phi(x-y) \mid dy) =$$
$$(\int_{-\infty}^{\infty} \mid f(y) \mid^2 \mid \phi(x-y) \mid dy)(\int_{-\infty}^{\infty} \mid \phi(t) \mid dt)$$

بنابراین

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mid K_\phi(f)(x) \mid^2 dx \leq (\int_{-\infty}^{\infty} \mid \phi(t) \mid dt)(\int_{-\infty}^{\infty} \mid f(y) \mid^2 dy)(\int_{-\infty}^{\infty} \mid \phi(x-y) \mid dx) =$$
$$(\int_{-\infty}^{\infty} \mid \phi(t) \mid dt)^2(\int_{-\infty}^{\infty} \mid f(y) \mid^2 dy)$$

پس هر دو حکم ثابت شد.
از این پس K_ϕ را به عنوان عملگری روی فضای هیلبرت $L^2(\mathbb{R}^+)$ و به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$K_\phi(u)(x) = \int_0^\infty \phi(x-y)u(y)dy، \ x \in R^+$$

شاید این تعریف کمی عجیب به نظر برسد؛ اما این تعریف را می‌توان توجیه کرد:
از ضابطه تبدیل کیلی $C : \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\} \to \{z \in \mathbb{C} \mid \mid z \mid < 1\}$ -که z را به $\frac{z-i}{z+i}$ می‌برد- استفاده می‌کنیم و نگاشت $\kappa : \mathbb{R} \to S^1$ را می‌سازیم. اکنون یک ایزومتری $U : L^2(S^1) \to L^2(\mathbb{R})$ با ضابطه $f \mapsto \sqrt{2}\frac{f \circ \kappa(x)}{x+i}$ به دست می‌آید و این خاصیت خوب را دارد که زیرفضای هیلبرت $H_0 = \{L^2(S^1) \mid \widehat{f}(n) = 0, n < 0\} \ni f$ را به زیرفضای هیلبرت $\widetilde{H_0} : \{g \in L^2(\mathbb{R}) \mid \widehat{g} \mid_{(-\infty,0)} = 0\}$ می‌برد که فضای هیلبرت اخیر با $L^2(\mathbb{R}^+)$ ایزومتر است.
در بخش قبل نگاشت تصویر $P : L^2(S^1) \to H_0$ را تعریف کردیم. نگاشت تصویر متناظر $\widetilde{P} = UPU^{-1} : L^2(\mathbb{R}) \to \widetilde{H_0}$ را نیز تعریف می‌کنیم. برای $f \in C^0(\mathbb{R})$ ضرب در f را با M_f و نگاشت شمول $\widetilde{H_0} \subset L^2(\mathbb{R})$ را با i نشان می‌دهیم. عملگر (پیوسته) وینر-هوپف متناظر با f، $\widetilde{T_f} : \widetilde{H_0} \to \widetilde{H_0}$ را با رابطه $\widetilde{T_f} = \widetilde{P} \circ M_f \circ i$ تعریف می‌کنیم. اکنون با فرض $g := f \circ \kappa^{-1}$ از تعریف داریم $W_f = U \circ T_g \circ U^{-1}$ ولذا W_f عملگری فردهلم است. اگر $f = z + \widehat{\phi}$ که $z \in \mathbb{C}$ ثابت است. می‌توان نشان داد $\widetilde{W_f(h)} = \widehat{f} * \widetilde{h} = z\widetilde{h} + \int_0^\infty \phi(x-y)\widetilde{h}(y)dy$. بنابراین $zId + K_\phi = \widetilde{F}W_f\widetilde{F}^{-1}$.
پس نتیجه می‌گیریم:

قضیه ۷. *فرض کنیم $\phi \in L^1(\mathbb{R})$ با این فرض که $1+\widehat{\phi}$ همه جا ناصفر است در این صورت عملگر*

$$Id + K_\phi : L^2(\mathbb{R}^+) \to L^2(\mathbb{R}^+)$$

عملگری فردهلم با اندیس $W(1+\widehat{\phi}, 0)$ است.

این قضیه که آغاز حرکت به سمت عملگرهای شبه-دیفرانسیلی[13] و عملگرهای بیضوی[14] است، صورتی پیوسته از فرمول گوبرگ-کرین است. عملگرهای بیضوی هسته مرکزی نظریه اندیس هستند و در آینده به تشریح آن‌ها می‌پردازیم.

مراجع

[1] David Bleecker, Bernhelm Booth-Bavnbek, Index Theory, 2012.

[2] John Roe, Elliptic Operators, Topology and Asymptotic Methods, 1998.

[3] E.C.Titchmarsh, Introduction To The Theory Of Fourier Integrals, 1948.

[13] Pseudo-Differential Operators
[14] Elliptic Operators

مقدمه‌ای بر اسپینورها

مهدی کوره‌چیان

مقدمه

جهان فیزیک به دو گستره گرانش و نسبیت عام و دنیای کوانتومی تقسیم شده است. این آرزوی دیرینه فیزیکدانان و ریاضیدانان بوده که بتوانند فرمالیسم و نظریه واحدی برای توجیه تمام نظریات فیزیکی ارائه کنند. در چند دهه اخیر کارهایی در این زمینه از نظر ریاضی انجام شده است که یکی از موفق ترین آن ها جبرهای کلیفورد می باشد. ایده پیدایش آن ها مانند بسیاری دیگر از مفاهیم ریاضی توسط فیزیکدانان ارائه شده است. دیراک برای توصیف معادله موج کوانتومی ذره‌ای با اسپین $\frac{۱}{۲}$ بصورت هوشمندانه ای از این جبر استفاده می کند. بعدها این مفهوم توسط ریاضیدانانی نامی مانند عطیه[۱] توسعه یافته و به تدریج غنا و ویژگی های منحصر به فرد آن کشف می شود. امروزه با استفاده از این فرمالیسم جبری بسیاری از پدیده های فیزیکی مانند الکترومغناطیس ، نسبیت خاص ، اسپین ذرات ، معادلات دیراک را می توان توسط یک زبان واحد بیان کرد. خواننده علاقه مند می تواند برای آگاهی بیشتر در این مورد به منابع[۱]و [۲] و [۳] مراجعه کند. شاید بخاطر همین امر باشد که راجر پنروز[۲] گروه کلیفورد $cl(۱,۳)$ را گروه توصیف کننده جهانی که در آن زندگی می کنیم می داند. پس تلاش او برای معرفی مفهوم هندسی معادل جبرهای کلیفورد در نسبیت عام کاملا منطقی به نظر می رسد.

در این مقاله سعی می شود تا بطور خلاصه مفهوم هندسی و جبری اسپینورها[۳] مورد بررسی قرار گیرد. در این‌جا منبع اصلی جلد اول کتاب Spinors and space-time نوشته پنروز می‌باشد.

[۱] Atiyah
[۲] Roger Penrose
[۳] Spinors

۱ دیدگاه هندسی اسپینورها

۱.۱ معرفی فضای مینکوفسکی

فرض کنیم V یک فضای برداری حقیقی چهاربعدی $\mathbb{R}^{۴}$ باشد. اگر آن را به یک متریک با نشانه‌گان[۴] $(+---)$ و یک جهت فضاگون[۵] و یک جهت زمانی[۶] مجهز کنیم، فضای به دست آمده را فضای مینکوفسکی می‌نامند. اگر (t,x,y,z) یک مختصات روی این فضای برداری باشد هر بردار دلخواه مانند U را می‌توان در این مختصاتبه صورت

$$U=u^{۰}t-u^{۱}x-u^{۲}y-u^{۳}z \qquad (۱)$$

نوشت. اگر (t',x',y',z') پایه دیگری برای این فضا باشد با توجه به روابطی که در جبر خطی وجود دارد این دو پایه را می توان توسط یک ماتریس ناتکین ۴×۴ توسط رابطه

$$t'_i=\alpha_i^j t_j \qquad (۲)$$

به یکدیگر تبدیل کرد. حال اگر g_i پایه دیگری برای این فضا باشد بین پایه ها تبدیلی زیر وجود دارد[۷]

$$g_i=\alpha_i^k\beta_k^j t'_j \qquad (۳)$$

پس رابطه تبدیل پایه ها یک رابطه تعدی می باشد. ماتریس‌های تبدیل مختصاتی را می توان به دو کلاس مجزا ماتریس‌های با دترمینان مثبت ومنفی تقسیم کرد. به دسته اول ویژه[۸] و به دسته دوم غیرویژه[۹] می گوییم. با انتخاب هر کدام به عنوان کلاس تبدیلات مختصاتی مربوط به فضا یک جهت[۱۰] نسبت می دهیم. متریک متناظر با این فضا را با نماد η^{ij} نمایش می دهیم که فرم ماتریسی آن بصورت

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۱ \end{pmatrix}$$

می‌باشد. اگر η_{ij} متریک متناظر فضای هم بردارهای فضای مینکوفسکی (دوگان فضای مینکوفسکی) باشد، با توجه به آنکه برای هر فضای متریک می توان پایه متناظر فضای هم بردارش را بفرم کانونی انتخاب کرد بطوری که $g^{ik}g_{kj}=\delta_{ij}$ برقرار باشد، پس برای فضای متریک مینکوفسکی فوق داریم

$$\eta^{ik}\eta_{kj}=\delta_{ij} \qquad (۴)$$

[۴] signature
[۵] orientation
[۶] time orientation
[۷] در نوشتن فرمول‌ها از نمادگذاری فیزیکی استفاده شده و سیگما حذف گردیده.
[۸] proper
[۹] inproper
[۱۰] orientation

همچنین به این فضا می‌توان عمل دو خطی $\langle,\rangle$ را از $V \times V \to \mathbb{R}$ به عنوان یک شبه متریک نسبت داد.

$$U, W \in V, \langle U, W\rangle := u^i w^j \eta_{ij} = u^0 w^0 - u^1 w^1 - u^2 w^2 - u^3 w^3 \quad (۵)$$

و برای هر بردار U از این فضای برداری همانند فضای اقلیدسی یک نرم در نظر گرفت.

$$||U|| := \langle U, U\rangle = u^i u^j \eta_{ij} = (u^0)^2 - (u^1)^2 - (u^2)^2 - (u^3)^2 \quad (۶)$$

این نرم بردارهای فضای داده شده را در سه دسته مجزا طبقه‌بندی می‌کند.

$$\begin{cases} \text{time like} & \text{if } ||U|| > 0 \\ \text{space like} & \text{if } ||U|| < 0 \\ \text{null or light like} & \text{if } ||U|| = 0 \end{cases} \quad (۷)$$

به راحتی می‌توان بررسی کرد که علامت حاصلضرب مؤلفه‌های زمانی دو بردار زمان‌گونه یا نورگونه (که آن‌ها را casual می‌نامیم) با علامت حاصل ضرب داخلی این دو بردار برابر است. در نتیجه دو بردار از این دسته بر هم عمود نیستند مگر آنکه یکی از آنها نورگونه و متناسب[11] باشند. پس بردارهای فضای V را می‌توان به دو گروه مجزا تبدیل کرد. آن‌هایی که حاصلضرب داخلی دو بردار[12] از یک کلاس مثبت آنها مثبت باشد را یک دسته و آن هایی که حاصلضرب داخلی اعضای نامتناسبشان از دو کلاس متفاوت منفی باشد.

به بردارهای دسته اول بردارهای آینده نشان[13] و به دسته دیگر گذشته نشان[14] می‌گویند. اگر بردار زمانی t زمان‌گونه باشد آنگاه چاربردار[15] (t, x, y, z) را راست زمان[16]می‌نامند! و آن دسته بردارهایی هستند که مولفه زمانی آنها u^0 بزرگتر از صفر باشد.

برای قسمت فضایی بردارها می‌توان جبر کواترنیون ها را اعمال کرد تا بتوان از این طریق یک جهت نیز به این قسمت نسبت داد. اگر $\{e^i\}$ یک پایه متعامد یکه متناظر با این فضا باشد و داشته باشیم

$$e^k = i\epsilon_{ijk} e^i \times e^j \quad (۸)$$

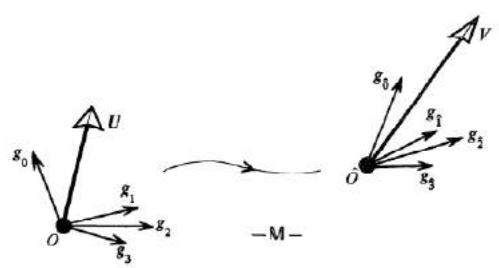
که ϵ_{ijk} برابر است با ۱+ اگر جایگشت روی مجموعه $\{1, 2, 3\}$ زوج باشد و در غیراین صورت برابر است با ۱−، آن‌گاه می‌توان برای قسمت فضاگونه دو جهت راستگرد و چپگرد معرفی کرد.

حال چاربردار (t, x, y, z) را راستگرد می‌گوییم هرگاه هم از نظر زمانی ویژه باشد و هم جهت تعریف شده بر روی محورهای فضاگونه آن در جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد و برای راحتی کار به‌این چاربردار محدود شده[17] می‌گویند.

با توجه به اصل هم ارزی نسبیت خاص، تمام چارچوب‌های لخت با یکدیگر هم ارز هستند و هیچ کدام بر دیگری ارجحیت ندارد. با توجه به‌این اصل، فضای مینکوفسکی یک فضای آفین هندسی می‌شود؛ یعنی کمیت‌های فیزیکی مانند بردارها تحت انتقال از نقطه‌ای به نقطه‌ای دیگر و یا دوران نسبت به یک محور ماهیتشان عوض نمی‌شود و هیچ مبدأ مختصاتی ارجحی وجود ندارد.

در نتیجه یک چارچوب مختصاتی برای بیان رویدادها شامل انتخاب یک مبدأ دلخواه مانند O و یک چاربردار $g_i = O\vec{Q}_t$ می‌باشد که $Q_i \in M$ می‌باشد. حال اگر P و O یک چارچوب مختصاتی دیگر برای توصیف رویدادهای عالم باشد و $\vec{U}$ بردار دلخواهی در چارچوب اولی باشد ، آن‌گاه ماتریس وارون پذیر g_i^j وجود دارد که به وسیله‌ی آن می‌توان مختصات $\vec{V}$ را در چارچوب جدید به دست آورد.

$$\vec{V} = g_i^j U_j \quad (۹)$$



به ماتریس فوق یک تبدیل خطی بین‌این دو چارچوب لخت می‌گویند. اگر تبدیلات خطی ضرب داخلی را حفظ کند (به عبارت دیگر طول بردارها تحت‌این تبدیلات خاص حفظ شود) ، آن را تبدیل فعال لورنتز[18] و اگر جهت پذیری فضایی و نیز جهت زمانی را حفظ کند به آن تبدیل لورنتز محدود شده[19] می‌گویند.این تبدیلات خاص تشکیل یک گروه جبری می‌دهند که آن را گروه لورنتز محدود شده[20] می‌نامند. کمیت تانسوری متریک را که در واقع یک تانسور متقارن هموردا می‌باشد می‌توان توسط رابطه

$$\eta_{ij} = v_k^i v_l^j \eta_{kl} \quad (۱۰)$$

بوسیله بردار انتقال دو فضا بدست آورد و با استفاده ازاین رابطه و محاسبات جبری نمایش ماتریسی برای گروه محدود شده تبدیلات

[11] proportional
[12] non proportional
[13] future pointing
[14] past pointing
[15] بردار چهارتایی
[16] orthochronous

[17] restricted
[18] active Lorentz transformation
[19] restricted lorentz transformation
[20] restricted Lorentzian group

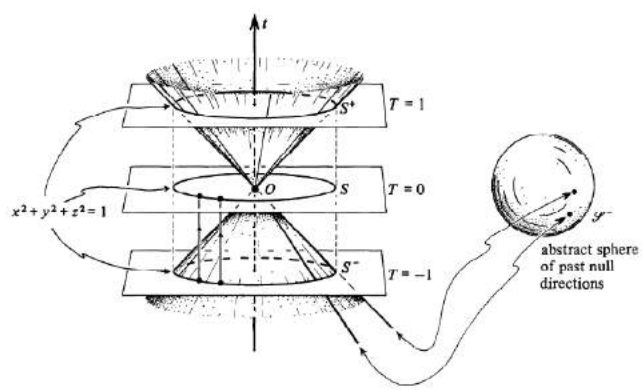
لورنتز بست آورد. خواننده علاقه مند می‌تواند برای اطلاع بیشتر نسبت به‌این مسئله به منبع [۴] مراجعه کند.

۲.۱ مسیرهای نورگونه و تبدیلات اسپینی

فرض کنیم (t, x, y, z) بردارهای پایه متعامد یکه فضای مینکوفسکی M باشند. هر بردار دلخواه U را می‌توان دراین پایه به صورت

$$U = u^0 t - u^1 x - u^2 y - u^3 z \qquad (۱۱)$$

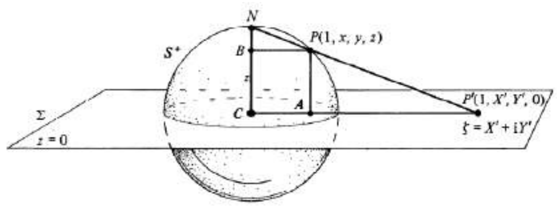
نوشت. همان طور که قبلا گفته شد بردارهای نورگونه آن‌هایی هستند که نرم آن ها برابر با صفر باشند. فضایی که شامل بردارهای نورگونه آینده سو[۲۱] باشند را با نماد τ^+ و گذشته را با نماد τ^- نمایش می‌دهند. حال دو کره فضایی که توسط بردارهای نورگونه تولید می‌شوند را در لحظه‌های $t = \pm 1$ در نظر می‌گیریم و آن ها را به ترتیب S^+ و S^- می‌نامیم و خود به عنوان ناظرایستا در مبدأ قرار می‌گیریم. واضح است که نقاط داخلی S^- شامل نورهای زمان‌گونه‌ای است که از گذشته به ما می‌رسد و S^+ شامل نقاط زمان‌گونه به سمت آینده می‌شود.



حال فرض کنیم اشعه نوری از نقطه $(-1, x, y, z)$ به سمت ناظر تابیده شود. با توجه به شکل بالااین پرتو از مبدأ عبور می‌کند وبه نقطه متناظرش $(1, -x, -y-, z)$ می‌رسد که مختصاتش قرینه نقطه آغازی می‌باشد. پس می‌توان یک تناظر یک به یک و پوشا بین دوکره برقرار کرد. به‌این نگاشت، نگاشت پادقطبی[۲۲] می‌گویند. تجسم اینکه این نگاشت جهت‌پذیری را معکوس می‌کند دور از ذهن نمی‌باشد. یعنی اگر از نظر ناظر ساکن در مبدأ بردار مماسی که بر روی S^- در جهت حرکت عقربه‌های زمان حرکت می‌کند وقتی به S^+ توسط این تابع نگاشته می‌شود ، از دید همان ناظر در جهت خلاف عقربه‌های ساعت حرکت می‌کند.

[۲۱] future point null vector
[۲۲] anti podal

در ریاضی می‌توان نقاط روی سطح یک کره را بصورت یک به یک و پوشا متناظر با صفحه اعداد مختلط در نظر گرفت که‌این کار از لحاظ تاریخی به ریمان نسبت داده شده است. مثلا S^+ را به عنوان کره ریمان در نظر می‌گیریم. کافیست نقطه قطب شمال کره $N = (1, 0, 0, 1)$ را از روی سطح کره برداریم. سپس خطوطی را که ازاین نقطه و یک نقطه دلخواه از سطح کره عبور می‌کند را امتداد داده تا مشاهده کنیم صفحه اعداد مختلط (یعنی $Z = 0$) را در کدام نقطه قطع می‌کند.



هر نقطه روی صفحه اعداد مختلط را بصورت

$$\zeta = X' + iY' \qquad (۱۲)$$

در نظر می‌گیریم. از آن جا که مؤلفه زمانی برای تمام نقاط S^+ ثابت و برابر $t = 1$ است می‌توان از آن صرف نظر کرد و محاسبات را فقط روی قسمت فضایی انجام داد. مثلا اگر یک نقطه دلخواه برابر با (x, y, z) داشته باشیم ، آن‌گاه با توجه به قضیه تالس در هندسه اقلیدسی می‌توان معادله خطی را که ازاین نقطه و قطب شمال کره می‌گذرد را بصورت زیر محاسبه کرد.

$$\frac{X'}{x} = \frac{Y'}{y} = \frac{Z' - 1}{z - 1} \qquad (۱۳)$$

از طرف دیگراین خط صفحه اعداد مختلط را در نقطه $Z' = 0$ قطع می‌کند. حال اگر رابطه جبری نقاط روی این کره $(x^2 + y^2 + z^2 = 1)$ را در معادله بالا جایگذاری کنیم مقادیر X' و Y' بصورت زیر بدست می‌آید.

$$X' = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2} - 1} = \frac{x}{1 - z}$$

$$Y' = \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2} - 1} = \frac{y}{1 - z}$$

$$\zeta = X' + iY' = \frac{x + iy}{1 - z}$$

همچنین اگر مختصات ζ روی صفحه مختلط داده شده باشد به راحتی می‌توان نقطه متناظر با آن را روی کره S^+ بدست آورد که بر حسب ζ و مزدوج مختلط آن $\bar{\zeta}$بصورت زیر بیان می‌شود.

$$x = \frac{\zeta + \bar{\zeta}}{1 + \bar{\zeta}\zeta}, y = \frac{\zeta - \bar{\zeta}}{i(1 + \bar{\zeta}\zeta)}, z = \frac{\bar{\zeta}\zeta - 1}{1 + \bar{\zeta}\zeta} \qquad (۱۴)$$

این روابط را می‌توان بر حسب مختصات قطبی بیان کرد. کافی است معادلات

$$x=\sin\theta\cos\phi, y=\sin\theta\sin\phi, z=\cos\theta \qquad (۱۵)$$

را در رابطه $\zeta=X'+iY'=\frac{x+iy}{1-z}$ جایگذاری کنیم و ζ را بر حسب مختصات قطبی به صورت

$$\zeta=X'+iY'=\cot\frac{\theta}{2}(\cos\phi+i\sin\phi)=e^{i\phi}\cot\frac{\theta}{2} \qquad (۱۶)$$

بنویسیم. روابط فوق بر روی S^+ را می‌توان توسط نگاشت پادقطبی به کره S^- گسترش داد. برای‌این کار به جای مختصات دکارتی (x,y,z) مختصات $(-x,-y,-z)$ و به جای زوج مختصاتی قطبی (θ,ϕ) مقدار $(\pi-\theta,\pi+\phi)$ در معادلات (۱۷) و (۱۴) جایگذاری می‌کنیم و برای مختصات قطبی داریم:

$$\zeta=-e^{i\phi}\tan\frac{\theta}{2} \qquad (۱۷)$$

به‌این نوع نگاشت ، نگاشت کنجنگاری[۲۳] می‌گویند. دراینجا نقطه قطب شمال $N=(1,0,0,1)$ نقش بی نهایت صفحه مختلط راایفا می‌کند.

۳.۱ تبدیلات لورنتز فضای مینکوفسکی و رابطه آن با تبدیلات اسپینی

از آن جا که بی نهایت در ریاضیات مفهومی‌حدی و مبهم است، می‌توان از آن با استفاده از روشی که بیان می‌شود اجتناب کرد واز معادلش که مقداری متناهی است در انجام محاسبات استفاده کرد. اگر $(\zeta=\infty)$ را متاظر با نقطه $N=(1,0,0,1)$ در نظر بگیریم، کافیست برای نمایش آن به جای استفاده از یک عدد مختلط از یک زوج دوتایی استفاده کرد که در هیچ نقطه‌ای هر دو مختصات آن برابر صفر نباشند.

$$\zeta=(\xi,\eta)=\frac{\xi}{\eta} \qquad (۱۸)$$

دراین حالت $N=\zeta=(1,0)$ در نظر می‌گیریم. برای‌این کار ابتدا صفحه $\mathbb{C}^2-\{0\}$ را انتخاب کرده، سپس بین نقاط آن رابطه هم‌ارزی زیر را اعمال می‌کنیم:

$$x\cong y \iff \exists\lambda\in\mathbb{C}-\{0\} \text{ such that } x=\lambda y \qquad (۱۹)$$

فضای خارج‌قسمتی حاصل ازاین رابطه هم‌ارزی $(\frac{\mathbb{C}^2-\{0\}}{\cong})$ را فضای تصویری مختلط یک بعدی می‌نامند و با نماد $\mathbb{CP}^1$ نمایش می‌دهیم. بااین روش می‌توان کل صفحه اعداد مختلط را که معادل همان بی‌نهایت کره S^+ است در یک نقطه جمع کرد که آن را با $\zeta=(1,0)$ نمایش می‌دهیم. خواننده علاقه‌مند برای درک بهتر مفهوم صفحه تصویری می‌تواند به [۵] مراجعه کند.

[۲۳] Stereographic projection

حال اگر رابطه (۱۸) را در معادله (۱۵) جایگذاری کنیم با یک محاسبه ساده به روابط

$$x=\frac{\xi\bar{\eta}+\eta\bar{\xi}}{\xi\bar{\xi}+\eta\bar{\eta}}, y=\frac{\xi\bar{\eta}-\eta\bar{\xi}}{i(\xi\bar{\xi}+\eta\bar{\eta})}, z=\frac{\xi\bar{\xi}-\eta\bar{\eta}}{\xi\bar{\xi}+\eta\bar{\eta}} \qquad (۲۰)$$

می‌رسیم. حال اگر پرتو نور $OP=(1,x,y,z)$ روی کره S^+ باشد، با توجه به رابطه هم‌ارزی تعریف شده بالا مقدار λ را می‌توان طوری انتخاب کرد که برابر $\frac{\xi\bar{\xi}+\eta\bar{\eta}}{\sqrt{2}}$ باشد و به جای نقطه P از نقطه هم‌ارز آن $R=\lambda P$ استفاده کرد تا عامل کسری معادله به صورت زیر ساده بشود:

$$T=\frac{\xi\bar{\xi}+\eta\bar{\eta}}{\sqrt{2}}, X=\frac{\xi\bar{\eta}+\eta\bar{\xi}}{\sqrt{2}}, Y=\frac{\xi\bar{\eta}-\eta\bar{\xi}}{\sqrt{2}}, Z=\frac{\xi\bar{\xi}-\eta\bar{\eta}}{\sqrt{2}} \qquad (۲۱)$$

بر خلاف OP ، نقطه R وابسته به پارامتر تغییر مقیاس (ξ,η) است و فقط نسبت به تاثیر عمل تغییر فاز

$$(\xi,\eta)\to(e^{i\phi}\xi,e^{i\phi}\eta) \qquad (۲۲)$$

ثابت می‌ماند. با توجه با آن چه که در بالا گفته شد می‌توان نشان داد اگر نقطه (ξ,η) را با یک تبدیل خطی به $(\tilde{\xi},\tilde{\eta})$ منتقل کنیم متناظر با آن یک تبدیل لورنتز در فضای مینکوفسکی صورت می‌گیرد. تبدیل خطی در فضای اسپینوری را بصورت

$$\xi\to\tilde{\xi}=\alpha\xi+\beta\eta, \eta\to\tilde{\eta}=\gamma\xi+\delta\eta \qquad (۲۳)$$

است که نمایش متناظراین تبدیل خطی در رابطه زیر داده شده است.

$$\begin{pmatrix}\tilde{\xi}\\ \tilde{\eta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} \quad , \quad \alpha\delta-\beta\gamma\neq 0 \qquad (۲۴)$$

ماتریس فوق را A می‌نامیم و به تبدیل فوق یک تبدیل اسپینی می‌گوییم. به راحتی می‌توان بررسی کرد که ترکیب دو تبدیل اسپینی، یک تبدیل اسپینی خواهد بود که ماتریس مربوط به آن از حاصلضرب ماتریسی دو تبدیل دیگر بدست می‌آید. همچنین اگر شرط نرمال بودن دترمینان A را (یعنی $\alpha\delta-\beta\gamma=1$) به مسئله اضافه کنیم، آنگاه این ماتریس دارای یک عنصر وارون بصورت

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\delta & -\beta\\ \gamma & \alpha\end{pmatrix} \qquad (۲۵)$$

می‌شود. در نتیجه ماتریس‌های تبدیلات اسپینی با شرط اضافه نرمال بودن تشکیل یک گروه جبری می‌دهند و با محاسبه نسبتا ساده می‌توان نشان داد که‌این گروه با گروه $SL(2,\mathbb{C})$ یکریخت است. خواننده علاقه مند می‌تواند برای آشنایی بیشتر با نحوه‌این محاسبه به [۶] مراجعه کند. حال می‌توان اثر یک تبدیل اسپینی را بر روی تغییر مختصاتی دکارتی (T,X,Y,Z) متناظر به آن در فضای مینکوفسکی محاسبه کرد. با درنظر گرفتن (۲۱) می‌توان (ξ,η) را برحسب این

مختصات دکارتی حساب کرد و به عبارت

$$\frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{pmatrix}T+Z & X+iY\\ X-iY & T-Z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\xi\bar{\xi} & \xi\bar{\eta}\\ \eta\bar{\xi} & \eta\bar{\eta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{\xi} & \bar{\eta}\end{pmatrix} \qquad (۲۶)$$

رسید. اگر دترمینان ماتریس فوق را بدست آوریم طول لورنتز یک بردار با ضریب $\frac{۱}{۲}$ و با مختصات (T, X, Y, Z) به دست می‌آید. حال اگر تبدیل خطی اسپینی A را در فضای $\mathbb{CP}^۱$ بر روی زوج (ξ, η) اثر داده تا به زوج $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ برسیم، دستگاه مختصات دکارتی (T, X, Y, Z) نیز تغییر یافته و به $(\tilde{T}, \tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z})$ تبدیل می‌شود. برای بدست آوردن رابطه صریح‌این تبدیل کافیست معادلات زیر را

$$(\tilde{\bar{\xi}}\ \tilde{\bar{\eta}}) = (\bar{\xi}\ \bar{\eta})A^*, \begin{pmatrix}\tilde{\xi}\\ \tilde{\eta}\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} \qquad (۲۷)$$

در رابطه (۲۶) جایگذاری کنیم (که دراینجا A^* کهاد مزدوج[۲۴] مختلط ماتریس A است) خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}T+Z & X+iY\\ X-iY & T-Z\end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix}\tilde{T}+\tilde{Z} & \tilde{X}+i\tilde{Y}\\ \tilde{X}-i\tilde{Y} & \tilde{T}-\tilde{Z}\end{pmatrix}\\ &= A\begin{pmatrix}T+Z & X+iY\\ X-iY & T-Z\end{pmatrix}A^*\end{aligned} \qquad (۲۸)$$

ویژگی منحصر بفرد تبدیلات اسپینی‌این است که طول بردارها را ناوردا نگه می‌دارند. چرا که اگر $U = Tt - Xx - Yy - Zz$، یک بردار دلخواه در پایه متعامد یکه (t, x, y, z) باشد آنگاه طول آن برابر است با

$$U = T^۲ - X^۲ - Y^۲ - Z^۲$$

حال اگر تبدیل اسپینی (۲۸ را اعمال کنیم، اندازه بردار جدید در دستگاه مختصاتی جدید برابر می‌شود با

$$\begin{aligned}||\tilde{U}|| &= \det(A\begin{vmatrix}T+Z & X+iY\\ X-iY & T-Z\end{vmatrix}A^*)\\ &= \det(A)\det(A^*)(T^۲ - X^۲ - Y^۲ - Z^۲)\\ &= ||U||\end{aligned} \qquad (۲۹)$$

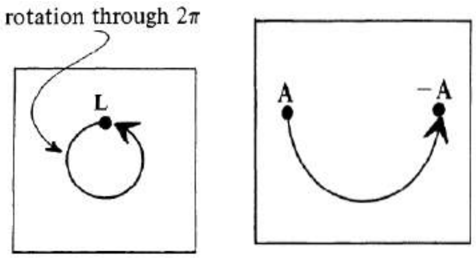
اما از آن‌جا که $\det A^* = \frac{۱}{\det A}$ همیشه برای ماتریس‌های وارون‌پذیر درست است پس طول بردارها تحت این تبدیلات اسپینی ثابت می‌ماند.

اثبات نتایج زیر از حوصله‌این بحث خارج است اما خواننده علاقه‌مند می‌تواند برای درک بهتر مسئله به منبع اصلی مراجعه کند.

نتیجه ۱. *متناظر با هر تبدیل اسپینی یک و فقط یک تبدیل لورنتز محدود شده وجود دارد و برای هر تبدیل لورنتز محدود شده دقیقا دو تبدیل اسپینی وجود دارد که یکی منفی دیگری است.*

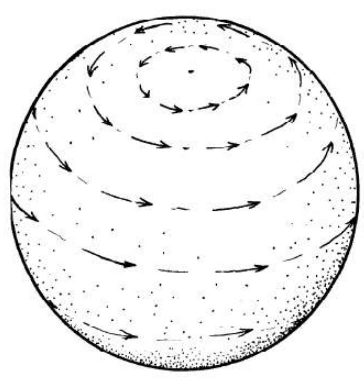
[۲۴] conjugate transpose

نتیجه ۲. *هر تبدیل اسپینی یکه ($\det A = ۱$) مربوط به یک دوران ویژه*[۲۵] *یکتا در S^+ است. برعکس هر دوران ویژه از S^+ متناظر با دقیقا دو تبدیل اسپینی یکه است که یکی از آن ها منفی دیگری است.*



می‌توان نشان داد که فضای $\mathbb{CP}^۱$ با کره $S^۲$یکریخت است. پس می‌توان آن را به عنوان یک منیفلد در نظر گرفت که در قسمت پایانی این بخش به ویژگی‌های خاصی از آن می‌پردازیم.

همان گونه که قبلا گفته شد تبدیلات خطی-کسری [۲۶] که بر روی فضای $\mathbb{CP}^۱$ اثر می‌کنند را می‌توان در حالت کلی بصورت $\frac{\alpha z+\beta}{\theta z+\delta}$ در نظر گرفت که $z \in \mathbb{C}$. اگر شرط $\alpha\delta - \beta\theta = ۱$ را اضافه کنیم‌ایزومتری‌های‌این فضا بدست می‌آید. اگر نقطه ثابت‌این تبیدلات اسپینی را بدست آوریم به یک معادله با دو ریشه می‌رسیم که از لحاظ هندسی همان نقاط پادقطبی هستند واین تبدیلات از لحاظ هندسی دوران کروی نسبت به محور بین این دو نقطه است.



به هر چهار نقطه مانند $\{\zeta_۱, \zeta_۲, \zeta_۳, \zeta_۴\}$ می‌توان کمیت χ نسبت داد که تحت به تبدیلات اسپینی ناوردا است و از رابطه

$$\chi = \{\zeta_۱, \zeta_۲, \zeta_۳, \zeta_۴\} = \frac{(\zeta_۱ - \zeta_۲)(\zeta_۳ - \zeta_۴)}{(\zeta_۱ - \zeta_۴)(\zeta_۳ - \zeta_۲)} \qquad (۳۰)$$

به دست می‌آید. اگر مقدار χ عددی حقیقی باشد آن‌گاه هر چهار نقطه بر روی یک دایره قرار گرفته اند. پس با دانستن مقدار سه نقطه

[۲۵] proper rotation
[۲۶] linear fractional

و χ که می‌توان آن را با توجیهات فیزیکی بدست آورد همیشه مقدار چهارم را بطور دقیق مشخص کرد. همچنین به‌این فضا می‌توان یک متریک به صورت

$$\mathrm{d}s^{۲} = \frac{۴\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\bar{\xi}}{(\xi\bar{\xi}+۱)^{۲}} \tag{۳۱}$$

حال اگراین متریک را برحسب مختصات دکارتی بنویسیم، با یک محاسبه نسبتا طولانی می‌توان نشان داد که انحنای اسکالراین فضا ثابت و برابر منفی یک است. با استفاده از قضیه گاوس بونت[۲۷] می‌توان نشان داد که مجموع زوایای مثلث در چنین فضایی کمتر از π است. خواننده علاقه‌مند برای آشنایی بیشتر با ویژگی‌های این فضا می‌تواند به منبع (۷) مراجعه کند.

۴.۱ دیدگاه هندسی بردارهای فضایی و رابطه آن ها با فضای اسپین

فرض کنیم مختصات اسپینی $\zeta = (\xi,\eta)$ داده شده باشد. با توجه به رابطه (۲۲) می‌توان دستگاه مختصاتی دکارتی متناظرش را بدست آورد. آما از انجا که مختصات اسپینی تحت تبدیل فاز (۲۲) ناوردا هستند با اثر دادن آن ها کره نورگونه S^+ بدون تغییر باقی می‌ماند. هدف ما این است که ساختار جدیدی را به مفهوم اسپینی اضافه کنیم که برای هر جفت (ξ,η) یک دستگاه مختصات منحصر بفرد در فضای مینکوفسکی وجود داشته باشد. این ساختار جدید باید به گونه‌ای باشد که ماهیتش با تغییر مختصات اسپینی در فضای $\mathbb{CP}^۱$ که متناظرش یک تبدیل passive Lorentz transformation است (که منجر به تغییر دستگاه مختصاتی در فضای مینکوفسکی می‌شود) تغییری نکند. درست مانند همان تعریفی که از یک شی برداری یا تانسوری در هندسه معمولی داریم .

برای این کار ابتدا فضای τ^+ را در نظر می‌گیریم که همان فضای مسیرهای نورگونه در جهت افزایش بردار زمانی فضا است. از طرف دیگر با توجه به آنچه که در بخش‌های قبلی گفته شد $\zeta = \frac{xi}{\eta}$ و با توجه به رابطه هم‌ارزی که در فضای تصویر بین نقاط وجود دارد کلاس $[\xi,\eta]$ یک نقطه منحصر بفرد را در فضای مینکوفسکی مشخص نمی‌کند بلکه شامل تمام نقاطی است که از خط واصل بین مبدأ و ζ عبور می‌کند.

برای آن‌که (ξ,η) یک نقطه منحصر بفرد را مشخص کند، یک فضای برداری حقیقی مقدار L در نقطه داده شده P در امتداد بردارهای نورگونه به ساختار (ξ,η) اضافه می‌کنیم. حال سعی می‌کنیم ساختار مختلط القا شده فضای مماسی L را به فضای مماس حقیقی تبدیل کنیم.این فضا توسط دو بردار مستقل

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\mathrm{d}y, \mathrm{d}\bar{z} = \mathrm{d}x - i\mathrm{d}y \tag{۳۲}$$

تولید می‌شود. می‌توان با استفاده از مفهوم متریک فضای اقلیدسی، بر روی‌این فضای مماسی مختلط متریکی تعریف کرد که فضای بردارها و هم بردار در روابط کانونی

$$\langle \mathrm{d}z, \frac{\partial}{\partial z}\rangle = ۱, \langle \mathrm{d}\bar{z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\rangle = ۱ \tag{۳۳}$$

صدق کند. اگر بگیریم $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{۱}{۲}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})$ داریم:

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{d}z, \frac{\partial}{\partial z}\rangle &= \langle \mathrm{d}x + i\mathrm{d}y, \frac{۱}{۲}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})\rangle \\ &= \frac{۱}{۲}(\langle \mathrm{d}x, \frac{\partial}{\partial x}\rangle + \langle \mathrm{d}y, \frac{\partial}{\partial y}\rangle \\ &= ۱\end{aligned} \tag{۳۴}$$

به همین صورت برای $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{۱}{۲}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}) \tag{۳۵}$$

پس فضای L را می‌توان در حالت کلی به صورت ترکیب خطی ازاین دو هم بردار

$$L = \lambda\frac{\partial}{\partial\zeta} + \bar{\lambda}\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}} \tag{۳۶}$$

در نظر گرفت. مقدار λ باید بگونه‌ای تغییر کند که اولا ساختار بالا حقیقی مقدار باشد همچنین هنگامی‌که با یک تبدیل اسپینی خطی از (ξ,η) به $(\tilde{\xi},\tilde{\eta})$ برویم ساختار برداری بالا تغییری نکند یعنی

$$\tilde{\lambda}\frac{\partial}{\partial\tilde{\zeta}} + \bar{\tilde{\lambda}}\frac{\partial}{\partial\bar{\tilde{\zeta}}} = \lambda\frac{\partial}{\partial\zeta} + \bar{\lambda}\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}} \tag{۳۷}$$

همچنین با توجه به معادلات اسپینی

$$\tilde{\xi} = \alpha\xi + \beta\eta, \tilde{\eta} = \gamma\xi + \delta\eta, \tilde{\zeta} = \frac{\alpha\zeta+\beta\eta}{\gamma\zeta+\delta\eta} \tag{۳۸}$$

و جایگذاری ان در (۳۷) داریم:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\zeta} &= (\frac{\alpha(\gamma\zeta+\delta) - \gamma(\alpha\zeta+\beta)}{(\gamma\zeta+\delta)^{۲}})\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}} \\ &= (\gamma\zeta+\delta)^{-۲}\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}} \\ &= \eta^{۲}\tilde{\eta}^{-۲}\frac{\partial}{\partial\tilde{\zeta}}\end{aligned} \tag{۳۹}$$

و چون تبدیل اسپینی فوق یکه[۲۸] است پس در رابطه $\alpha\delta - \beta\gamma = ۱$ صدق می‌کند. با جایگذاری‌این معادله در (۳۹) نتیجه مهم زیر به دست می‌آید:

$$\tilde{\lambda}\tilde{\eta}^{۲} = \lambda\eta^{۲} \tag{۴۰}$$

[۲۷] Gauss-Bonnet

[۲۸] unitary

برای راحتی کار $\lambda = (\frac{-1}{\sqrt{2}})\eta^{-2}$ انتخاب می‌کنیم. درنتیجه ساختار برداری L بفرم نهایی

$$L=\frac{-1}{\sqrt{2}}\left(\eta^{-2}\frac{\partial}{\partial\zeta}+\bar{\eta}^{-2}\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\right) \tag{۴۱}$$

نوشته می‌شود. به‌این ترتیب اگر L در نقطه دلخواه P به عنوان یک عملگر داده شده باشد، با دانستن مختصاتش در فضای مینکوفسکی و با استفاده از (۲۶) می‌توان نقطه متناظرش در فضای $\mathbb{CP}^1$ یعنی ζ را با اختلاف یک علامت بدست آورد چرا که‌این فضا یک پوشش دو لایه برای فضای مینکوفسکی است. اما از آن جا که ضرایب L معلوم هستند می‌توان $(\xi\eta\&\zeta^2)$ را نیز به دست آورد و در نتیجه (ξ,η) با اختلاف یک علامت تعیین می‌گردد.

برای تعریف چنین ساختاری می‌توان یک روش هندسی و معادل بااین تعریف را بدست آورد. دوباره فرض کنیم P نقطه‌ای دلخواه در فضای τ^+ باشد و $\zeta=(\xi,\eta)$ نقطه متناظر آن در فضای اسپینی باشد و فرض کنیم نقطه P' دراین فضا بر روی یک خم هموار به سمت P میل کند. همچنین متناظر با P' عبارت $(\tilde{\xi},\tilde{\eta})$ در فضای $\mathbb{CP}^1$ است. وقتی P' به اندازه کافی به P نزدیک شد می‌توان مختصاتش را بر حسب P' بیان کرد. حال تبدیل زیر را به عنوان تبدیل مختصاتی در فضای اسپینی تعریف می‌کنیم:

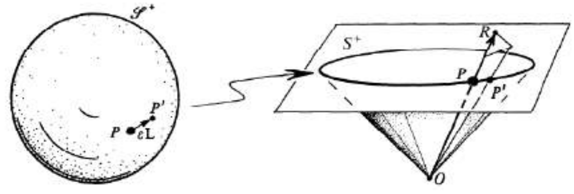
$$\zeta'=\zeta-\frac{\epsilon}{\sqrt{2}\eta^2} \tag{۴۲}$$

که دراینجا ϵ مقدار مثبت بسیار کوچکی است که از مربع آن می‌توان چشم پوشی کرد. حال اگر بردار واصل بین این دو نقطه را تعریف کنیم:

$$L=\lim_{\epsilon\to 0}\vec{PP'} \tag{۴۳}$$

برای هر f دلخواه که $f\in C^\infty(\mathbb{CP}^1,C)$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}&\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\{f_{p'}-f_p\}\\&=\lim_{\epsilon\to 0}\left\{f\left(\zeta-\frac{\epsilon}{\sqrt{2}\eta^2},\bar{\zeta}-\frac{\epsilon}{\sqrt{2}\bar{\eta}^2}\right)-f(\zeta,\bar{\zeta})\right\}\\&=\frac{-1}{\sqrt{2}}\left(\eta^{-2}\frac{\partial}{\partial\zeta}+\bar{\eta}^{-2}\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\right)f\\&:=Lf\end{aligned} \tag{۴۴}$$



همان گونه که مشاهده می‌شود با انتخاب هر کدام از تعاریف عملگری و ناوردا بودن ساختاری به یک عبارت برای بیان فضای برداری می‌رسیم و می‌توانیم توسط عبارت

$$L=\frac{-1}{\sqrt{2}}\left(\eta^{-2}\frac{\partial}{\partial\zeta}+\bar{\eta}^{-2}\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\right)=L^\alpha\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \tag{۴۵}$$

این مفهوم برداری را با نمایش ساختار طبیعی یک بردار مماس در فضای مینکوفسکی که برحسب مؤلفه‌های مختصاتی $\{x^\alpha\}$ بیان می‌شود مربوط ساخت. با توجه به رابطه (۱۵)

$$t=1, x=\frac{\zeta+\bar{\zeta}}{1+\bar{\zeta}\zeta}, y=\frac{\zeta-\bar{\zeta}}{i(1+\bar{\zeta}\zeta)}, z=\frac{\bar{\zeta}\zeta-1}{1+\bar{\zeta}\zeta} \tag{۴۶}$$

مؤلفه‌های L^α را بر حسب ζ و $\bar{\zeta}$ نوشت که دراین صورت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\frac{\partial t}{\partial\zeta}&=0\\\frac{\partial x}{\partial\zeta}&=\frac{1-\bar{\zeta}^2}{(1+\zeta\bar{\zeta})^2}\\\frac{\partial y}{\partial\zeta}&=\frac{1+\bar{\zeta}^2}{i(1+\zeta\bar{\zeta})}\\\frac{\partial z}{\partial\zeta}&=\frac{2\bar{\zeta}}{(1+\zeta\bar{\zeta})^2}\end{aligned} \tag{۴۷}$$

با جایگذاری $\zeta=\frac{\xi}{\eta}$ در (۴۵) مؤلفه‌های L^α را می‌توان بر حسب مختصات فضایی عبارت زیر نوشت

$$\begin{aligned}L^0&=0\\L^1&=\frac{\xi^2+\bar{\xi}^2-\eta^2-\bar{\eta}^2}{\sqrt{2}(\xi\bar{\xi}+\eta\bar{\eta})^2}\\L^2&=\frac{\xi^2-\bar{\xi}^2+\eta^2-\bar{\eta}^2}{\sqrt{2}i(\xi\bar{\xi}+\eta\bar{\eta})}\\L^3&=\frac{-\sqrt{2}(\xi\eta+\bar{\xi}\xi)}{(\xi\bar{\xi}+\eta\bar{\eta})^2}\end{aligned} \tag{۴۸}$$

و همچنین می‌توان به‌این بردار فضایی نرم فضای مینکوفسکی بر اساس مؤلفه‌های L^α نسبت داد. با محاسبه‌ای ساده ولی نسبتا طولانی می‌توام نشان داد

$$||L||=L^aL^b\eta_{ab}=L^aL_a=\frac{-2}{(\xi\bar{\xi}+\eta\bar{\eta})^2} \tag{۴۹}$$

۵.۱ مفهوم بردار اسپینی

در قسمت قبل دیدیم که چگونه با اضافه کردن یک مفهوم انتزاعی به عنوان یک ساختار برداری بر روی فضای مینکوفسکی (که ازاین پس با نام پرچم[۲۹] از آن یاد می‌کنیم) می‌توان یک تناظر یک به یک بین فضای اسپینی و فضای مختصاتی برقرار کنیم. دراین بخش می‌خواهیم ازاین مفهوم استفاده کرده و برای فضای $\mathbb{CP}^1$ یک ساختار برداری تعریف کنیم. همچنین با استفاده از شهود هندسی بدست آمده مفهوم اسرار آمیز اسپین $\frac{1}{2}$ را توضیح می‌دهیم. دراین بخش به

[۲۹] flag

راستای نورگونه‌ای که فضای مماس تعریف شده در قسمت قبل را ستون پرچمی[۳۰] و فضای محدود شده توسط ژئودزیک‌های نورگونه در لحظه t ثابت صفحه ستونی[۳۱] می‌گوییم. ابتدا انتقال

$$(\xi,\eta)\to(\lambda\xi,\lambda\eta) \tag{50}$$

را در فضای $\mathbb{CP}^1$ در نظر می‌گیریم که λ یک عدد مختلط مخالف صفر است. اثراین انتقال جهت ستون پرچمی‌را تغییر نمی‌دهد اما ممکن است راستای ستون پرچمی‌تغییر داده یا امتداد صفحه ستونی را گسترش دهد و یا ترکیبی ازاین دو باشد که در شکل زیر نمایش داده شده است و کاملا به مقدار λ بستگی دارد.

λ را می‌توان بر حسب مختصات قطبی به صورت

$$\lambda=re^{i\theta};r,\theta\in\mathbb{R},r>0$$

نمایش داد و تاثیر هرکدام از متغیرهای آن را به صورت مجزا بررسی کرد.

۱) اگر $\theta=0$ باشد آن‌گاه λ به عددی حقیقی و مثبت تبدیل می‌شود که عمل آن بر روی زوج (ξ,η) صفحه ستونی را تغییر نمی‌دهد اما طول ستون پرچمی‌را به اندازه r^2 افزایش می‌دهد.

۲) اگر $r=1$ در نظر بگیریم λ به عددی موهومی‌محض با طول واحد و فاز θ تبدیل می‌شود و اثر آن بر جفت (ξ,η) در ستون پرچمی تغییری‌ایجاد نمی‌کند اما باعث می‌شود صفحه ستونی که‌این بردار قرار گرفته به اندازه 2θ در جهت حرکت خلاف عقربه‌های ساعت دوران کند. برای بیان‌این مسئله ابتدا نقطه P را ثابت در نظر گرفته و نقطه Q را که به صورت یک تغییر فاز به اندازه $\theta\delta$ (تغییر بسیار کوچک در زاویه) در جهت مثبت مثلثاتی و بسیار نزدیک به P در نظر می‌گیریم. حال اگر توصیف هندسی که برای یک بردار در بخش قبل در فضای اسپینی ارائه شد در نظر بگیریم

$$\zeta'=\zeta-\frac{\epsilon}{\sqrt{2}\eta^2} \tag{51}$$

و $\eta\to\lambda\eta$ تبدیل کنیم به رابطه‌ی جالب

$$\eta^{-2}\to r^{-2}e^{-2i\theta}\eta^{-2} \tag{52}$$

می‌رسیم. به وضوح راستای ستون پرچمی‌متناظر بااین تغییر اسپینی در فضای مینکوفسکی به اندازه 2θدوران یافته است. حال اگر تغییر پیوسته حاصل ازاین انتقال را به صورت

$$(\xi,\eta)\to(e^{i\theta}\xi,e^{i\theta}\eta) \tag{53}$$

انجام دهیم و مقدار θ را در طول بازه‌ی $0<\theta<\pi$ تغییر دهیم، ستون پرچمی‌به اندازه 2π دوران می‌کند و در محل اولیه اش قرار می‌گیرد اما در فضای اسپینی (ξ,η) به $(-\xi,-\eta)$ تبدیل می‌شود و دوران به اندازه π لازم است تا به محل اولیه اش بازگردد. امااین تبدیل باعث می‌شود که ستون پرچمی‌به اندازه 4π در فضای مینکوفسکی دوران کند.

به چنین اشیائی در ریاضیات دوپوش[۳۲] می‌گویند. برای درک شهودی بهتراین مسئله دو سکه بردارید. یکی را روی محیط دیگری بچرخانید. هنگامی‌که مسیر به اندازه π چرخیده شد سکه چرخنده یک دور کامل حول مرکزش می‌چرخد اما نقطه‌ای که روی آن قرار می‌گیرد با نقطه شروع حرکت یکسان نیست و در واقع نقطه پادقطبی است. و اگر دوبار مسیر حرکت را ادامه دهیم و به نقطه اولیه بازگردیم

[۳۰] flag pole

[۳۱] flag plane

[۳۲] two fold

مراجع

[1] Relativistic physics in Clifford Algebra $cl(1,3)$, Niels Gresnigt

[2] Clifford Algebra and Spinors, Cambridge press

[3] Spin geometry, Michelson and Morely

[4] Space time and singularity, Cambridge mathematics society

[5] Algebraic curves, Griffiths

[6] Spinors and Twistors, Cambridge mathematics society

[7] Hyperbolic geometry, puplished by Springer

[8] Characteristic classes, Milnor

مقدمه‌ای بر مدل‌های علوم اعصاب (۱)

روزبه فرهودی

شکل ۱: مقطعی از بافت مغز که با روش گلگی رنگ آمیز شده است.

از دیرباز نحوه کارکرد ذهن سوالی چالش برانگیز بوده است. شکل ظاهری مغز توده‌ای کم و بیش سفید رنگ و یکنواخت است که نشانی از ساختار اعجاب‌آورش نمی‌دهد. به همین دلیل تا مدت‌ها وظیفه اصلی آن در بدن مشخص نبود. رنه دکارت، فیلسوف و دانشمند شهیر، مغز را ماشینی از اندام‌های کوچک تصور می‌کرد که به کمک مایع درون مغزی و قوانین هیدرولیکی مسبب حرکت های دست و پا و بدن است و در نتیجه نقشی در هوش و احساس ندارد. در سال ۱۸۷۳ گُلگی[۱] که از پیشگامان علوم اعصاب است، با قرار دادن مقطعی از مغز در ترکیبی از جیوه به روشی دست یافت که بتوان بعضی از اجزای آن را در زیر میکروسکوپ مشاهده کرد. جالب است بدانید که به علت پیچیدگی شکل ظاهری سلول‌های مغز تا مدت ها بین او و کاخال[۲] بحث‌های جدی بر سر این که آیا مغز ساختاری یک‌پارچه است[۳] و یا از اجزای سلولی تشکیل شده است، در گرفت. تا جایی که به علت تفوق نیافتن هیچ یک از این دو نظریه بر دیگری، در سال ۱۹۰۶ مشترکاً به هر دوی آن‌ها نوبل دادند. هرچند یافته‌های بعدی نظریه سلولی را مورد تایید قرار داد.

از آن تاریخ به بعد فن‌آوری‌های مختلفی برای بررسی ساختار مغز ابداع شد. به عنوان مثال با ای.ای.جی[۴] می‌توان تغییر پتانسیل سطح مغز و مشابه آن با ام.ای.جی[۵] تغییرات میدان مغناطیسی را اندازه گرفت، به وسیله ام.آر.آی[۶] می‌توان بدون هیچ گونه آسیبی به مغز تصویری نسبتاً دقیق از ساختار درونی آن بدست آورد و با اف.ام.آر.آی[۷] می‌توان به طور پیوسته و در طول زمان فعالیت‌های مغزی را ثبت نمود. علاوه بر این میکروسکوپ‌های قوی الکترونی و دو فوتونی[۸] می‌توانند با جزییاتی در حد نانومتر بافت جدا شده‌ای از مغز را نشان دهند. در کنار این‌ها با وارد کردن یک الکترود در سلول می‌توان دنباله فعالیت‌های آن را ثبت کرد. این ابزارها و مشابه‌های روزآمد آن‌ها انبوهی از داده فراهم آورده و دریچه جدیدی را بر محققان باز کرده است که با آن به سؤالات فلسفی قدیمی نگاه دوباره بیاندازند. شاید تشبیه وضعیت کنونی علم نروساینس با زمانی که تیکو براهه[۹] اندازه‌گیری‌های دقیقی از اجرام آسمانی نمود که به پیدایش مکانیک نیوتنی منجر شد، بیراه نباشد.

برای درک این داده‌ها باید به تفسیرهای کوتاه و دقیق برسیم. بسیاری از فعالیت‌های ذهنی مانند دیدن، یادگرفتن، به خاطر سپردن، لذت بردن، درد کشیدن، مساله ریاضی حل کردن و .... برای ما روشن است ولی هنگامی که داده‌های مغزی نظیر آن‌ها را ثبت می‌کنیم متوجه می‌شویم تا چه اندازه شرح اتفاقات مغزی آن مشکل است. اینجاست که برای دست یافتن به قوانین بنیادی این حوزه مدل‌سازی ریاضی مغز اهمیت پیدا می‌کند. در این سلسله نوشتارها قصد داریم مقدماتی از علوم اعصاب و مدل‌های معروف آن را بیان کنیم.

۱ مدل تک نرون

مغز از دو رده مهم سلولی تشکیل شده است: نرون‌ها[۱۰] که اطلاعات را پردازش می‌کنند و سلول‌های گیلیا[۱۱] که نقش حمایت کننده نرون‌ها را دارند و مستقیماً دخالتی در پردازش اطلاعات ندارند. در مغز انسان به طور تقریبی ۱۰۰ میلیارد سلول نرونی و حدود ۱۰ برابر آن سلول گیلیا وجود دارد[۱]. نرون‌ها از نظر آناتومی و تغییرات الکتریکی تنوع زیادی دارند با این حال یک نرون به طور معمول

[۱] Camillo Golgi
[۲] Santiago Ramón y Cajal
[۳] Reticular Theory
[۴] EEG
[۵] MEG
[۶] MRI
[۷] fMRI
[۸] Two Photon Macroscopy
[۹] Tycho Brahe
[۱۰] neuronal cells
[۱۱] glia cells

یک **هسته** دارد که پروتئین‌های لازم برای سلول را تولید می‌کند و از آن تعدادی شاخه باریک منشعب می‌شود که به **دندریت**[۱۲] معروف هستند و با شاخه شاخه شدن، شکلی شبیه درخت درست می‌کنند. علاوه بر این از هسته شاخه دیگری به نام **آکسون**[۱۳] منشعب می‌شود که ضخیم‌تر از شاخه‌های دندریت است. دندریت مسؤل دریافت پیام‌های از نرون‌های دیگر است و آکسون پیام آن نرون را به نرون‌های دیگر انتقال می‌دهد. طبیعت پیام‌های عصبی الکتریکی است.

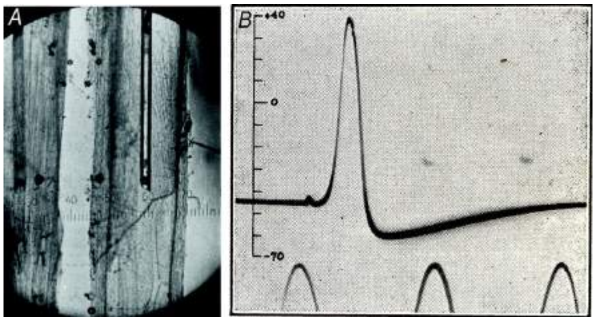
تفاوتی اساسی بین کارکرد دندریت و آکسون وجود دارد. دندریت‌ها معمولاً خطی هستند و پیام‌های ورودی را با هم جمع می‌کنند. در حالی که آکسون انتقال دهنده‌های غیر خطی دارد و مواد شمیایی در طول آن به شکل موجی منتشر می‌شوند. به همین جهت پیام‌های یک نرون به شکل گسسته به نرون‌های دیگر انتقال می‌یابد. به هر واحد این پیام‌های گسسته اسپایک[۱۴] می‌گویند. با یک الکترود حساس می‌توان دنباله اسپایک‌ها را در طول زمان ثبت کرد. ما در اینجا قصد داریم اتفاقاتی که باعث به وجود آمدن یک اسپایک می‌شود را مدل کنیم.

تاریخچه این کشف از داستان‌های آموزنده علم است. در سال ۱۹۳۹ دو دانشمند انگلیسی به نام‌های هاجکین[۱۵] و هاکسلی[۱۶] به این مسأله علاقه‌مند شدند اما اندکی بعد و با شروع جنگ جهانی دوم وقفه‌ای در کارشان افتاد. در سال ۱۹۴۶ دوباره به این مسأله بازگشتند و تا سال ۱۹۵۲ به توصیف کاملی از آن رسیدند و نهایتاً بخاطر دستاوردشان نوبل پزشکی را در سال ۱۹۶۳ دریافت کردند.

برای این کار آن‌ها ابتدا نیاز به نرونی داشتند که از مابقی نرون‌ها جدا باشد و به اندازه‌ای بزرگ باشد که بتوان با ابزارهای آن زمان تغییرات پتانسیل آن را ثبت کنند. یکی از نرون‌های ماهی مرکب[۱۷] برای این کار مناسب بود. سپس باید راهی می‌یافتند که غلیظت مواد شمیای مختلف را در اطراف سلول به دلخواه خود تعیین کنند. روش ابداعی آن‌ها استفاده از لوله مویینی بود که با مکش قسمتی از سلول به درون خود، غلظت مواد را در اطراف آن ناحیه ثابت نگه می‌داشت.[۱۸] سرانجام با تکرار آزمایش در حالتهای مختلف به نمودارهای زیادی رسیدند و تلاش کردند آن‌ها را تفسیر کنند. قبل از آن نیاز به مقدماتی درباره نحوه تغییر پتانسیل سطح سلول داریم.

روی سطح هر سلول نرونی تعداد بسیار زیادی (از مرتبه چند میلیارد!) کانال‌های بسیار کوچک (از مرتبه چند نانومتر!) قرار دارد که باعث

[۱۲] dendrite
[۱۳] axon
[۱۴] spike
[۱۵] Alan Hodgkin
[۱۶] Andrew Huxley
[۱۷] Squid
[۱۸] Patch clamp technic



شکل ۲: سمت راست: عکسی از تغییرات پتانسیل یک سلول نرونی ماهی مرکب که توسط هاجکین و هاکسلی گرفته شده، سمت چپ: الکترودی که با آن تغییرات پتانسیل را ثبت کرده‌اند

نقل و انتقال یون‌های باردار به سلول می‌شود. در نرونی که هاجکین و هاکسلی کار می‌کردند دو نوع کانال سدیمی و پتاسیمی وجود داشت که تنها اجازه عبور آن‌ها را از یک طرف سلول به طرف دیگر می‌داد.[۱۹] بنابراین دو جریان الکتریکی $I_{Na}(t)$ و $I_K(t)$ بین درون سلول و خارج سلول ایجاد می‌شود. هر یون در یک محیط پتانسیل الکتریکی ایجاد می‌کند که تابعی از غلظت آن در محیط و بار الکتریکی آن یون است و از معادله نرنست[۲۰] حساب می‌شود. علت اسپایک زدن نرون، متفاوت بودن پتانسیل‌های الکتریکی سدیم و پتاسیم است به نحوی که کاهش یکی باعث افزایش دیگری می‌شود و سلول را از حالت پایدار خارج می‌کند. هاجکین و هاکسلی می‌خواستند معادلاتی برای این تحولات بنویسند.

فرض کنید جریان ورودی سلول را با $I(t)$ نمایش دهیم. تاکنون می‌دانیم $I(t)$ جمعی از $I_{Na}(t)$ و $I_K(t)$ است. اما علاوه بر آن‌ها، دو جریان دیگر هم وجود دارد. یکی جریانی است که از کانال‌های نشتی ایجاد می‌شود، (کانال‌هایی که به یون خاصی حساس نیستند) و دیگری جریانی است که از غشای خازن مانند سلول به درونش القا می‌شود ($I_{cap}(t)$). بنابراین می‌توان نوشت:

$$I(t) = I_{cap}(t) + I_{Na^+}(t) + I_{K^+}(t) + I_{leak}(t)$$

اگر $V(t)$ اختلاف پتانسیل دو طرف سلول و C ظرفیت خازنی غشای سلول باشد، با رابطه $I_{cap}(t) = CdV/dt$ بدست می‌آوریم:

$$CdV/dt = I(t) - I_{Na^+}(t) - I_{K^+}(t) - I_{leak}(t)$$

از رابطه اُهم داریم: $I_x(t) = g_x(t)(V(t) - V_x)$ که g_x رسانایی سلول برای کانال x و V_x پتانسیل استراحت آن است. هاجکین و هاکسلی می‌دانستند که رسانایی این کانال‌ها احتمالاً تابعی از ولتاژ هستند و با

[۱۹] البته بعدها با بررسی نرون‌های دیگر و به طور خاص نرون‌های مغز انسان، کانال‌های دیگری از جمله کانال کلسیمی هم به این مجموعه اضافه شد.
[۲۰] Nernest equation

بررسی نمودارهای مختلف ولتاژ (نمودار بالا) به دنبال بهترین تابع برای g_x گشتند و سرانجام به توابع غیر خطی زیر رسیدند:

$$g_{Na} = \overline{g}_{Na} m^3 h \qquad g_K = \overline{g}_K n^4 \qquad g_{leak} = \overline{g}_{leak}$$

که $\overline{g}_{leak}$، $\overline{g}_{Na}$ و $\overline{g}_K$ ثابت‌اند و سه تابع n، h و m در معادلات نمایی زیر صدق می‌کنند:

$$\frac{dX}{dt} = \frac{\alpha_X(V) - X}{\tau_X(V)} \qquad X = m, n, h$$

که α و β توابعی پله‌ای هستند.

با دانش امروز می‌دانیم هر کدام از توابع n، h و m معادل عملکرد قسمتی از کانال‌های یونی هستند. مثلاً کانال سدیمی از چهار قسمت مستقل تشکیل شده است که سه تا از آن‌ها ساختار یکسان دارند که اگر به معادله آن نگاه کنید توان یکی از توابع سه و دیگری یک است. سیستم دینامیکی بالا به قدری پیچیده بود که شبیه‌سازی کامپیوتری آن با دستگاه‌های آن زمان حدود ۶ ماه طول می‌کشید. اما این دو موفق به یافتن روشی برای شبیه‌سازی سریع آن شدند[۳].

معادله هاجکین و هاکسلی معادله‌ای پایه‌ای در علوم اعصاب است که نحوه فعالیت واحدهای مغزی را می‌گوید ولی اطلاعاتی از عمکرد گروهی آن‌ها نمی‌دهد.

۲ مدل حافظه‌ی هاپفیلد

یکی از سوالاتی که احتمالاً بارها به آن فکر کرده‌اید، چگونگی ذخیره اطلاعات در ذهن است. مثلاً وقتی شروع به حفظ کردن یک شعر می‌کنیم چه تغییراتی در ذهن ما در حال رخ دادن است؟ تکرار یک موضوع به حفظ آن کمک می‌کند. اما گاهی موضوعی را تنها یک بار شنیده‌ایم ولی به روشنی آن را به یاد داریم. این امر چگونه ممکن است؟

با الهام از فن‌آوری‌های روز می‌توانیم تصور کنیم که ذهن ما مشابه یک دستگاه ضبط صدا یا دوربین عکاسی اطلاعات را ذخیره می‌کند. یعنی مکان مشخصی در مغز وجود دارد که اطلاعات به طور ایستا در آن پیاده می‌شوند و به طور مثال هر داده باعث فعل و انفعالاتی در یک سلول نرونی می‌شود که حالت آن را عوض می‌کند به این شکل بیت به بیت اطلاعات نگه‌داری می‌شوند. اما تا حدودی برعکس حافظه‌های کامپیوتری، این نگاه در عمل چالش‌های جدی دارد. اولاً دانش روز عصب شناسی یک جای مشخص از مغز را برای حافظه پیشنهاد نمی‌دهد. البته قسمت‌هایی از مغز مانند هیپوکمپس[۲۱] احتمالاً نقش مهمی در حافظه دارند، ولی به نظر می‌آید که حافظه در تمام سطح مغز پخش است و به نوعی با پردازش اطلاعات در هم تنیده است. در ثانی سازوکارهای زیستی با احتمالات و تصادف عجین هستند و درنتیجه تصور این که یک نرون اطلاعات مشخصی را برای مدت طولانی و بدون تغییر نگه دارد دور از واقعیت است.

فرضیه مورد قبول درباره حافظه، فعالیت شبکه‌ای نرون‌ها است. یعنی با تغییر در نحوه اتصال تعدادی از نرون‌ها اطلاعاتی ذخیره می‌شود. هاپفیلد محققی بود که در سال ۱۹۸۲ مدلی برای این کار پیشنهاد داد که در اینجا آن را شرح می‌دهیم[۲].

فرض کنید N نرون داریم و وضعیت هر نرون به نحوی است که در هر لحظه فعال (که با ۱ نشان می‌دهیم) یا خاموش (که با ۰ نشان می‌دهیم) است. هر دو نرون می‌توانند با وزنی (که عددی حقیقی است) به یکدیگر وصل باشند. مقدار این وزن قدرت اتصال آنها را نشان می‌دهد. بنابراین ماتریس $\{T_{i,j}\}_{i,j=1}^{N}$ از اتصال نرون‌ها خواهیم داشت. همچنین هر نرون آستانه‌ی تحملی برای فعال شدن دارد که آن را با یک عدد حقیقی ثابت مانند U_i (برای نرون i) نمایش می‌دهیم. برای راحتی کار فرض کنید زمان گسسته است. دینامیک و یا تحول این نرون‌ها در زمان $t+1$ تنها به لحظه قبل آن یعنی t بستگی دارد. اگر وضعیت نرون i در زمان t با $V_i(t)$ نشان دهیم (که صفر یا یک است)، در لحظه $t+1$ یکی از نرون‌ها مانند نرونi-ام را به طور دلخواه و با احتمال مساوی از بین تمام نرون ها انتخاب می‌کنیم و مقدار

$$\sum_{i\neq j} T_{i,j} V_j(t)$$

را حساب می‌کنیم. اگر حاصل بیش از آستانه‌ی نرونi-ام، یعنی U_i شد، $V_i(t+1)$ را برابر یک و در غیر این صورت برابر صفر قرار می‌دهد. وضعیت بقیه نرون‌ها را در طی این عملیات ثابت نگه می‌داریم. با این دینامیک اگر وضعیت نرون‌ها را در لحظه شروع بدانیم، وضعیت آن‌ها در زمان‌های بعد یک فرایند تصادفی است.

این دینامیک هرچند ساده است ولی اساس تحولات جمعی نرون‌ها را بیان می‌کند و حقیقت آن است که از نظر تاریخی دهه‌ها قبلتر و در سال ۱۹۴۳ توسط دو فیزیولوژیست ارایه شده بود[۴]. ایده‌ی این دو نفر از آن زمان به بعد مورد توجه محققان قرار گرفت و با پیدایش عصر کامپیوتر، به یکی از ابزارهای پرکابرد علوم کامپیوتر و رشته هوش مصنوعی بدل شد.

در مدل بالا هر لحظه تعدادی از نرون ها فعال و تعدادی خاموش هستند که این به یادآوری چیزی در آن لحظه تعبیر می‌شود. در

[۲۱] hippocampus ناحیه‌ای در عمق مغز است که آسیب به آن در تثبیت حافظه کوتاه مدت به بلند مدت اثرات مخربی دارد.

نتیجه معادل هر اطلاعاتی که قرار است به خاطر سپرده شود، الگویی از فعالیت نرون‌ها متناظر می‌شود. تصور کنید می‌خواهیم الگوهای $P_1, P_2, \ldots, P_n$ را به خاطر بسپاریم که هر P_i برداری N مؤلفه‌ی است که وضعیت نرون‌ها را نشان می‌دهد. $(P_i \in \{0,1\}^N)$ هدف این است که T_{ij} ها را طوری انتخاب کنیم که تقریباً با هر شرط اولیه‌ای بر روی N نرون در لحظه $t=0$، بعد از طی چند مرحله به یکی از الگوهای $P_1, P_2, \ldots, P_n$ برسیم. این را مقایسه کنید با هنگامی که تلاش می‌کنیم که موضوعی را به یاد آوریم.

در دهه چهل میلادی روانشناسی به نام دنالد هب[22] با رفتارشناسی بیماران مغزی که تحت عمل جراحی قرار گرفته بودند، به فرضیه‌ی مهمی در کارکرد مغز رسید. طبق فرضیه‌ی وی اگر رفتار دو نرون در طول زمان تشابه زیادی داشته باشد (مثلاً در اکثر مواقع همزمان اسپایک بزنند یا پتانسیل یکسانی داشته باشند) این مشابهت به تقویت اتصال بین این دو کمک می‌کند. به عبارت دیگر نرون‌ها رفتار نرون‌های دیگر را در نظر می‌گیرند و هنگامی که مشابهت های زیادی بین رفتار آن‌ها و خود می‌یابند به یکدیگر متصل می‌شوند و یا اتصالشان را قوی‌تر می‌کنند.

این موضوع، هاپفیلد را به این نتیجه رساند برای پیدا کردن بهترین Ti,j باید به تشابهات فعالیت نرون i و نرون j در الگوهای $P_1, P_2, \ldots, P_n$ توجه کرد و بر اساس آن مقدار زیر را برای آن پیشنهاد داد:

$$T_{i,j} = \sum_{s=1}^{n} (2P_s(i) - 1)(2P_s(j) - 1)$$

و $T_{i,i} = 0$.

فرض کنید آستانه‌ی تحمل هر نرون صفر باشد. در این صورت قبل از این که ببینیم آیا با هر شروع اولیه‌ای به یکی از الگوها خواهیم رسید یا خیر، باید بدانیم که آیا الگوها نقاط ثابت دینامیک نرونی هستند؟

قضیه ۱. *فرض کنید $n = o(N)$ و الگوهای $P_1, P_2, \ldots, P_n$ به طور مستقل و یکنواخت از مجموعه $\{0,1\}^N$ انتخاب شوند. در این صورت احتمال این که تمام الگوها نقطه ثابت دینامیک باشند با افزایش N به یک میل می‌کند.*

اثبات. در اینجا طرحی از اثبات را ارایه می‌دهیم. باید نشان دهیم با شروع از حالت P_s در آن باقی می‌مانیم و یا به بیان دیگر برای هر $1 \le i \le N$، دو عدد $2P_s(i)-1$ و $\sum_j T_{ij}P_s(j)$ هم علامت هستند.

با اندکی محاسبه داریم:

$$\sum_j T_{i,j} P_s(j) =$$
$$\sum_{s'=1}^{n} (2P_{s'}(i) - 1) \left(\sum_j P_s(j)(2P_{s'}(j) - 1) \right)$$
$$:= \sum_{s'=1}^{n} (2P_{s'}(i) - 1) M_{s,s'}$$

به راحتی می‌توان دید که $M_{s,s} = \frac{N}{2}$، و هر کدام از $M_{s,s'}$ ها متغیر تصادفی‌هایی با میانگین صفر هستند و با قضیه حد مرکزی از مرتبه $\sqrt{N}$ اند. در نتیجه با فاکتور گرفتن از $\sqrt{N}$، مجموع $n-1$ جمله مستقل نرمال استاندارد خواهند شد که دوباره با قضیه حد مرکزی از مرتبه $\sqrt{n}$ است. در نتیجه بدون در نظر گرفتن جمله $M_{s,s}$ مجموع بقیه جملات از مرتبه $\sqrt{nN}$ است که از $\frac{N}{2}$ کمتر است و نشان می‌دهد حاصل جمع کل هم‌علامت با $2P_s(i) - 1$ است. □

هاپفیلد تابع زیر را برای این مدل معرفی کرد:

$$E = -\frac{1}{2} \sum \sum T_{i,j} V_i(t) V_j(t)$$

و نشان داد تحت دینامیک مقدار E کاهش پیدا می‌کند و در نتیجه به یکی از مینیمم‌های خواهیم رسید. در حالت کلی تابع E تعداد زیادی مینیمم دارد ولی اگر n کم باشد با احتمال زیاد تنها مینیمم‌ها الگوها هستند. برای چک کردن آن می‌توان شبیه‌سازی کرد که مشاهده می‌شود اگر $n \sim 0/15N$ این مدل الگوهای ابتدایی را یاد می‌گیرد و قادر به یادآوری آن‌هاست. تاکنون تعمیم‌های متفاوتی از مدل هاپفیلد داده شده است. در عین حال تلاش‌هایی جدی برای سازش‌پذیری آن داده‌های زیستی به عمل آمده است.

مراجع

[۱] M F Bear, B W Connors, and M A Paradiso. Neuroscience: exploring the brain. LippincottWilliams and Wilkins, 2001.

[۲] JJ Hopfield - Proceedings of the national academy of Science of the United States of America, Vol. 79, No.8, 1982 - National Acad Sciences

[۳] http://jp.physoc.org/content/590/11/2571.full

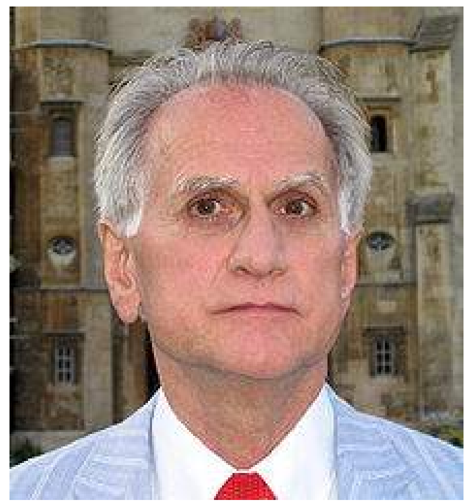
[22] Donald Hebb

[۴] W.MacCulloch & W.H.Pitts. ”A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity” Bulleton of Mathematical BioPhysics vol. 5, 1943, p 115-133

فرازهایی از کنفرانس RSA 2013

عباس محرابیان[۱]

کنفرانس ساختارها والگوریتم‌های تصادفی[۲] از پنجم تا نهم آگست ۲۰۱۳ (چهاردهم تا هجدهم مرداد ۱۳۹۲) در شهر Poznan لهستان برگزار شد. کنفرانس امسال شانزدهمین شماره از این سری بود و دو مناسبت را جشن می‌گرفت: سی‌امین سالگرد تولد خود کنفرانس، و هفتادمین سالگرد تولد Bela Bollobas که نقش پررنگی در پیشرفت این شاخه بازی کرده است.



شکل ۱: Bela Bollobas

در این یادداشت فرازهایی از این کنفرانس که برایم جالب بوده را ذکر می‌کنم. این یک یادداشت فنی نیست: برخی از مطالب زیر را چند روز بعد از شنیدن سخنرانی مربوطه یادداشت کرده‌ام و امکان بروز اشتباه در جزئیات وجود دارد ولی سعی کرده‌ام در هر مورد مقاله مناسبی معرفی کنم تا خواننده علاقمند بتواند به آن‌ها مراجعه کند. طبیعتاً علایق شخصی نویسنده در انتخاب فرازها مؤثر بوده است. خوشحال می‌شوم اگر نظری در مورد این یادداشت دارید به نگارنده به نشانی amehrabi@uwaterloo.ca ای‌میل بزنید.

[۱] نگارنده در سال ۱۳۸۸ مدرک کارشناسی خود را در دو رشته مهندسی کامپیوتر و ریاضیات از دانشگاه صنعتی شریف اخذ نمود و در حال حاضر دانشجوی دکتری دانشگاه واترلوی کاناداست.

[۲] Random structures and algorithms 2013, http://rsa2013.amu.edu.pl/

شکل ۲: Geoffrey Grimmett

Geoffrey Grimmett از دانشگاه کمبریج درباره مسئله شمارش مسیرها[۳] صحبت کرد. فرض کنید G یک گراف نامتناهی رأس ترایا[۴] باشد. تعداد مسیرهای به طول n که از یک رأس خاص شروع می‌شود را با $s(n,G)$ نشان می‌دهیم. منظور از مسیر در این‌جا همان تعریف نظریه گرافی آن است، یعنی دنباله‌ای از رئوس متمایز که هر دوتا رأس متوالی به هم وصل باشند. احتمال‌کارها معمولا به جای مسیر از عبارت self-avoiding walk استفاده می‌کنند. در این صورت به ازای هر دو عدد طبیعی a و b داریم:

$$s(a+b,G) \leq s(a,G)s(b,G)$$

و می‌توان از این رابطه نتیجه گرفت ثابت $m(G)$ وجود دارد که

$$s(n,G) = m(G)^{n+o(n)}$$

و $m(G)$ ثابت اتصال[۵] گراف G خوانده می‌شود. به عنوان مثال برای شبکه‌ی دوبعدی $Z^۲$ ثابت شده است که

$$۲٫۶۳ \leq m(Z^۲) \leq ۲٫۶۸$$

اخیراً Grimmett و Li ثابت کردند[۶] برای هر گراف ساده، نامتناهی، همبند، d-منظم و رأس‌ترایای G داریم

$$\sqrt{d-۱} \leq m(G) \leq d-۱$$

کران بالا تقریباً واضح است. کران پایین اثبات ترکیبیاتی زیبایی دارد که در این سخنرانی شمه‌ای از آن گفته شد. هم‌چنین سخنران گفت نمی‌دانند که آیا این بهترین کران پایین ممکن است؟ حتی برای

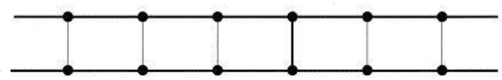
[۳] Counting self-avoiding walks

[۴] Vertex-transitive

[۵] Connectivity constant

[۶] Grimmett and Li, Bounds on connective constants of regular graphs (2012), http://arxiv.org/abs/1210.6277

$d = 3$ بهترین مثالی که وجود دارد گراف زیر است (معروف به گراف نردبان):



که دارای ثابت اتصال $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ است که از $\sqrt{2}$ بزرگ‌تر است. البته گراف زیر دارای ثابت اتصال $\sqrt{2}$ است ولی ساده نیست (یال دوگانه دارد):

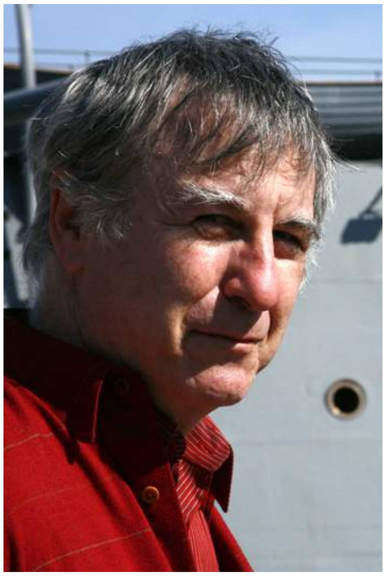
حال فرض کنید $s_1(n, G)$ تعداد مسیرهای به طول n در گراف G باشد که از یک رأس خاص شروع می‌شوند و از انتها قابل ادامه دادن تا بی‌نهایت هستند. هم‌چنین فرض کنید $s_2(n, G)$ تعداد مسیرهای به طول n در گراف G باشد که از یک رأس خاص شروع می‌شوند و از ابتدا قابل ادامه دادن تا بی‌نهایت هستند. بالاخره فرض کنید $s_3(n, G)$ تعداد مسیرهای به طول n در گراف G باشد که از یک رأس خاص شروع می‌شوند و از هر دو سر قابل ادامه دادن تا بی‌نهایت هستند. می‌توان ثابت‌های $m_1(G)$، $m_2(G)$ و $m_3(G)$ را متناظر با این پارامترها تعریف کرد. Grimmett، Holroyd و Peres ثابت کردند[۷] در هر گرافی این چهار ثابت با هم برابرند. این قضیه اثبات پیچیده‌تری دارد. سخنران حدس می‌زند که در شبکه دوبعدی، حکم قوی‌تری درست است: ثابت مثبت c وجود دارد که به ازای هر n داریم $s_1(n, G) > cs(n, G)$.

Joel Spencer از دانشگاه نیویورک درباره یک قضیه که اثبات وجودی دارد صحبت کرد که به تازگی اثباتی ساختنی برایش پیدا شده. فرض کنید یک خانواده n عضوی F از زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی S داریم. می‌خواهیم اعضای مجموعه S را با دو رنگ آبی و قرمز رنگ کنیم به طوری که برای هر مجموعه در F، اختلاف تعداد اعضای آبی و قرمز $O(\sqrt{n})$ باشد. خود سخنران نزدیک ۳۰ سال پیش نشان داد[۸] که چنین کاری ممکن است. اثبات او وجودی بود و الگوریتم سریعی برای پیدا کردن رنگ‌آمیزی ارائه نمی‌کرد. سال ۲۰۱۰ نخستین الگوریتم سریع (با زمان اجرای چندجمله‌ای) برای پیدا کردن چنین رنگ‌آمیزی ارائه شد[۹].

[۷] Grimmett, Holroyd, and Peres, Extendable self-avoiding walks (2013), http://arxiv.org/abs/1307.7132.

[۸] Spencer, Six Standard Deviations Suffice (1985), Transactions of the American Mathematical Society.

[۹] Bansal, Constructive Algorithms for Discrepancy Minimization (FOCS 2010), http://arxiv.org/abs/1002.2259.



شکل ۳: Joel Spencer

این الگوریتم از تکنیک Semi-definite programming استفاده می‌کرد. سال ۲۰۱۲ الگوریتم سریع دیگری برای حل این مسئله ارائه شد[۱۰] که دو ویژگی مهم داشت. اول این که این الگوریتم در حقیقت اثبات متفاوتی برای قضیه Spencer ارائه می‌کند. دوم این که خود الگوریتم بسیار زیباست و ایده اصلی آن یک قدم زدن تصادفی هوشمندانه است که از هیچ ابزار سنگینی استفاده نمی‌کند و احتمالاً در آینده کاربردهای دیگری نیز پیدا خواهد کرد.

شکل ۴: Gil Kalai

Gil Kalai درباره‌ی thresholdها صحبت کرد. گراف Erdos-Renyi با پارامترهای n و p را در نظر بگیرید و آن را $G(n,p)$ بنامید. می‌دانیم که اگر $p >> 1/n$ آن‌گاه امید ریاضی تعداد دورهای همیلتونی از ۱ بیشتر است. ولی کوچکترین p که تضمین کند به

[۱۰] Lovett and Meka, Constructive Discrepancy Minimization by Walking on The Edges (FOCS 2012), http://arxiv.org/abs/1203.5747.

احتمال $1-o(1)$ گراف دارای یک دور همیلتونی است، $p \approx \ln(n)/n$ است. Kahn و Kalai این پدیده را در مسائل مختلفی مشاهده کردند و چنین حدسی زدند[۱۱]: فرض کنیم $H(n)$ گراف مشخصی با حداکثر n رأس باشد و فرض کنیم $p(n)$ کوچک‌ترین مقداری باشد که به احتمال بیش از یک دوم، $H(n)$ زیرگرافی از $G(n,p(n))$ باشد. حال فرض کنید $q(n)$ کوچک‌ترین مقدار با این خاصیت باشد: برای هر زیرگراف $H'(n)$ از $H(n)$، امید ریاضی تعداد کپی‌های $H'(n)$ در $G(n,q(n))$ (به عنوان زیرگراف) لااقل ۱ می‌باشد. در این صورت داریم $p(n) = O(q(n)\log n)$. این گزاره اگر درست باشد بسیار قوی است و نتایج مهمی دارد.

شکل ۵: Xavier Perez-Gimenez

Xavier Perez-Gimenez از دانشگاه واترلو درباره پارامترهای spanning tree packing number و arboricity روی گراف‌های Erdos-Renyi سخنرانی کرد. فرض کنید G یک گراف باشد. حداکثر تعداد زیردرخت‌های فراگیر G که دوبه‌دو یال-مجزا باشند را با $stp(G)$ نشان می‌دهیم و حداقل تعداد جنگل‌هایی که اجتماع آن‌ها همه‌ی یال‌های G را بپوشاند با $a(G)$ نشان می‌دهیم. دو کران بالای ساده برای $stp(G)$ وجود دارد: اولا اگر G رأسی از درجه d داشته باشد، $stp(G)$ از d بیشتر نیست. بنابراین مینیمم درجه‌ی G یک کران بالاست. ثانیا اگر گراف G دارای n رأس و m یال باشد، آن‌گاه $stp(G)$ از $\lfloor \frac{m}{n-1} \rfloor$ بیشتر نیست چرا که هر زیردرخت فراگیر دارای $n-1$ یال است. فرض کنید $p = p(n)$ تابع دلخواهی از n باشد و گراف Erdos-Renyi را با $G(n,p)$ نمایش می‌دهیم. Gao، Perez-Gimenez و Sato نشان دادند[۱۲] که به احتمال نزدیک به ۱ وقتی n بزرگ باشد، داریم

$$stp(G(n,p)) = \min\{\delta, \lfloor \frac{m}{n-1} \rfloor\}$$

در حقیقت چیزی که آن‌ها ثابت کردند قوی‌تر است: فرآیند تصادفی تولید یک گراف تصادفی را در نظر بگیرید. از گراف با n رأس و بدون یال شروع می‌کنیم، و در هر گام یک یال تصادفی از بین یال‌هایی که در گراف موجود نیست را به گراف اضافه می‌کنیم، تا در نهایت به گراف کامل برسیم. آنان نشان دادند به احتمال نزدیک به ۱ برای n های بزرگ، در تمام طول این فرآیند رابطه فوق برقرار است. در همین مقاله آنان قضایایی در مورد arboricity گراف‌های تصادفی نیز ثابت کردند.

شکل ۶: Aravind Srinivasan

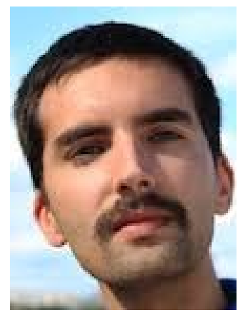
Aravind Srinivasan از دانشگاه Maryland در مورد جنبه‌های الگوریتمی Lovasz Local Lemma صحبت کرد. این لم که در روش‌های احتمالاتی بسیار کاربرد دارد از قرار زیر است: فرض کنیم یک فضای احتمال و خانواده‌ای از پیشامدهای "بد" داریم. هم‌چنین فرض کنید احتمال رخ دادن هر یک از پیشامدها حداکثر p است و به علاوه هر کدام از این پیشامدها به حداکثر d پیشامد دیگر وابسته است. اگر $ep(d+1) < 1$ آن‌گاه احتمال این که هیچ یک از پیشامدهای بد اتفاق نیفتد مثبت است. این صورت‌بندی که دقیق نیست (وابستگی بین پیشامدها باید تعریف شود)، حالت خاص ولی پرکاربردی از این لم است. برای تعریف دقیق‌تر و حالت کلی لم فصل پنجم کتاب The Probabilistic Method نوشته Alon و Spencer را ببینید. توجه کنید که این لم تنها می‌گوید نقطه‌ای در فضای نمونه وجود دارد که خارج از پیشامدهای بد است، ولی در مورد نحوه پیدا کردن آن نقطه حرفی نمی‌زند. این لم در سال ۱۹۷۵ توسط Erdos و Lovasz ثابت شد[۱۳] و در سال ۲۰۱۰ نخستین بار الگوریتم سریعی

[۱۱] Kahn and Kalai, Thresholds and Expectation Thresholds (2007), Combinatorics, Probability and Computing, http://arxiv.org/abs/math/0603218.

[۱۲] Gao, Perez-Gimenez, Sato, Arboricity and spanning-tree packing in random graphs with an application to load balancing, http://arxiv.org/abs/1303.3881, SODA 2014

[۱۳] Erdos and Lovasz, Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions (1975), In Infinite and Finite Sets, volume II, pages 609—627, North-Holland, 1975.

توسط Moser و Tardos ارائه شد[۱۴] که تحت شرایطی این نقطه را پیدا می‌کرد. بسیاری از اثبات‌های وجودی که از این لم استفاده می‌کردند به کمک این الگوریتم تبدیل به اثبات‌های ساختنی (در زمان چندجمله‌ای) شدند. پس از آن تلاش شد که برای سایر قضایایی که در اثباتشان از این لم استفاده می‌شد ولی در چهارچوب شرایط این الگوریتم جا نمی‌گرفتند نیز اثبات‌هایی الگوریتمی پیدا شود[۱۵] و بعضاً الگوریتم‌هایی پیدا شدند که به کمک آن‌ها می‌شد حکم‌هایی را ثابت کرد که از حکم‌هایی که به صورت وجودی اثبات می‌شدند قوی‌تر بودند. سخنران چند نمونه از این دست ارائه کرد، که در دو مقاله اخیر خود[۱۶] به آن‌ها پرداخته است.



شکل ۷: Abbas Mehrabian

من در مورد نتایجی که اخیراً در مورد قطر دو مدل از گراف‌های تصادفی اثبات کرده‌ام صحبت کردم. در سال ۲۰۰۶ قضیه‌ای ثابت شد[۱۷] که روشی با استفاده از قضیه کرامر (در مورد large deviations) برای محاسبه ارتفاع دامنه وسیعی از درخت‌های تصادفی ارائه می‌دهد. ما از تکنیک مطرح شده استفاده کردیم تا قطر دو مدل از گراف‌های تصادفی را تخمین بزنیم. نتایجی که در زیر می‌آید احتمال وقوعشان به ۱ میل می‌کند وقتی تعداد رئوس به بی‌نهایت میل کند. اولین مدل، شبکه تصادفی آپولونیوسی[۱۸] نام دارد. یک مثلث‌بندی مسطح تصادفی را به طریق زیر می‌سازیم. از یک مثلث روی صفحه شروع می‌کنیم. در هر گام یکی از وجه‌های کران‌دار را به تصادف (و به صورت یکنواخت از بین تمام وجه‌های کران‌دار) انتخاب کرده، رأسی درون آن اضافه می‌کنیم و آن را به سه رأس وجه انتخاب شده وصل می‌کنیم. بعد از $n - ۳$ بار انجام این کار یک گراف مسطح مثلث‌بندی‌شده حاصل می‌شود. این مدل سال ۲۰۰۵ مطرح شده است[۱۹] و علاوه بر مسطح بودن، دارای برخی از خواص شبکه‌های واقعی مثل دنباله درجات توانی[۲۰] است. با همکاری چند نفر دیگر نشان دادیم[۲۱] که نسبت قطر این گراف به $\ln(n)$ در احتمال به c میل می‌کند، که $c \approx ۱٫۶۶۸$ پاسخ یک معادله داده‌شده است. مدل دوم درخت وبگرد تصادفی[۲۲] نام دارد و یک درخت تصادفی تولید می‌کند. فرض کنیم $p \in (۰,۱]$. یک گراف جهت‌دار تصادفی می‌سازیم که در آن هر رأس دقیقاً یک یال خروجی دارد. فرض کنیم $X_۱, X_۲, \ldots$ متغیرهای تصادفی با پارامتر p باشند. از تک رأس $v_۰$ که یک لوپ جهت‌دار دارد شروع می‌کنیم. درگام $i > ۰$ رأس v_i را اضافه می‌کنیم، یک رأس تصادفی از گراف فعلی انتخاب می‌کنیم مثل u، و روی تنها مسیری که در گراف از u شروع می‌شود و طولش X_i است حرکت می‌کنیم. فرض کنیم رأس پایانی این مسیر w باشد. در این صورت یالی از v_i به w می‌کشیم. وقتی تعداد رئوس به n رسید، جهت یال‌ها ولوپ رأس اول را حذف می‌کنیم و یک درخت n رأسی به دست می‌آید. مدل اصلی که در سال ۲۰۰۶ برای مدل‌سازی گراف وب مطرح شد[۲۳]، دارای یک پارامتر دیگر به نام d هم بود. در حقیقت آن مدل درخت تولید نمی‌کرد بلکه یک گراف تولید می‌کرد، تنها تفاوتش با مدلی که گفته شد این بود که هر رأس جدید که اضافه می‌شد مستقلاً به d رأس قدیمی یال ایجاد می‌کرد بنابراین درجه خروجی همه رئوس (به جز اولین رأس) برابر d بود. ایده این مدل چنین بود: فرض کنیم شما یک صفحه وب جدید ایجاد کرده‌اید و می‌خواهید به d صفحه وب دیگر لینک بدهید. ابتدا به یک صفحه تصادفی می‌روید. به احتمال p این صفحه برایتان جالب است و به آن لینک می‌دهید، و به احتمال $۱ - p$ برایتان جالب نیست، که در این صورت روی یک لینک تصادفی از آن کلیک می‌کنید و به یک صفحه دیگر می‌روید. به احتمال p صفحه جدید برایتان جالب است و به آن لینک می‌دهید، و به احتمال $۱ - p$ برایتان جالب نیست که در این صورت روی یک لینک تصادفی از آن کلیک می‌کنید، و همین کار

[۱۴] Moser and Tardos, A constructive proof of the general lovasz local lemma (2010), Journal of the ACM, http://arxiv.org/abs/0903.0544.

[۱۵] See, e.g., Haeupler, Saha, and Srinivasan, New constructive aspects of the Lovasz Local Lemma (FOCS 2010), http://arxiv.org/abs/1001.1231

[۱۶] Harris and Srinivasan, Constraint Satisfaction, Packet Routing, and the Lovasz Local Lemma (STOC 2013), http://www.cs.umd.edu/~srin/PDF/2013/assign-lll.pdf; Harris and Srinivasan, The Moser-Tardos Framework with Partial Resampling (FOCS 2013).

[۱۷] Broutin and Devroye, Large deviations for the weighted height of an extended class of trees (2006), Algorithmica, http://www.cs.mcgill.ca/~nbrout/pub/weighted_height.pdf.

[۱۸] Random Apollonian Network

[۱۹] Zhou, Yan, and Wang, Maximal planar networks with large clustering coefficient and power-law degree distribution (2005), Physical Review E, http://arxiv.org/abs/cond-mat/0412448.

[۲۰] Power-law degree sequence

[۲۱] Ebrahimzadeh, Farczadi, Gao, Mehrabian, Sato, Wormald, and Zung, On the Longest Paths and the Diameter in Random Apollonian Networks, http://arxiv.org/abs/1303.5213.

[۲۲] Random surfer tree model

[۲۳] Blum, Chan, and Rwebangira, A Random-Surfer Web-Graph Model (ANALCO 2006), http://repository.cmu.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1138&context=compsci.

را ادامه دهید تا بالاخره صفحه‌ای پیدا شود که برایتان جالب است و یا به صفحه‌ای برسید که خروجی ندارد. این کار را $d-1$ بار دیگر مستقلاً انجام می‌دهید تا d لینک مورد نظر صفحه وب جدید خود را بسازید. ما حالت خاص $d=1$ را بررسی کردیم و نشان دادیم[۲۴] وقتی تعداد رئوس به n برسد، اگر $p \geq 21\%$ آن‌گاه ارتفاع درخت تقسیم بر $\ln(n)$ در احتمال به c میل می‌کند که تابعی داده شده بر حسب p است، و اگر $p < 21\%$ آن‌گاه ارتفاع درخت حاصل بین $c_1 \ln(n)$ و $c_2 \ln(n)$ است که c_1 و c_2 توابعی داده شده بر حسب p هستند.

شکل ۸: Noga Alon

Noga Alon درباره عدد پوشش ماتریس‌ها[۲۵] صحبت کرد. این یک پارامتر جدید است که کاربردهای جالبی در طراحی الگوریتم‌های تقریبی دارد. مجموعه همه بردارهای نامنفی nتایی که مجموع درایه‌هایشان ۱ است را با Δ_n نشان دهید. به عبارت دیگر، Δ_n مجموعه همه‌ی توزیع‌های احتمال روی یک مجموعه n عضوی است. فرض کنید A ماتریسی $m \times n$ باشد و مسئله ماکسیمم‌سازی عبارت p^TAq را در نظر بگیرید به شرط $q \in \Delta_n$، $p \in \Delta_m$ و تعدادی شرایط خطی[۲۶] دیگر روی p و q. در اینجا A ثابت است و p و q متغیرهای ما هستند. یک مسئله خیلی مهم که در این دسته قرار می‌گیرد، مسأله پیدا کردن یک mixed Nash equilibrium برای یک بازی دونفره است.

مجموعه S را به صورت $S = \{Aq : q \in \Delta_n\}$ تعریف کنید، یعنی مجموعه همه ترکیب‌های محدب ستون‌های ماتریس A. منظور از یک ϵ-net برای A یک مجموعه T است به طوری که برای هر $x \in S$، لااقل یک $y \in T$ پیدا شود به طوری که $||x-y||_\infty \leq \epsilon$ باشد. اندازه‌ی کوچکترین ϵ-net برای A را عدد پوشش A می‌نامیم و با $N(\epsilon, A)$ نشان می‌دهیم. حال برای این که مسئله ماکسیمم‌سازی عبارت p^TAq به شرط $q \in \Delta_n$، $p \in \Delta_m$ و تعدادی شرایط خطی روی p و q را به صورت تقریبی (با دقت ϵ) حل کنیم، می‌آییم و مساله ماکسیمم‌سازی عبارت p^Ty به شرط $q \in \Delta_n$، $p \in \Delta_m$، $||Aq-y||_\infty \leq \epsilon$ و همان شرایط خطی روی p و q را حل می‌کنیم، و این کار را به ازای همه‌ی yهایی که در ϵ-net هستند انجام می‌دهیم، و ماکسیمم می‌گیریم. متغیرها هم‌چنان p و q هستند ولی مسئله‌های جدید همگی برنامه‌ریزی خطی[۲۷] هستند و قابل حل در زمان چندجمله‌ای. دیدن این موضوع سخت نیست که جوابی که به دست می‌آید حداکثر به اندازه ϵ با جواب مسئله اصلی اختلاف دارد. زمان اجرای این الگوریتم به عدد پوشش ماتریس A ارتباط دارد.

برای نرمال‌سازی فرض کنیم همه درآیه‌های ماتریس A بین -1 و 1 باشند و رتبه ماتریس A را با $rank(A)$ نشان می‌دهیم. به کمک یک برهان حجمی می‌توان نشان داد که

$$N(\epsilon, A) \leq (1 + \frac{2}{\epsilon})^{rank(A)}$$

در سال ۲۰۱۳ الگوریتمی تصادفی ارائه شد[۲۸] که یک ϵ-net با $(\frac{1}{\epsilon})^{O(rank(A))} poly(m)$ نقطه را می‌سازد. به کمک لم Johnson-Lindenstrauss برای کاهش بُعد بدون تغییر زیاد در فواصل می‌توان نشان داد که اگر A ماتریسی مثبت نیمه‌معین[۲۹] باشد آن‌گاه $N(\epsilon, A) \leq (\frac{1}{\epsilon})^{O(\log n/\epsilon^2)}$. اخیراً Alon، Lee و Shraibman نشان دادند برای هر ماتریس m در n داریم $N(\epsilon, A) \leq n^{O(\log m/\epsilon^2)}$.

برمی‌گردیم به مسئله پیدا کردن یک mixed Nash equilibrium برای یک بازی دونفره. در سال ۲۰۰۶ ثابت شد که این مسئله PPAD-complete است[۳۰] ولی سختی مسأله پیدا کردن یک ϵ-approximate Nash equilibrium باز است. به صورت غیردقیق، منظور ارائه دو استراتژی تصادفی برای دو بازیکن است که هر کدام از آن‌ها با تغییر استراتژی خود بیش از ϵ نتوانند سود کنند. اگر ماتریس‌های سود دو بازیکن را با A و B نشان دهیم، با کمک ایده‌هایی که بالا ذکر شد می‌توان نشان داد که در حالت‌هایی که $A+B$ دارای رتبه کرانداری باشد یا مثبت نیمه‌معین باشد می‌توان یک ϵ-approximate Nash equilibrium را در زمان چندجمله‌ای یافت. برای اطلاعات بیشتر مقاله Alon، Lee، Shraibman و Vempala را ببینید.

مطلب آخر درباره یک سخنرانی است که در کنفرانس RSA انجام نشد بلکه در ورکشاپی تحت عنوان Flexible Network Design در موسسه FIELDS شهر تورنتو برگزار شد.[۳۱] Lap Chi Lau

[۲۴] Mehrabian and Wormald, The height and diameter of the random surfer tree model, preprint (2013).

[۲۵] Cover number of matrices

[۲۶] Linear constraints

[۲۷] Linear programming

[۲۸] Alon, Lee, Shraibman and Vempala, The approximate rank of a matrix and its algorithmic applications (STOC 2013), http://www.tau.ac.il/~nogaa/PDFS/epsrankstoc3.pdf

[۲۹] positive semi-definite

[۳۰] Chen and Deng, Settling the complexity of two-player Nash equilibrium (FOCS 2006).

[۳۱] http://www.fields.utoronto.ca/programs/scientific/13-

شکل ۹: Lap Chi Lau

از دانشگاه هنگ‌کنگ درباره تعمیمی از حالت گسسته نامساوی Cheeger صحبت کرد. فرض کنیم G گرافی d-منظم باشد (اگرچه نتایج قابل تعمیم به گراف‌های وزن‌دار غیرمنظم نیز هستند، این فرض برای ساده شدن فرمول‌ها صورت می‌گیرد). رسانایی[۳۲] زیرمجموعه S از رئوس را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\phi(S) := \frac{|E(S, S^c)|}{d|S|}$$

که در آن S^c مکمل S را نشان می‌دهد و $E(S, S^c)$ مجموعه یال‌هایی است که یک سرشان در S و سر دیگرشان خارج از S است. هم‌چنین رسانایی گراف G را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\phi(G) := \min\{\phi(S) : S \subset V(G), |S| \leq n/2\}$$

مسئله پیدا کردن یک زیرمجموعه با رسانایی کم یک مسئله الگوریتمی است که در بسیاری از زمینه‌های علوم کامپیوتر به صورت طبیعی ظاهر می‌شود. رابطه جالبی بین این پارامتر و خواص جبری گراف وجود دارد. فرض کنید A ماتریس مجاورت گراف G باشد که یک ماتریس $n \times n$ است که تعداد رئوس G را نشان می‌دهد. ماتریس L را به صورت $L := I_n - \frac{1}{d}A$ تعریف می‌کنیم. مقدار ویژه‌های این ماتریس را می‌توان به صورت

$$0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq 2$$

نوشت. می‌توان دید که رسانایی گراف صفر است اگر و تنها اگر گراف ناهمبند باشد اگر و تنها اگر λ_2 صفر باشد. نامساوی Cheeger برای گراف‌ها چنین است[۳۳]:

$$\frac{\lambda_2}{2} \leq \phi(G) \leq \sqrt{2\lambda_2}$$

در سال ۲۰۱۲ تعمیمی از این نامساوی به مقدارویژه‌های بزرگ‌تر ارائه شد. تعریف کنید

$$\phi_k(G) := \min\{\max\{\phi(S_i) : i = 1, \ldots, k\} :$$
$$S_1, S_2, \ldots, S_k \text{ partition } V(G)\}$$

در این صورت داریم[۳۴]:

$$\frac{\lambda_k}{2} \leq \phi_k(G) \leq O(k^4\sqrt{\lambda_k})$$

دقت کنید که $\phi(G) = \phi_2(G)$. سخنران و دیگران ثابت کردند[۳۵]:

$$\phi(G) \leq O(k)\frac{\lambda_2}{\sqrt{\lambda_k}}$$

و الگوریتمی برای افراز کردن گراف به دو قسمت با رسانایی $O(k)\frac{\lambda_2}{\sqrt{\lambda_k}}$ ارائه کردند.

14/netdesign/

[۳۲] conductance

[۳۳] For a proof, see Section 4.5 of Hoory, Linial, Widgerson, Expander Graphs and Their Applications (2006), Bulletin of the American Mathematical Society, http://www.ams.org/journals/bull/2006-43-04/S0273-0979-06-01126-8/S0273-0979-06-01126-8.pdf

[۳۴] Lee, Oveis Gharan, Trevisan, Multi-way spectral partitioning and higher-order Cheeger inequalities (STOC 2012), http://arxiv.org/abs/1111.1055

[۳۵] Kwok, Lau, Lee, Oveis Gharan, Trevisan, Improved Cheeger's inequality: analysis of spectral partitioning algorithms through higher order spectral graph (STOC 2013), http://arxiv.org/abs/1301.5584

مکمل‌پذیری و متمم‌پذیری در گروه‌ها و کاربردهای آن در نظریه‌ی گراف

چکیده

فرض کنید R حلقه‌ای نیم‌ساده باشد. هر ایده‌آل دلخواه I از R را که در نظر بگیرید، ایده‌آل J از R موجود است چنان که $I \oplus J = R$. حال حلقه‌ی اعداد صحیح را در نظر بگیرید. ایده‌آل $۲\mathbb{Z}$ را در $\mathbb{Z}$ نگاه کنید، هیچ ایده‌آل $m\mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}$ در این حلقه موجود نیست که $۲\mathbb{Z} \oplus m\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$، ولی می‌توان m را طوری پیدا کرد که $۲\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. در واقع کافی است که $(۲, m) = ۱$. در این مقاله می‌خواهیم این دو مفهوم را برای گروه‌ها بازسازی کنیم و در نهایت به کاربردهایی از این دو مفهوم درنظریه‌ی گراف اشاره می‌کنیم. به مفهوم اول، "مکمل‌پذیری" و به مفهوم دوم "متمم‌پذیری" می‌گویند.

تعریف ۱. *as- گروه‌ها و ac- گروه‌ها: فرض کنید G یک گروه باشد و $H \leq G$. به زیرگروه سره K از گروه G یک متمم [۱] برای زیرگروه H می‌گویند هرگاه $G = HK$. حال اگر $H \cap K = ۱$، به K مکمل[۲] H نیز گفته می‌شود.*

اگر هر زیرگروه دلخواه از G دارای متمم بود، G را یک as- گروه می‌نامند که در واقع a اول کلمه‌ی "arbitrary" به معنی دلخواه و s اول کلمه‌ی "supplement" است. و به همین ترتیب اگر هر زیرگروه دلخواه از گروه G دارای مکمل باشد، آن‌گاه G را یک ac- گروه می‌نامند.

مثال ۲. *گروه $\mathbb{Z}_۶$ را در نظر بگیرید. ۲ زیرگروه سره دارد: $۲\mathbb{Z}_۶$ و $۳\mathbb{Z}_۶$. می‌توان به راحتی دید که $\mathbb{Z}_۶ = (۳\mathbb{Z}_۶)(۲\mathbb{Z}_۶)$. بنابراین $\mathbb{Z}_۶$ هم ac- گروه و هم as- گروه است.*

در ادامه به بررسی تاریخچه‌ی این دو کلاس از گروه‌ها می‌پردازیم و هم‌چنین قضایایی اساسی و مهمی که تا امروز در مورد این دو کلاس اثبات شده است را مرور می‌کنیم.

در ابتدا ac- گروه‌های متناهی مورد توجه قرار گرفتند. هال[۳] در سال ۱۹۳۷ تمام ac- گروه‌های متناهی را رده‌بندی کرد. البته هال در ۱۹۳۷ از اصطلاح ac- گروه در کارهای خود استفاده نکرده بود. او از اصطلاح متمم‌پذیر استفاده کرد. اصطلاح ac- گروه‌ها و as- گروه‌ها در سال ۲۰۰۰ توسط کاپه[۴] و کرتلند[۵] برای اولین بار به کار رفت ولی تا قبل از آن نشانه‌ای از این اصطلاح نیست، حتی ریاضیدانان شوروی سابق که با این مفهوم کار می‌کردند از لفظ تجزیه‌ی کامل[۶] برای ac- گروه‌ها استفاده می‌کردند. برای مثال می‌توانید به مقاله‌های [۲] از بااوا[۷] و مقاله‌های [۶] و [۷] از چرینکوا[۸] مراجعه کنید. در قضیه‌ی بعد به رده‌بندی as- گروه‌های متناهی می‌پردازیم.

قضیه ۳. *فرض کنید G یک گروه متناهی باشد. آن‌گاه گزاره‌های زیر با هم معادل هستند:*

الف) G یک ac- گروه است.

ب) G یکریخت است با زیرگروهی از ضرب مستقیم گروه‌هایی با مرتبه‌ی خالی از مربع .

ج) G یک گروه ابرحل‌پذیر[۹] با سیلو زیرگروه‌های آبلی مقدماتی است.

ه) هر زیرگروه دوری از مرتبه‌ی اول دارای مکمل می‌باشد.

اثبات. معادل بودن گزاره‌های الف، ب و ج از گزاره ۱ و ۲ از مقاله‌ی [۱۲] نتیجه گرفته می‌شود و معادل بودن گزاره‌های الف و ه از نتیجه‌ی ۲ از مقاله‌ی [۳] به دست می‌آید. □

در ادامه به بررسی ac- گروه‌های نامتناهی می‌پردازیم.

قضیه ۴. [باآوا ۱۹۵۳، [۲]] *فرض کنید G یک ac- گروه باشد (نه لزوماً متناهی). در این صورت موارد زیر را داریم:*

الف) G یک گروه متاآبلی[۱۰] است.

ب) G یک گروه به طور موضعی آبلی است.

ج) اگر G یک p- گروه باشد، آن‌گاه G آبلی مقدماتی است.

[۱] Supplementation
[۲] Complementation

[۳] Hall
[۴] Kappe
[۵] Kirtland
[۶] Completely Factorizable
[۷] Baeva
[۸] Chernikova
[۹] گروه G را ابرحل‌پذیر می‌گویند اگر دارای سری نرمال با عامل‌های دوری باشد.
[۱۰] گروه G را متاآبلی می‌گویند هر گاه $G'' = ۱$ یا به طور معادل G' آبلی باشد.

ه) *معادل است با این که G ضرب نیم‌مستقیم زیرگروه نرمال و آبلی A و زیرگروه آبلی B باشد؛ به قسمی که هر دوی A و B به ضرب مستقیم زیرگروه‌های دوری از مرتبه‌ی اعداد اول تجزیه می‌شوند.*

بااوا در مقاله‌ی [۲] یک حکم جالب توجه دیگر نیز نشان داد، او نشان داد اگر G شامل یک سری افزایشی از زیرگروه‌های نرمال با عامل‌های دوری از مرتبه‌ی اعداد اول متمایز باشد، یک ac-گروه خواهد بود.

حال در ادامه به بررسی کلاس as-گروه‌ها می‌پردازیم. ابتدا به بررسی ارتباط ac-گروه‌ها و as-گروه‌ها می‌پردازیم. همان طور که قبلاً اشاره شد، اگر G یک ac-گروه باشد آنگاه as-گروه است. عکس این گزاره درست نیست، مثلاً گروه

$$D_\infty = \langle a, b | o(b) = 2, bab = a^{-1} \rangle$$

را در نظر بگیرید. با کمی بررسی می‌توان دریافت که D_∞ یک as-گروه است ولی ac-گروه نیست.

قضیه ۵. [قضیه ۳.۶ ، [۱۲]] *فرض کنید G یک as-گروه آرتینی[11] باشد در این صورت G یک ac-گروه است.*

حال با کمک این قضیه می‌توان as-گروه‌های متناهی را رده‌بندی کرد. توجه کنید با توجه به قضیه‌ی قبل، کلاس as-گروه‌های متناهی و ac-گروه‌های متناهی معادل می‌شوند. حال که با توجه به قضیه ۳، ac-گروه‌های متناهی رده‌بندی شده‌اند از این رو as-گروه‌های متناهی نیز رده‌بندی می‌شوند. اما در مورد as-گروه‌های نامتناهی رده‌بندی شناخته شده‌ای وجود ندارد. در سال ۲۰۱۲ در مقاله [۱] توانسته‌ایم نشان دهیم که as-گروه‌ها چه متناهی و چه نامتناهی، ساده نیستند.

حال در قضیه‌های بعدی سعی می‌کنیم که خواص بیشتری از as-گروه‌های نامتناهی بررسی کنیم.

قضیه ۶. [تمرین ۸ صفحه‌ی ۴۴۳ ، [۱۱]] *اگر R یک حلقه‌ی نیم‌ساده باشد آنگاه $J(R) = 0$.*

همان‌طور که می‌دانید در حلقه‌های نیم‌ساده، ایده‌آل جیکوبسن نقشی اساسی دارد. به نظر می‌آید در as-گروه‌ها نیز باید به همین ترتیب باشد. زیرگروه فراتینی در واقع همان نقش ایده‌آل جیکوبسن را در نظریه‌ی حلقه‌ها بازی می‌کند. در واقع اشتراک تمام زیرگروه‌های ماکسیمال گروه G را زیرگروه فراتینی G می‌گویند و با نماد $\Phi(G)$ نمایش می‌دهند. قرارداد می‌کنند اگر G زیرگروه ماکسیمال نداشته باشد $G = \Phi(G)$. لازم به ذکر است که فراتینی زیرگروه خودش را سال‌ها قبل از ایده‌آل جیکوبسن معرفی کرد. برای دیدن خواص فراتینی می‌توانید به مقاله‌ی [۸] مراجعه کنید.

قضیه ۷. *اگر G یک as-گروه باشد، در این صورت G دارای زیرگروه ماکسیمال است، بعلاوه $\Phi(G) = 1$.*

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم که G حداقل شامل یک زیرگروه ماکسیمال است. عضو $x \in G$ را در نظر بگیرید. از آنجا که G as-گروه است، زیرگروه سره‌ی H موجود است که $\langle x \rangle H = G$. حال قرار دهید $\Sigma = \{K < G | H \leq K, x \notin K\}$. به راحتی می‌توان دید Σ ناتهی است زیرا $H \in \Sigma$. هر زنجیر دارای کران بالایی است.لذا بنابر لم زرن دارای عضو ماکسیمال است. فرض کنید $\mathfrak{m}$ عضو ماکسیمال باشد آن‌گاه نشان می‌دهیم $\mathfrak{m}$ در G نیز ماکسیمال است. فرض کنید $\mathfrak{m} \subsetneq \mathfrak{m}_1$. آن‌گاه دو حالت داریم. حالت اول: فرض کنید $x \notin \mathfrak{m}_1$. از آن‌جائیکه $H \subset \mathfrak{m} \subsetneq \mathfrak{m}_1$ پس $\mathfrak{m}_1$ متعلق به Σ است و با ماکسیمال بودن $\mathfrak{m}$ در تناقض است. حالت دوم: فرض کنید $x \in \mathfrak{m}_1$. با توجه به اینکه $\langle x \rangle H = G$ لذا داریم: $\langle x \rangle H = \langle x \rangle \mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_1$. پس $\mathfrak{m}$ یک زیرگروه ماکسیمال G است. حال نشان می‌دهیم که $\Phi(G) = 1$. فرض کنید $1 \neq x \in \Phi(G)$. از آن‌جائیکه as-گروه است از این رو زیرگروه K به قسمی که $\langle x \rangle K = G$ وجود دارد. اما با توجه به گزاره‌ی ۱.۱۵ صفحه‌ی ۹۲ از [۱۵]، داریم $G = K$ که تناقض است. بنابراین $\Phi(G) = 1$. □

کاربردهای as-گروه‌ها و ac-گروه‌ها در نظریه‌ی گراف

نظریه‌ی گراف علاوه بر این‌که امروزه به عنوان یکی از مهمترین شاخه‌های ریاضی محسوب می‌شود، به عنوان یک ابزار قوی در اختیار سایر علوم هم‌چون فیزیک، شیمی، الکترونیک، مخابرات و غیره قرار گرفته است. از میان سایر شاخه‌های علم ریاضیات بعضی متخصصین علم جبر نیز سعی کرده‌اند گراف‌هایی به اشیاء جبری اعم از نیم‌گروه‌ها، گروه‌ها و حلقه‌ها نسبت دهند و از خواص هندسی گراف برای یافتن نتایجی در مورد ساختار جبری این اشیاء بهره گیرند و برای برخی از قضایای جبری ترجمه‌ای به زبان خواص هندسی گراف‌ها به دست آورند.

متناظر کردن گراف به ساختارهای جبری به یکی از مسایل مهم در نظریه جبری گراف تبدیل شده است. تاکنون گراف‌های مختلفی به نیم‌گروه‌ها و گروه‌ها نظیر شده است. برای مثال در سال ۱۹۷۵، زلینکا گراف اشتراکی را برای گروه‌های آبلی در مقاله‌ی [۱۶] بررسی

[11] گروه G را آرتینی می‌گویند هرگاه هر خانواده‌ای از زیرگروه‌هایش عنصر مینیمال داشته باشد.

کرد، برای مطالعه‌ی بیشتر گراف‌های اشتراکی گروه‌ها به [۱۷] مراجعه کنید. حتی با استفاده از سرشت‌های تحویل‌ناپذیر گروه می‌توان به گروه یک گراف نظیر کرد، به مقاله‌ی [۱۸] مراجعه کنید.

حال با استفاده از مفهوم as- گروه‌ها و ac- گروه‌ها می‌توان به گروه‌ها گراف نظیر کرد و آن را به کلیه‌ی گروه‌ها تعمیم داد.

تعریف ۸. *فرض کنید G یک گروه باشد. تمام زیرگروه‌های ناسره و نابدیهی G را به عنوان رئوس گراف $\Gamma(G)$ در نظر بگیرید. دو راس H و K را به هم وصل می‌کنیم اگر و تنها اگر $HK = G$. گراف $\Gamma(G)$ را گراف دوگان ماکسیمال[۱۲] زیرگروه‌های یک گروه می‌نامیم. برای راحتی به جای گراف دوگان ماکسیمال زیرگروه‌های یک گروه، گراف دوگان ماکسیمال می‌گوییم.*

مثال ۹. *$\Gamma(A_۴)$ را در نظر بگیرید.*

۰ : ⟨(۱۲۳)⟩

۱ : ⟨(۱۳۴)⟩

۲ : ⟨(۱۲)(۳۴)⟩

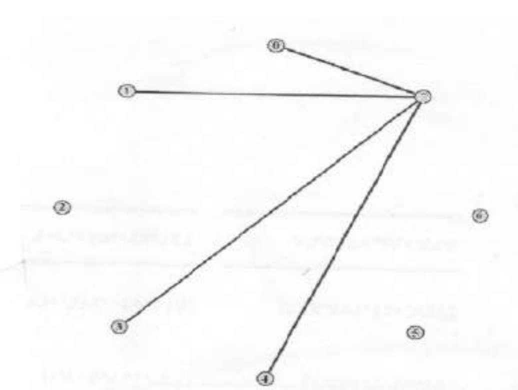
۳ : ⟨(۲۳۴)⟩

۴ : ⟨(۱۴۲)⟩

۵ : ⟨(۱۴)(۲۳)⟩

۶ : ⟨(۱۳)(۲۴)⟩

۷ : ⟨(۱۲)(۳۴), (۱۳)(۲۴)⟩



قضیه ۱۰. *گراف دوگان ماکسیمال یک گروه، گرافی ساده است.*

[۱۲] Co-maximal

اثبات. فرض کنید راس H به K متصل باشد یعنی $G = HK$. از آن‌جائیکه $G = HK$ پس HK زیرگروه است و بنا به گزاره‌ی ۳.۱۲ از [۱۶] داریم $KH = HK$ پس $G = KH$ و K نیز به H وصل است. بنابراین گراف $\Gamma(G)$ ساده است. □

به همین ترتیب می‌توان گرافی مشابه برای حالت $G = HK$ که در آن $H \cap K = ۱$ تعریف کرد اما در این مقاله به بررسی گراف دوگان ماکسیمال می‌پردازیم. یکی از اولین سؤالاتی که در مورد گراف دوگان ماکسیمال به ذهن می‌رسد، چه موقع این گراف پوچ نمی‌باشد یعنی حداقل شامل یک یال است؟ برای پاسخ دادن به این سوال به تعریف مفهوم مهمی از نظریه گروه‌ها نیاز داریم.

تعریف ۱۱. *گروه G را تجزیه‌پذیر می‌نامیم اگر زیرگروه‌های سره و نابدیهی H و K از G موجود باشند به طوری که $G = HK$. گروه‌هایی نیز وجود دارند که تجزیه‌ناپذیرند. یعنی هر زیرگروه آنها فاقد متمم است.*

در قضایای بعدی به بررسی تجزیه‌ناپذیری چند گروه می‌پردازیم و هم‌چنین ذکر می‌کنیم چه موقع زیرگروه یک گروه آبلی فاقد متمم است. همه‌جا p و q را نمایانگر اعدادی اول می‌گیریم.

قضیه ۱۲. *فرض کنید G یک گروه آبلی باشد.*

الف) *[تمرین ‎D-۱۰.۵، [۵]] زیرگروه K از G فاقد متمم است اگر و فقط اگر $K \subseteq \Phi(G)$ و K هیچ گروه خارج‌قسمتی یکریخت با $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ نداشته باشد.*

ب) *[۱۳.۱.۶، [۱۵]] G تجزیه‌ناپذیر است اگر و فقط اگر $G \cong \mathbb{Z}_{p^\infty}$.*

تذکر ۱۳. *توجه کنید که گروه‌های ناآبلی متناهی و نامتناهی وجود دارند که تمام زیرگروه‌های آن‌ها فاقد متمم باشد. برای مثال، فرض کنید $G \cong PSL(۲,۱۳)$. آن‌گاه تمام زیرگروه‌های G فاقد متمم هستند. برای جزئیات بیشتر می‌توان به [۱۳.۱.۱۱ و ۱۵] و مقاله‌ی [۴] مراجعه کنید. برای حالت نامتناهی می‌توان گروه تارسکی مانستر[۱۳] را در نظر گرفت. تعریف این گروه را می‌توان در [۱۳] یافت.*

در واقع تجزیه‌پذیری برای یک گروه معادل با این است که گراف دوگان ماکسیمال آن پوچ نباشد. حال در ادامه به بررسی همبندی و قطر گراف دوگان ماکسیمال می‌پردازیم.

[۱۳] Tarski Monster

قضیه ۱۴. [قضیه ۱ ، [۱]] *فرض کنید G یک گروه باشد به طوری‌که* $\delta(\Gamma(G)) \geq 1$. *در این صورت* $\operatorname{diam}(\Gamma(G)) \leq 3$.

قضیه ۱۵. *فرض کنید G یک گروه متناهی باشد. در این صورت* $\operatorname{diam}(\Gamma(G)) = 2$ *اگر و فقط اگر G یکی از حالات زیر باشد:*

الف) $\mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_q$.[14]

ب) p-*گروه آبلی مقدماتی به جز حالت* $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$.

اثبات. ابتدا فرض کنید $\operatorname{diam}(\Gamma(G)) = 2$. فرض کنید p کوچک‌ترین عدد اول باشد که $|G|$ را عاد می‌کند. اگر عدد اول q متمایز با p وجود داشت که $|G|$ را عاد کند در این صورت زیرگروه H و K از مرتبه‌ی p و q وجود دارند. دو حالت داریم:

حالت اول: فرض کنید $G = HK$. در این صورت G یک گروه از مرتبه‌ی pq است. بنا به رده‌بندی گروه‌های از مرتبه‌ی pq یا $G = \mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_q$ یا $G = \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_q$. دقت کنید که $\Gamma(\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_q) = K_2$.

حالت دوم: فرض کنید $G \neq HK$. در این صورت ادعا می‌کنیم که G یک p-گروه است. فرض کنید L یک زیرگروه باشد که $G = HL = KL$. در این صورت داریم $[G : L] = p$. دقت کنید چون p کوچک‌ترین عدد اول است، داریم $L \trianglelefteq G$. بنابراین $H \cong K$ که غیرممکن است پس G یک p-گروه است و ادعا ثابت می‌شود. حال با توجه به قضیه‌ی ۳، G یک گروه آبلی مقدماتی است.

عکس قضیه واضح است. $\square$

حال به دنبال رده‌بندی کردن گروه‌هایی هستیم که گراف دوگان ماکسیمال زیرگروه آن‌ها کامل هستند. ابتدا حکمی را در مورد گروه‌های آبلی نشان می‌دهیم.

قضیه ۱۶. *فرض کنید G یک گروه آبلی بوده به طوری که* $\delta(\Gamma(G)) \geq 1$. *آن‌گاه موارد زیر با هم معادل هستند:*

الف) *راسی متصل به همه‌ی رئوس وجود دارد.*

ب) $G = \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_q$.

ج) $\Gamma(G)$ *گراف کامل است.*

اثبات. (ب)$\Rightarrow$(الف). فرض کنید H راسی باشد که به همه‌ی رئوس متصل است. واضح است که H باید زیرگروه ماکسیمال و زیرگروه ساده باشد، پس H یک زیرگروه دوری مرتبه‌ی اول است که ماکسیمال نیز است. حال نشان می‌دهیم که هر زیرگروه سره از G، هم ماکسیمال و هم زیرگروه ساده است. فرض کنید L یک زیرگروه از G باشد. چون $G = HL$، پس داریم $G/H \cong L$. از آن‌جایی که H، هم زیرگروه ساده و هم زیرگروه ماکسیمال است لذا L نیز هم زیرگروه ساده و هم زیرگروه ماکسیمال است. حال ادعا می‌کنیم که G تاب‌دار [15] است، زیرا فرض کنید g عضوی خالی از تاب [16] از G باشد. در این صورت زیرگروه‌های نابدیهی $\langle g^2 \rangle \subsetneq \langle g \rangle$ را در نظر بگیرید. بنابراین $\langle g^2 \rangle$ در G ماکسیمال نیست که این تناقض است پس G تابدار است و ادعا ثابت می‌شود. اگر G یک p-گروه باشد، آن‌گاه دو عضو مرتبه‌ی p را در نظر بگیرید. چون این دو عضو باید به هم وصل باشند، پس $|G| = p^2$ که به راحتی می‌توان نتیجه گرفت $G = \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ پس می‌توان فرض کرد که عضوهایی از مرتبه‌ی p و q موجودند بنابراین $G = \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_q$.

(ب)$\Rightarrow$(ج) و (ج)$\Rightarrow$(الف) واضح هستند. $\square$

تذکر ۱۷. *در قضیه‌ی قبل شرط آبلی را نمی‌توان حذف کرد. فرض کنید $G = S_3$. در این صورت راس $\langle(123)\rangle$ به بقیه‌ی رئوس متصل است در حالی که گراف دوگان ماکسیمال آن کامل نیست.*

قضیه ۱۸. *فرض کنید G یک گروه باشد. در این صورت $\Gamma(G)$ گراف کامل است اگر و فقط اگر* $G = \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_q$.

اثبات. فرض کنید $\Gamma(G)$ گراف کامل باشد. همانند استدلال قضیه‌ی قبل G بی‌تاب نیست، لذا G تاب‌دار است. حال فرض کنید $\langle g_1 \rangle$ و $\langle g_2 \rangle$ دو زیرگروه با مرتبه‌های p و q باشند که در آن p و q دو عدد متمایز اول هستند. چون $\Gamma(G)$ گراف کامل است، لذا بنا به رده‌بندی گروه‌های از مرتبه‌ی pq، داریم $G \in \{\mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_q, \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_q\}$. اگر $G = \mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_q$، آن‌گاه دو زیرگروه وجود دارند که به هم متصل نیستند. بنابراین $G = \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_q$. عکس قضیه واضح است. $\square$

تذکر ۱۹. *به راحتی می‌توان دید که* $\Gamma(\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_q) = K_2$ *و* $\Gamma(\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p) = K_{p+1}$.

در قضیه‌ی بعد، عدد خوشه‌ای و عدد رنگی راسی را برای گروه آبلی با تولید متناهی به دست می‌آوریم.

قضیه ۲۰. *اگر G یک گروه آبلی با تولید متناهی باشد، آن‌گاه* $\omega(\Gamma(G)) = \chi(\Gamma(G)) = |\operatorname{Max}(G)|$.

اثبات. اگر G شامل نامتناهی زیرگروه ماکسیمال باشد، آن‌گاه $\omega(\Gamma(G)) = \chi(\Gamma(G)) = \infty$. پس می‌توان فرض کرد که $|\operatorname{Max}(G)| < \infty$. زیرگراف القایی راسی را روی رئوس $\operatorname{Max}(G)$

[14] برای دیدن تعریف ضرب نیم‌مستقیم می‌توانید به صفحه‌ی ۲۱۲ از مرجع [۱۴] مراجعه کنید.

[15] torsion

[16] torsion free

در نظر بگیرید. واضح است که این مجموعه تشکیل خوشه می‌دهد از این رو $|\mathrm{Max}(G)| \le \omega(\Gamma(G)) \le \chi(\Gamma(G))$. حال یک رنگ‌آمیزی سره برای $\Gamma(G)$ ارائه می‌دهیم. حال به هر کدام از اعضای $\mathrm{Max}(G)$ یک رنگ می‌دهیم. چون G متناهی مولد است، لذا هر زیرگروه درون یک زیرگروه ماکسیمال G قرار می‌گیرد. به هر زیرگروه رنگ یک زیرگروه ماکسیمال دربردارنده‌ی آن را نسبت می‌دهیم. توجه داشته باشید که طبق اصل انتخاب این کار امکان‌پذیر است. حال نشان می‌دهیم که این رنگ‌آمیزی سره است. فرض کنید $LK = G$. اگر L و K هم‌رنگ باشند، آن‌گاه L و K درون یک ماکسیمال هستند که با $LK = G$ در تناقض است. □

مراجع

[1] S. Akbari, R. Nikandish, B. Miraftab, Co-Maximal Graphs of Subgroups of Groups, Submitted.

[2] N.V. Baeva, Completely Factorizable Groups, Dokl. Akad. Nauk SSSR 92 (1953) 877-880.

[3] A. Ballester-Bolinches, Xiuyun Guo, On Complemented Subgroups of Finite Groups, Arch. Math. (Basel) 72 (3) (1999) 161-166.

[4] M. Blaum, Factorization of the Simple Groups $PSL(3, q)$ and $PSU(3, q^2)$, Arch. Math. (Basel) Vol40, (1983) 8-13.

[5] G. Calugareanu, S. Breaz, C. Modoi, C. Pelea, D. Valcan, Excercises in Abelian Group Theory, Kluwer Academic Publishers, 2003.

[6] N. V. Chernikova, Groups with Complemented Subgroups, Mat. Sb. 39 (1956) 237-292.

[7] N. V. Chernikova, Groups with System of Complemented Subgroups, Dokl. Akad. Nank SSSR92 (1953) 877-880(Russian)

[8] V. Dlab, The Frattini Subgroup of Abelian Groups, Czechoslovak Math. J. 10, No1, (1960) 1-16.

[9] L. Fuchs, Infinite Abelian Groups I, Pure and Applied Mathematics Vol. 36, 1970.

[10] P. Hall, Complemented Groups, J. London Math. Soc. 12 (1937), 201-204.

[11] T. W. Hungerford, Algebra, Springer-Verlag, New York, 1974.

[12] L. C. Kappe, J. Kirtland, Supplementation in Groups, Glasgow Math. J. 42 (2000) 3750.

[13] A. Yu. Ol'shanskii, A Geometry of Defining in Relation Groups, (Kluwer, Boston, 1991).

[14] W. R. Scott, Group Theory, Dover Publications, Inc., New York, 1987.

[15] M. Suzuki, Group Theory I, Springer-Verlag, Berlin, 1982.

[16] B. Zelinka, Intersection Groups of Finite Abelian Groups, Czechoslovak Math. J. 25 (2) (1975) 171-174.

[17] R. Shen, Intersection Groups of Subgroups of Finite Groups, Czechoslovak Math. J. 60 (135) (2010) 945-950.

[18] M. L. Lewis, A Solvable Group Whose Character Degree Graphs has Diameter 3, Proceeding of the American Mathematical Society, Vol 131, No. 3 (2002) 625-630.

قضیه‌ی وینوگرادوف

میلاد برزگر

با توجه به پیشرفت‌های اخیر در نظریه‌ی تحلیلی اعداد، بر آن شدیم مقاله‌ای در این شاخه در مجله داشته باشیم.

۱ مقدمه

گلدباخ در سال ۱۷۴۲ در نامه‌ای به لئونارد اویلر حدس زیر را مطرح کرد:

> هر عدد صحیح بزرگ‌تر از ۵ را می‌توان به صورت مجموع سه عدد اول نوشت.

اویلر در پاسخ صورت معادلی از این مسئله را مطرح که امروزه با نام «حدس قوی گلدباخ» شناخته می‌شود:

> هر عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ را می‌توان به صورت مجموع دو عدد اول نوشت.

توجه کنید که اگر $2n+2$ را بتوان به صورت مجموع سه عدد اول نوشت، یکی از آن‌ها باید زوج و در نتیجه برابر ۲ باشد. با حذف ۲ از طرفین نتیجه می‌شود $2n$ را می‌توان به صورت مجموع دو عدد اول نوشت. همچنین اگر $2n = p+q$، که p و q اعداد اول هستند، آن‌گاه می‌توان نوشت $2n+3 = p+q+3$ و $2n+2 = p+q+2$. بنابراین دو مسئله‌ی مطرح شده در بالا با هم معادل هستند. حدس قوی گلدباخ تاکنون حل نشده است. اما درستی آن به کمک الگوریتم های کامپیوتری برای $n \leq 1.605 \times 10^{18}$ بررسی شده است. همچنین پیشرفت زیادی در راه‌حل این مسئله حاصل نشده است.

اگر $2n = p+q$ باشد که p و q اعداد اول هستند، p و q باید هر دو فرد باشند (چون در غیر این صورت n باید مساوی ۲ باشد). بنابراین $2n+3 = p+q+3$. این نتیجه می‌دهد اگر حدس قوی گلدباخ درست باشد، آن‌گاه

> هر عدد فرد بزرگ‌تر از ۷ را می‌توان به صورت مجموع سه عدد اول فرد نوشت.

مسأله فوق «حدس ضعیف گلدباخ» نامبده می‌شود. این مسئله نیز حل نشده است، اما برخلاف صورت قوی حدس گلدباخ پیشرفت‌های زیادی در جهت اثبات آن حاصل شده و ما هم‌اکنون به اثبات آن نزدیک هستیم.

هاردی و لیتلوود در سال ۱۹۲۳، با فرض درستی حدس قوی ریمان (همه‌ی صفرهای غیربدیهی تابع L دیریکله روی خط $Re(z) = \frac{1}{2}$ قرار دارند)، و با به کارگیری Circle method (که در این مقاله این روش را توضیح می‌دهیم) ثابت کردند حدس ضعیف گلدباخ برای اعداد صحیح «به اندازه کافی بزرگ» درست است. لیتلوود نشان داد «به اندازه کافی بزرگ» یعنی برای اعداد بیش‌تر از 10^{50}. وینوگرادوف[1] در سال ۱۹۳۷ با ایجاد تغییراتی در روش هاردی و لیتلوود و به کارگیری حکمی از نظریه اعداد در مورد اعداد اول (Siegel–Walfisz theorem) موفق شد بدون استفاده از فرضیه‌ی ریمان، حدس ضعیف گلدباخ را برای اعداد «به اندازه کافی بزرگ» ثابت کند. وینوگرادوف در مقاله‌ی خود معنی «به اندازه کافی بزرگ» را مشخص نکرد، اما بیان داشت که می‌توان روش او را دقیق‌تر کرد و کران موردنظر را مشخص کرد. در سال ۱۹۳۹ شاگرد وینوگرادوف به نام بوروزدین[2] با دقیق‌سازی روش وینوگرادوف کران $10^{7\times10^{6}} \approx 3^{3^{15}}$ را به دست آورد. امروزه این کران تا $e^{3100} \approx 2\times10^{1346}$ کاهش یافته است. اما این عدد برای بررسی‌های کامپیوتری بسیار بزرگ است (کامپیوترها موفق به چک کردن حدس تا 10^{18} شده‌اند) و بنابراین این صورت از حدس ریمان نیز حل نشده باقی مانده است.

هدف ما در این‌جا اثبات «قضیه‌ی وینوگرادوف» است. روشی که ارائه می‌دهیم، روش خود وینوگرادوف برای اثبات این قضیه است. فرض کنید $\mathbb{P}$ مجموعه‌ی اعداد طبیعی اول باشد. تابع شمارنده‌ی تعداد روش‌های نوشتن عدد صحیح N به صورت مجموع سه عدد اول این‌گونه تعریف می‌شود.

$$r(N) = \sum_{\substack{p_1+p_2+p_3=N \\ p_1,p_2,p_3\in\mathbb{P}}} 1$$

قضیه‌ی وینوگرادوف یک فرمول مجانبی برای $r(N)$ بدست می‌دهد که به راحتی از آن نتیجه می‌شود برای Nهای فرد به اندازه کافی بزرگ $r(N) > 0$ و به این ترتیب حدس ضعیف گلدباخ برای اعداد به اندازه کافی بزرگ اثبات می‌شود.

قضیه ۱. *(قضیه‌ی وینوگرادوف): تابع حسابی $G(N)$ و اعداد مثبت c_1 و c_2 موجودند به طوری که*

i) برای هر N فرد: $c_1 < G(N) < c_2$

[1] Ivan Matveevich Vinogradov
[2] Borozdin

ii) برای N فرد به اندازه کافی بزرگ:
$$r(N)=G(N)\frac{N^{2}}{2(\log N)^{3}}\Big(1+O\big(\frac{\log\log N}{\log N}\big)\Big)$$
که $G(N)$ سری تکین ($singular\ series$) برای حدس ضعیف گلدباخ نامیده می‌شود.

اگر قضیه‌ی فوق اثبات شود، از (i) نتیجه می‌شود $G(N)$ صفر نیست و کران‌دار است. همچنین بقیه‌ی جملات در سمت راست تساوی (ii) وقتی N بزرگ است، مثبت بوده و در نتیجه $r(N)>0$.

۲ سری تکین ($(G(N))$)

این تابع به طور طبیعی در محاسبات ما ظاهر خواهد شد. اما برای راحتی آن را در این‌جا معرفی می‌کنیم و خواص آن را مورد برررسی قرار می‌دهیم. فرض کنید $q\in\mathbb{N}$ و $N\in\mathbb{Z}$، جمع رامانوجان [۳] به صورت زیر تعریف می‌شود
$$C_q(N)=\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q} e\big(\frac{aN}{q}\big)$$
که در آن $e(x)=e^{2\pi ix}$ است.

با توجه به تعریف فوق سری تکین این‌گونه محاسبه می‌شود
$$G(N)=\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\mu(q)C_q(N)}{\phi(q)^{3}}$$

لم ۲. *فرض کنید f یک تابع ضربی [۴] باشد. اگر*
$$\lim_{p^k\to 0} f(p^k)=0$$
که p^k بین تمام توان‌های اعداد اول تغییر می‌کند. در این صورت
$$\lim_{n\to\infty} f(n)=0$$
.

اثبات. از فرض نتیجه می‌شود متناهی توان عدد اول p^k موجود است که $|f(p^k)|\geq 1$. قرار می‌دهیم:
$$A=\prod_{|f(p^k)|\geq 1}|f(p^k)|\quad\Rightarrow A\geq 1$$
فرض کنید $0<\epsilon<A$. در این صورت متناهی عدد اول p^k موجود است که $|f(p^k)|\geq\epsilon/A$. بنابراین متناهی عدد صحیح n موجود است که به ازای هر p^k که $p^k|n$ و $p\in\mathbb{P}$ داشته باشیم
$$|f(p^k)|\geq\epsilon/A$$

[۳] Ramanujan's sum
[۴] $(a,b)=1\Rightarrow f(ab)=f(a)f(b)$

در نتیجه اگر n به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد، $p\in\mathbb{P}$ و $k\in\mathbb{N}$ موجود است که $|f(p^k)|<\epsilon/A$. در نتیجه می‌توان نوشت
$$n=\prod_{i=1}^{r}p_i^{k_i}.\prod_{i=r+1}^{r+s}p_i^{k_i}.\prod_{i=r+s+1}^{r+s+t}p_i^{k_i}$$
که $p_1,\ldots,p_{r+s+t}$ اعداد اول متمایزاند و داریم
$$\begin{aligned}&1\leq|f(p_i^{k_i})| &&;\ i=1,2,\ldots,r\\ &\epsilon/A\leq|f(p_i^{k_i})|<1 &&;\ i=r+1,r+2,\ldots,r+s\\ &|f(p_i^{k_i})|<\epsilon/A &&;\ i=r+s+1,\ldots,r+s+t\end{aligned}$$
و $t\geq 1$ می‌باشد. در نتیجه
$$|f(n)|=\prod_{i=1}^{r}p_i^{k_i}.\prod_{i=r+1}^{r+s}p_i^{k_i}.\prod_{i=r+s+1}^{r+s+t}p_i^{k_i}<A(\epsilon/A)^{t}\leq\epsilon$$
این اثبات را کامل می‌کند. □

قضیه ۳. *$G(N)$ به طور مطلق و یکنواخت همگرا است و ضرب اویلری آن به صورت زیر است*
$$G(N)=\prod_{p}\Big(1+\frac{1}{(p-1)^{3}}\Big).\prod_{p/N}\Big(1+\frac{1}{p^{2}-3p+3}\Big);p\in\mathbb{P}$$
همچنین اعداد مثبت c_1 و c_2 موجودند که برای Nهای فرد $c_1<G(N)<c_2$ باشد. و برای هر $\epsilon>0$ داریم
$$G(N,Q):=\sum_{q\leq Q}\frac{\mu(q)C_q(N)}{\phi(q)^{3}}=G(N)+O(Q^{-(1-\epsilon)})$$
که ثابت موردنیاز (برای O) فقط به ϵ وابسته است.

اثبات. برای هر عدد اول p داریم $\frac{p}{p-1}\leq 2$. در نتیجه داریم
$$\begin{aligned}\frac{p^{m(1-\epsilon)}}{\phi(p^m)}&=\frac{p^{m(1-\epsilon)}}{p^{m-1}(p-1)}\\ &=\frac{p}{p-1}.\frac{p^{m(1-\epsilon)}}{p^{m}}\leq\frac{2}{p^{m\epsilon}}\\ \Rightarrow\lim_{p^m\to\infty}&\frac{p^{m(1-\epsilon)}}{\phi(p^m)}=0\end{aligned}$$
قرار می‌دهیم $f(n)=\frac{n^{(1-\epsilon)}}{\phi(n)}$. مشخص است که f ضربی است. در نتیجه طبق لم ۱ داریم
$$\lim_{n\to\infty}f(n)=0$$
این نتیجه می‌دهد برای qهای به اندازه کافی بزرگ $\phi(q)\geq q^{1-\epsilon}$. داریم
$$\Big|\frac{\mu(q)C_q(N)}{\phi(q)^{3}}\Big|=\frac{|C_q(N)|}{\phi(q)^{3}}\leq\frac{\phi(q)}{\phi(q)^{3}}=\frac{1}{\phi(q)^{2}}\ll\frac{1}{q^{2-\epsilon}}$$

در نتیجه $G(N)$ به طور مطلق و یکنواخت همگرا است. همچنین نتیجه می‌شود

$$G(N)-G(N,Q) \ll \sum_{q>Q}\frac{1}{\phi(q)^{2}} \ll \sum_{q>Q}\frac{1}{q^{2-\epsilon}} \ll \frac{1}{Q^{1-\epsilon}}$$
$$\Rightarrow G(N,Q)=G(N)+O(Q^{-(1-\epsilon)})$$

$C_q(N)$ یک تابع ضربی از q است. برای اثبات این مطلب فرض کنید q و q' دو عدد نسبت به هم اول باشند. در این صورت هر کلاس از اعداد نسبت به qq' اول را می‌توان به صورت یکتا به شکل $aq'+a'q$ نوشت که $1<a<q$ و $1<a'<q'$ و $(a,q)=(a',q')=1$. با توجه به این نکته، داریم

$$\begin{aligned}
c_q(N)c_{q'}(N) &= \sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q} e(aN/q).\sum_{\substack{a'=1\\(a',q')=1}}^{q'} e(a'N/q')\\
&= \sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q}\sum_{\substack{a'=1\\(a',q')=1}}^{q'} e\Big(\frac{(aq'+a'q)}{qq'}N\Big)\\
&= \sum_{\substack{a''=1\\(a'',qq')=1}}^{qq'} e(a''N/qq') = c_{qq'}(N)\\
&\Rightarrow c_q(N)c_{q'}(N) = c_{qq'}(N)
\end{aligned}$$

که نتیجه می‌دهد $\frac{\mu(q)c_q(N)}{\phi(q)^2}$ نسبت به q ضربی است.

همچنین اگر p اول باشد $c_p(N)=\begin{cases} p-1 & p|N \\ -1 & p\nmid N\end{cases}$ و برای $i\geq 2$ داریم $\mu(p^i)=0$. در نتیجه داریم

$$\begin{aligned}
G(N) &= \prod\Big(1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\mu(p^i)c_{p^i}(N)}{\phi(p^i)^{2}}\Big) = \prod_p\Big(1-\frac{c_p(N)}{\phi(p)^{2}}\Big)\\
&= \prod_{p\nmid N}\Big(1+\frac{1}{(p-1)^{3}}\Big).\prod_{p|N}\Big(1-\frac{1}{(p-1)^{2}}\Big)\\
&= \prod_{p}\Big(1+\frac{1}{(p-1)^{3}}\Big).\prod_{p|N}\Big(1-\frac{1}{p^{2}-3p+3}\Big)
\end{aligned}$$

داریم:

$$\begin{aligned}
1 &\leq \prod_p\Big(1+\frac{1}{(p-1)^{3}}\Big)\\
&\leq \prod_p\Big(1+\frac{1}{p-1}\Big) = \prod_p\frac{p}{p-1} = \zeta(2)\\
\frac{1}{2\zeta(2)} &= \prod_{p\neq 2}\Big(1-\frac{1}{p}\Big) \leq \prod_p\Big(1-\frac{1}{p-1}\Big)\\
&\leq \prod_p\Big(1-\frac{1}{p-1}\Big)\Big(1+\frac{1}{p-1}\Big)\\
&= \prod_p\Big(1-\frac{1}{(p-1)^{2}}\Big) \leq 1
\end{aligned}$$

این وجود c_2 و c_1 را نتیجه می‌هد. □

۳ Circle Method

منشأ این روش مقاله‌ای از هاردی و رامانوجان است که در سال ۱۹۱۸ منتشر شد و در مورد تعداد روش‌های نوشتن یک عدد طبیعی به صورت مجموعی از اعداد طبیعی بحث می‌کرد. در سال ۱۹۲۰ هاردی و لیتلوود در مجموعه‌ای از مقالات با عنوان 'Some problems of 'partitio numerorum روش Circle method را به طور جدی معرفی کردند و آن را برای بررسی مسائل گوناگون به کار بستند. مقالات شماره III و V از این سری به بررسی حدس گلدباخ پرداخته است. ما در این‌جا به طور خلاصه این روش را معرفی می‌کنیم

فرض کنید A مجموعه‌ای دلخواه از اعداد طبیعی باشد. تابع مولد A به این صورت است

$$f(z)=\sum_{a\in A} z^a$$

و فرض می‌کنیم $|z|<1$ تا همگرایی برآورده شود و قرار می‌دهیم

$$r_{A,S}(N)=\#\{(a_1,\dots,a_s)\in A^s | a_1+\cdots+a_s=N\}$$

در این صورت داریم $f(z)^s=\sum_{N=0}^{\infty} r_{A,S}(N)z^N$ و با کمک قضیه کوشی می‌توان $r_{A,S}(N)$ را این‌گونه محاسبه کرد

$$r_{A,S}(N)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho}\frac{f(z)^s}{z^{N+1}}\,\mathrm{d}z \quad ;\rho\in(0,1)$$

این شکل اصلی circle method است که توسط هاردی و لیتلوود ارائه شد. اما قسمت سخت کار تقریب زدن انتگرال فوق است که هاردی و لیتلوود برای این کار، دامنه انتگرال ($|z|=\rho$) را به دو زیرمجموعه‌ی «کمان‌های بزرگ» (major arcs) و «کمان‌های کوچک» (minor arcs) تقسیم کردند (طوری که بتوان تقریب‌های

مناسب را اعمال کرد) و محاسبات لازم را انجام دادند. اما همان طور که در مقدمه اشاره شد این روش برای حل «قضیه سه اول» (هر عدد فرد بزرگ را می‌توان به صورت مجموع سه عدد اول نوشت) کارساز نبود. کاری که وینوگرادوف برای سادگی کار انجام داد از قرار زیر است:

فرض کنید بخواهیم $r_{A,S}(N)$ را مورد بررسی قرار دهیم. توابع زیر را در نظر می‌گیریم

$$F(\alpha) = \sum_{\substack{a\in A\\ a\leq N}} e(a\alpha) \Rightarrow F(\alpha)^s = \sum_{m=۰}^{sN} r_{A,S}^{(N)}(m)e(m\alpha)$$

که $r_{A,S}^{(N)}(m)$ تعداد روش‌های نوشتن m به صورت مجموعی از اعضای کمتر از N مجموعه‌ی A است. در این صورت به وضوح داریم $r_{A,S}^{(N)}(N) = r_{A,S}(N)$. همچنین داریم

$$\int_۰^۱ e(m\alpha)e(-n\alpha) = \begin{cases} ۱ & m = n \\ ۰ & m \neq n \end{cases}$$

در نتیجه می‌توان $r_{A,S}(N)$ را این‌گونه محاسبه کرد

$$r_{A,S}(N) = \int_۰^۱ F(\alpha)^s e(-n\alpha)\, \mathrm{d}\alpha$$

ایده‌ی دیگر که در محاسبات وینوگرادوف وجود دارد، این است که او به جای $r(N)$، روش فوق را برای تقریب زدن تابع $R(N) = \sum_{p_۱+p_۲+p_۳=N} \log p_۱ \log p_۲ \log p_۳$ به کار می‌گیرد و از این تقریب، به راحتی قضیه‌ی ۱ در مورد $r(N)$ نتیجه می‌شود. در واقع داریم:

$$F(\alpha) = \sum_{p\leq N} \log p . e(p\alpha) \Rightarrow R(N) = \int_۰^۱ F(\alpha)^۳ e(-N\alpha)\, \mathrm{d}\alpha \tag{۱}$$

۴ تجزیه به major arcs و minor arcs

همان‌گونه که در بالا اشاره شد، بازه‌ی $[۰,۱]$ را به دو مجموعه‌ی M (کمان‌های بزرگ) و m (کمان‌های کوچک) افراز می کنیم. یک $B > ۰$ در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم $Q = (\log N)^B$. برای $1 \leq q \leq Q$ و $۰ \leq a \leq q$ که $(a,q) = ۱$ تعریف می‌کنیم

$$M(q,a) = \{\alpha \in [۰,۱] : |\alpha - \frac{a}{q}| \leq Q/N\}$$

اگر $a/q \neq a'/q'$ باشد، آن‌گاه $|aq' - a'q| \geq ۱$ و در نتیجه داریم

$$\begin{aligned}\alpha \in M(q,a) \cap M(q',a') \Rightarrow \frac{۱}{Q^۲} \leq & \frac{۱}{qq'} \\ \leq & \frac{|aq' - a'q|}{qq} = \Big|\frac{a}{q} - \frac{a'}{q'}\Big| \\ \leq & \Big|\frac{a}{q} - \alpha\Big| + \Big|\alpha - \frac{a'}{q'}\Big| \\ \leq & \frac{۲Q}{N} \\ \Rightarrow N \leq ۲Q^۳ = & ۲(\log N)^{۳B}\end{aligned}$$

که برای Nهای بزرگ برقرار نیست. بنابراین وقتی N به اندازه کافی بزرگ است، $M(q,a)$ها دو به دو متمایز هستند. مجموعه‌ی M را این‌گونه تعریف می‌کنیم

$$M := \bigcup_{q=۱}^{Q} \bigcup_{\substack{Q=۰\\(Q,q)=۱}}^{q} M(q,a) \subseteq [۰,۱]$$

و همچنین $m := [۰,۱] \backslash M$.

در نتیجه می‌توانیم رابطه‌ی ۱ را به این صورت بنویسیم

$$R(N) = \int_M F(\alpha)^۳ e(-N\alpha)\, \mathrm{d}\alpha + \int_m F(\alpha)^۳ e(-N\alpha)\, \mathrm{d}\alpha$$

در ادامه به محاسبه‌ی دو انتگرال فوق می‌پردازیم.

۵ محاسبه‌ی انتگرال روی M

لم ۴. *فرض کنید* $u(\beta) = \sum_{m=۱}^N e(m\beta)$. *در این صورت داریم*

$$J(N) := \int_{-\frac{۱}{۲}}^{\frac{۱}{۲}} u(\beta)^۳ e(-N\beta)\, \mathrm{d}\beta = \frac{N^۲}{۲} + O(N)$$

اثبات. طبق آن‌چه در بخش ۳ گفتیم، تعداد راه‌های نوشتن N به صورت مجموع سه عدد طبیعی برابر است با $J(N)$ (که در صورت لم تعریف شده است). از طرفی از ترکیبیات می‌دانیم تعداد راه‌های نوشتن N به صورت مجموع سه عدد طبیعی برابر است با $\binom{N-۱}{۲}$. در نتیجه

$$J(N) = \binom{N-۱}{۲} = \frac{N^۲}{۲} + O(N)$$

اثبات لم به پایان رسید. □

لم ۵. $c_q(n) = \sum_{d|(q,n)} \mu(q/d)d$. *این نتیجه می‌دهد که اگر* $(q,n) = ۱$ *آنگاه* $c_q(n) = \mu(q)$

اثبات. ابتدا توجه کنید که داریم

$$f_d(n) := \sum_{l=۱}^{d} e(\frac{ln}{d}) = \begin{cases} d & d|n \\ ۰ & d \nmid n \end{cases}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}
c_q(n) &= \sum_{\substack{k=1\\(k,q)=1}}^{q} e\big(\frac{kn}{q}\big) = \sum_{k=1}^{q} e\big(\frac{kn}{q}\big) \sum_{d|(k,q)} \mu(d)\\
&= \sum_{d|q} \mu(d) \sum_{\substack{k=1\\d|k}}^{q} e\big(\frac{kn}{q}\big)\\
&= \sum_{d|q} \mu(d) \sum_{l=1}^{q/d} e\big(\frac{ln}{q/d}\big)\\
&= \sum_{d|q} \mu(d) f_{q/d}(n) = \sum_{d|q} \mu(q/d) f_d(n)\\
&= \sum_{\substack{d|q\\d|n}} \mu(q/d) d = \sum_{d|(n,q)} \mu(q/d) d
\end{aligned}$$

□

لم ۶. *برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ و $N_1, N_2 \in \mathbb{Z}$ با شرط $N_1 < N_2$، داریم*

$$\sum_{n=N_1+1}^{N_2} e(\alpha n) \ll \min(N_2 - N_1, \|\alpha\|^{-1})$$

که $\|\alpha\|$ یعنی فاصله‌ی α از نزدیک‌ترین عدد صحیح به آن.

اثبات.

$$\forall n \in \mathbb{Z} : |e(n\alpha)| = 1 \Rightarrow \Big| \sum_{n=N_1+1}^{N_2} e(\alpha N) \Big| \leq \sum_{n=N_1+1}^{N_2} 1 = N_2 - N_1$$

اگر α صحیح باشد حکم واضح است. اگر α صحیح نباشد، آن‌گاه $\|\alpha\| > 0$ و $e(n\alpha) \neq 1$. با توجه به نکات داریم

$$\begin{aligned}
\Big| \sum_{n=N_1+1}^{N_2} e(\alpha n) \Big| &= \Big| e(\alpha(N_1+1)) \sum_{n=0}^{N_2-N_1-1} e(\alpha)^n \Big|\\
&= \Big| \frac{e(\alpha(N_2-N_1)) - 1}{e(\alpha) - 1} \Big| \leq \frac{2}{|e(\alpha) - 1|}\\
&= \frac{2}{|e(\alpha/2) - e(-\alpha/2)|} = \frac{2}{|2i \sin \pi\alpha|}\\
&= \frac{1}{|\sin \pi\alpha|} = \frac{1}{\sin \pi \|\alpha\|} \leq \frac{1}{2\|\alpha\|}
\end{aligned}$$

در نابرابری آخر از این استفاده کردیم که

$$0 < \alpha < \frac{1}{2} \Rightarrow 2\alpha < \sin \pi\alpha < \pi\alpha$$

(این حکم به راحتی از مشتق‌گیری به دست می‌آید و ما از آوردن اثبات خودداری می‌کنیم). این اثبات حکم را کامل می‌کند. □

در اثبات لم بعدی از قضیه‌ی Siegel-Walfisz در مورد چگالی اعداد اول در یک تصاعد حسابی استفاده خواهیم کرد. اثبات این قضیه را در این‌جا ارائه نمی دهیم. اثباتی از این قضیه در کتاب Davenport ارائه شده است

قضیه ۷. (*Siegel-Walfisz*)*: اگر $q \geq 1$ و $(a,q) = 1$، آن‌گاه برای هر $C > 0$، رابطه‌ی زیر برای $x \geq 2$ برقرار است.*

$$\theta(x,q,a) := \sum_{\substack{p \leq x\\ p \equiv a (\mathrm{mod}\ q)}} \log p = \frac{z}{\phi(q)} + O\big(\frac{x}{(\log x)^C}\big)$$

که ثابت موردنیاز (برای O) فقط به C وابسته است.

لم ۸. *تعریف می‌کنیم $F_x(\alpha) := \sum_{p \leq x} \log p.e(p\alpha)$. همچنین $C > 0$. در این صورت برای $1 \leq q \leq Q$ و $1 \leq a \leq q$ که $(q,a) = 1$ و $1 \leq x \leq N$ داریم*

$$F_x(a/q) = \frac{\mu(q)}{\phi(q)} x + O\Big(\frac{QN}{(\log N)^C}\Big)$$

که ثابت موردنیاز فقط به B و C بستگی دارد (توجه کنید که قبلا تعریف کرده‌ایم $Q = (\log N)^B$)

اثبات. ابتدا توجه کنید که برای p اول، اگر $p \equiv r (\mathrm{mod}\ q)$ آن‌گاه $(r,q) \neq 1 \iff p|q$. همچنین داریم

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{r=1\\(r,q)\neq 1}}^{q} \sum_{\substack{p \leq x\\ p \equiv r\ (q)}} \log p.e(pa/q) &= \sum_{\substack{p \leq x\\ p|q}} \log p.e(pa/q)\\
&\ll \sum_{p|q} \log p \leq \log q
\end{aligned}$$

از نکات بالا نتیجه می‌شود

$$
\begin{aligned}
F_x(a/q) &= \sum_{r=1}^{q} \sum_{\substack{p\le x\\ p\equiv r\ (q)}} \log p . e(pa/q) \\
&= \sum_{\substack{r=1\\ (r,q)=1}}^{q} \sum_{\substack{p\le x\\ p\equiv r\ (q)}} \log p . e(pa/q) + O(\log q) \\
&= \sum_{\substack{r=1\\ (r,q)=1}}^{q} e(ra/q) \sum_{\substack{p\le x\\ p\equiv r\ (q)}} \log p + O(\log Q) \\
&= \sum_{\substack{r=1\\ (r,q)=1}}^{q} e(ra/q)\theta(x,q,r) + O(\log Q) \\
&= \sum_{\substack{r=1\\ (r,q)=1}}^{q} e(ra/q)\Big(\frac{x}{\phi(q)} + O\big(\frac{x}{(\log x)^C}\big)\Big) + O(\log Q) \\
&= \frac{c_q(a)}{\phi(q)}x + O\big(\frac{qx}{(\log x)^C}\big) + O(\log Q) \\
&= \frac{\mu(q)}{\phi(q)}x + O\big(\frac{QN}{(\log N)^C}\big)
\end{aligned}
$$

در تساوی آخر از لم ۵ استفاده کردیم. □

لم ۹. *فرض کنید $B, C > 0$ و $C > 2B$. اگر $\alpha \in M(q,a)$ و $\beta = \alpha - a/q$ آن‌گاه*

$$
F(\alpha) = \frac{\mu(q)}{\phi(q)}u(\beta) + O\big(\frac{Q^2}{(\log)^C}\big)
$$

$$
F(\alpha)^3 = \frac{\mu(q)}{\phi(q)^3}u(\beta)^3 + O\big(\frac{Q^2N^3}{(\log)^C}\big)
$$

که ثابت‌های مورد نیاز فقط به B و C وابسته‌اند(باز هم فرض کردیم $Q = (\log N)^B$).

اثبات. طبق تعریف $M(q,a)$ داریم $|\beta| \le Q/N$. تعریف می‌کنیم

$$
\lambda(m) = \begin{cases} \log m & m \in \mathbb{P} \\ 0 & \# \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
F(\alpha) - \frac{\mu(q)}{\phi(q)}u(\beta) &= \sum_{p\le N} \log p . e(p\alpha) - \frac{\mu(q)}{\phi(q)}\sum_{m=1}^{N} e(m\beta) \\
&= \sum_{m=1}^{N} \lambda(m)e(m\alpha) - \frac{\mu(q)}{\phi(q)}\sum_{m=1}^{N} e(m\beta) \\
&= \sum_{m=1}^{N} \lambda(m)e(\frac{ma}{q} + m\beta) - \sum_{m=1}^{N} \frac{\mu(q)}{\phi(q)} e(m\beta) \\
&= \sum_{m=1}^{N} \Big(\lambda(m)e(\frac{ma}{q}) - \frac{\mu(q)}{\phi(q)}\Big) e(m\beta)
\end{aligned}
$$

طبق لم ۸ داریم

$$
A(x) := \sum_{1\le m\le x}^{N} \Big(\lambda(m)e(\frac{ma}{q}) - \frac{\mu(q)}{\phi(q)}\Big)
$$

$$
\begin{aligned}
A(x) :=& \sum_{1\le m\le x}^{N} \lambda(m)e(\frac{ma}{q}) - \frac{\mu(q)}{\phi(q)}x + O\big(\frac{1}{\phi(q)}\big) \\
=& F_x(\frac{a}{q}) - \frac{\mu(q)}{\phi(q)}x + O(1) = O\big(\frac{QN}{(\log N)^C}\big)
\end{aligned}
$$

در نتیجه

$$
\begin{aligned}
F(\alpha) - \frac{\mu(q)}{\phi(q)}u(\beta) =& A(N)e(n\beta) - 2\pi i\beta \int_1^N A(x)e(x\beta)\,\mathrm{d}x \\
\ll& |A(N)| + |\beta| N . \max\{A(x) : 1 \le x \le N\} \\
\ll& \frac{Q^2N}{(\log N)^C}
\end{aligned}
$$

برای قسمت بعدی لم توجه کنید که $|u(\beta)| < N$ و $C > 2B$ نتیجه می‌دهد

$$
\frac{Q^2N}{(\log N)^C} = \frac{N}{(\log N)^{C-2B}} < N
$$

این دو به راحتی از به توان ۳ رساندن طرفین تقریبی که برای $F(\alpha)$ یافتیم، حکم موردنظر را نتیجه می‌دهند. □

قضیه ۱۰. *برای $B, C, \epsilon > 0$ که $C > 2B$، داریم*

$$
\begin{aligned}
\int_M F(\alpha)^3 e(-N\alpha)\,\mathrm{d}\alpha =& G(N)\frac{N^2}{2} + O\big(\frac{N^2}{(\log N)^{(1-\epsilon)B}}\big) \\
&+ O\big(\frac{N^2}{(\log N)^{C-5B}}\big)
\end{aligned}
$$

که ثابت‌های مورد نیاز فقط به B و C و ϵ وابسته هستند.

اثبات. ابتدا توجه کنید که اگر $q = 1$، $M(q,a)$ بازه‌ای به طول $\frac{Q}{N}$ است و برای $q \ge 2$ بازه‌ای به طول $\frac{2Q}{N}$ است. با توجه به لم ۹ داریم

$$
\begin{aligned}
&\int_M \Big(F(\alpha)^3 - \frac{\mu(q)}{\phi(q)}u(\alpha - \frac{a}{q})^3\Big)e(-N\alpha)\,\mathrm{d}\alpha \\
&= \sum_{q\le Q} \sum_{\substack{a=0\\ (a,q)=1}}^{q} \int_{M(q,a)} \Big(F(\alpha)^3 - \frac{\mu(q)}{\phi(q)}u(\alpha - \frac{a}{q})^3\Big)e(-N\alpha)\,\mathrm{d}\alpha \\
&\ll \sum_{q\le Q} \sum_{\substack{a=0\\ (a,q)=1}}^{q} \int_{M(q,a)} \frac{Q^2N^3}{(\log N)^C} \ll \sum_{q\le Q} \sum_{\substack{a=0\\ (a,q)=1}}^{q} \frac{Q^3N^2}{(\log N)^C} \\
&\ll \frac{Q^5N^2}{(\log)^C} = \frac{N^2}{(\log N)^{C-5B}}
\end{aligned}
$$

اگر $\alpha = a/q + \beta \in M(q,a)$ آن‌گاه $|\beta| \le Q/N$ و داریم

$$\begin{aligned}
\sum_{q\le Q} \sum_{\substack{a=۰\\(a,q)=۱}}^{q} \frac{\mu(q)}{\phi(q)^{۳}} \int_{M(q,a)} u(\alpha - \frac{a}{q})^{۳} e(-N\alpha)\, \mathrm{d}\alpha
&= \sum_{q\le Q} \sum_{\substack{a=۱\\(a,q)=۱}}^{q} \frac{\mu(q)}{\phi(q)^{۳}} \int_{\frac{a}{q}-\frac{Q}{N}}^{\frac{a}{q}+\frac{Q}{N}} u(\alpha - \frac{a}{q})^{۳} e(-N\alpha)\, \mathrm{d}\alpha \\
&= \sum_{q\le Q} \frac{\mu(q)}{\phi(q)^{۳}} \sum_{\substack{a=۱\\(a,q)=۱}}^{q} e(-Na/q) \int_{-\frac{Q}{N}}^{\frac{Q}{N}} u(\beta)^{۳} e(-N\beta)\, \mathrm{d}\beta \\
&= \sum_{q\le Q} \frac{\mu(q) c_q(-N)}{\phi(q)^{۳}} \int_{-Q/N}^{Q/N} u(\beta)^{۳} e(-N\beta)\, \mathrm{d}\beta \\
&= G(N,Q) \int_{-\frac{Q}{N}}^{\frac{Q}{N}} u(\beta)^{۳} e(-N\beta)\, \mathrm{d}\beta
\end{aligned}$$

طبق لم ۶ اگر $\frac{۱}{۲} \le |\beta|$، آن‌گاه $u(\beta) \ll |\beta|^{-۱}$ و در نتیجه

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{Q}{N}}^{\frac{۱}{۲}} u(\beta)^{۳} e(-N\beta)\, \mathrm{d}\beta &\ll \int_{\frac{Q}{N}}^{\frac{۱}{۲}} |u(\beta)|^{۳}\, \mathrm{d}\beta \\
&\ll \int_{\frac{Q}{N}}^{\frac{۱}{۲}} \beta^{-۳}\, \mathrm{d}\beta < \frac{N^{۲}}{Q^{۲}}
\end{aligned}$$

$$\overset{\text{مشابها}}{\Longrightarrow} \int_{-\frac{۱}{۲}}^{-\frac{Q}{N}} u(\beta)^{۳} e(-N\beta)\, \mathrm{d}\beta \ll \frac{N^{۲}}{Q^{۲}}$$

طبق لم ۴ داریم

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{Q}{N}}^{\frac{Q}{N}} u(\beta)^{۳} e(-N\beta)\, \mathrm{d}\beta &= \int_{\frac{۱}{۲}}^{\frac{۱}{۲}} u(\beta)^{۳} e(-N\beta)\, \mathrm{d}\beta + O(\frac{N^{۲}}{Q^{۲}}) \\
&= \frac{N^{۲}}{Q^{۲}} + O(N) + O(\frac{N^{۲}}{Q^{۲}}) \\
&= \frac{N^{۲}}{۲} + O(\frac{N^{۲}}{Q^{۲}})
\end{aligned}$$

طبق قضیه ۳ داریم $G(N,Q) = G(N) + O(\frac{۱}{Q^{۱-\epsilon}})$. با توجه به نکات گفته شده می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}
\int_{M} F(\alpha)^{۳} e(-N\alpha)\, \mathrm{d}\alpha =& G(N,Q) \int_{-\frac{Q}{N}}^{\frac{Q}{N}} u(\beta)^{۳} e(-N\beta)\, \mathrm{d}\beta \\
&+ O(\frac{N^{۲}}{(\log N)^{C-۵B}}) \\
=& G(N) \frac{N^{۲}}{۲} + O(\frac{N^{۲}}{Q^{۱-\epsilon}}) \\
&+ O(\frac{N^{۲}}{(\log N)^{C-۵B}}) \\
=& G(N) \frac{N^{۲}}{۲} + O(\frac{N^{۲}}{(\log N)^{(۱-\epsilon)B}}) \\
&+ O(\frac{N^{۲}}{(\log N)^{C-۵B}})
\end{aligned}$$

به این ترتیب حکم مورد نظر اثبات شد. □

۶ محاسبه‌ی انتگرال روی m

قضیه ۱۱. (*Vinogradov*) *a و q اعدادی طبیعی هستند طوری که $۱ \le q \le N$ و $(a,q) = ۱$. اگر $|\alpha - a/q| \le \frac{۱}{q^{۲}}$، آن‌گاه داریم*

$$F(\alpha) \ll (\frac{N}{\sqrt{q}} + N^{\frac{۴}{۵}} + \sqrt{Nq})(\log N)^{۴}$$

قضیه ۱۱ به راحتی تقریب مورد نیاز ما را برای انتگرال روی m به دست می‌دهد. اثبات این قضیه دشوار را طی ۴ لم بعدی به دست می‌آوریم.

لم ۱۲. (*Vaughan's identity*) *برای $u \ge ۱$ تعریف می‌کنیم $M_u(k) = \sum_{d|k} \mu(d)$. فرض کنید $\phi(k,l)$ یک تابع حسابی دو متغیره باشد. در این صورت رابطه‌ی زیر برقرار است.*

$$\begin{aligned}
&\sum_{u<l\le N} \phi(۱,l) + \sum_{u<k\le N} \sum_{u<l\le \frac{N}{k}} M_u(k)\phi(k,l) \\
=& \sum_{d\le u} \sum_{u<l\le \frac{N}{d}} \sum_{m\le \frac{N}{ld}} \mu(d)\phi(dm,l)
\end{aligned}$$

اثبات. جمع زیر را به دو روش محاسبه می‌کنیم

$$S = \sum_{k=۱}^{N} \sum_{u<\le \frac{N}{K}} M_u(k)\phi(k,l)$$

$$\sum_{d|n}\mu(d)=\begin{cases}1 & n=1\\ 0 & \#\end{cases}$$
$$\Rightarrow M_u(k)=\begin{cases}1 & k=1\\ 0 & 1\le k\le u\end{cases}$$
$$\Rightarrow S=\sum_{u<l\le N}\phi(1,l)+\sum_{u<k\le N}\sum_{u<l\le \frac{N}{k}} M_u(k)\phi(k,l)$$

از طرف دیگر با تغییر متغیر $k=dm$ نتیجه می‌شود.

$$\begin{aligned}
S&=\sum_{k=1}^{N}\sum_{u<l\le\frac{N}{k}}\sum_{\substack{d|k\\ d\le u}}\mu(d)\phi(k,l)\\
&=\sum_{d\le u}\sum_{\substack{k=1\\ d|k}}^{N}\sum_{u<l\le\frac{N}{k}}\mu(d)\phi(k,l)\\
&=\sum_{d\le u}\sum_{m\le\frac{N}{d}}\sum_{u<l\le\frac{N}{dm}}\mu(d)\phi(dm,l)\\
&=\sum_{d\le u}\sum_{u<l\le\frac{N}{d}}\sum_{m\le\frac{N}{ld}}\mu(d)\phi(dm,l)
\end{aligned}$$

دو رابطه‌ی فوق حکم موردنظر را نتیجه می‌دهند. □

لم ۱۳. *فرض کنید Λ تابع منگولت باشد. در این صورت برای هر α داریم*

$$F(\alpha)=S_1-S_2-S_3+O(\sqrt{N})$$

که در آن

$$\begin{aligned}
S_1&=\sum_{d\le N^{\frac{2}{5}}}\sum_{l\le\frac{N}{d}}\sum_{m\le\frac{N}{ld}}\mu(d)\Lambda(l)e(\alpha dlm)\\
S_2&=\sum_{d\le N^{\frac{2}{5}}}\sum_{l\le N^{\frac{2}{5}}}\sum_{m\le\frac{N}{ld}}\mu(d)\Lambda(l)e(\alpha dlm)\\
S_3&=\sum_{k>N^{\frac{2}{5}}}\sum_{N^{\frac{2}{5}}<l\le\frac{N}{k}}M_{N^{\frac{2}{5}}}(k)\Lambda(l)e(\alpha kl)
\end{aligned}$$

اثبات. برای اثبات از لم ۱۲ استفاده می‌کنیم. قرار می‌دهیم $\phi(k,l)=\Lambda(l)e(\alpha kl)$ و $u=N^{\frac{2}{5}}$ جملاتی را که در لم ۱۲ ظاهر می‌شوند، محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
\sum_{u<l\le N}\phi(1,l)&=\sum_{N^{\frac{2}{5}}<l\le N}\Lambda(l)e(\alpha l)\\
&=\sum_{l=1}^{N}\Lambda(l)e(\alpha l)-\sum_{l\le N^{\frac{2}{5}}}\Lambda(l)e(\alpha l)\\
&=\sum_{p^k\le N}\log p.e(\alpha p^k)+O(N^{\frac{2}{5}}\log N)\\
&=\sum_{p\le N}\log p.e(p\alpha)+\sum_{\substack{p^k\le N\\ k\ge 2}}\log p.e(p^k\alpha)\\
&\qquad+O(N^{\frac{2}{5}}\log N)\\
&=F(\alpha)+O\Big(\sum_{\substack{p^k\le N\\ k\ge 2}}\log N\Big)+O\big(N^{\frac{2}{5}}\log N\big)\\
&=F(\alpha)+O\Big(\sum_{p^2\le N}\lfloor\frac{\log N}{\log p}\rfloor\Big)+O\big(N^{\frac{2}{5}}\log N\big)\\
&=F(\alpha)+O\Big(\pi(\sqrt{N})\log N\Big)+O\big(N^{\frac{2}{5}}\log N\big)\\
&=F(\alpha)+O(\sqrt{N})
\end{aligned}$$

در تساوی آخر از این استفاده کردیم که $\pi(\sqrt{N})\log N \ll \sqrt{N}$ (این نتیجه‌ای از قضیه‌ی چبیشف است).

$$\begin{aligned}
&\sum_{u<k\le N}\sum_{u<l\le\frac{N}{k}}M_u(k)\phi(k,d)\\
&\quad=\sum_{N^{\frac{2}{5}}<k\le N}\sum_{N^{\frac{2}{5}}<l\le\frac{N}{k}}M_{N^{\frac{2}{5}}}(k)\Lambda(l)e(\alpha kl)=S_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{d\le u}\sum_{u<l\le\frac{N}{d}}\sum_{m\le\frac{N}{ld}}\mu(d)\phi(dm,l)\\
&\quad=\sum_{d\le N^{\frac{2}{5}}}\sum_{N^{\frac{2}{5}}<l\le\frac{N}{d}}\sum_{m\le\frac{N}{ld}}\mu(d)\Lambda(l)e(\alpha dlm)\\
&\quad=\sum_{d\le N^{\frac{2}{5}}}\sum_{l\le\frac{N}{d}}\sum_{m\le\frac{N}{ld}}\mu(d)\Lambda(l)e(\alpha dlm)\\
&\qquad-\sum_{d\le N^{\frac{2}{5}}}\sum_{l\le N^{\frac{2}{5}}}\sum_{m\le\frac{N}{ld}}\mu(d)\Lambda(l)e(\alpha dlm)=S_1-S_2
\end{aligned}$$

با جایگذاری روابط فوق در اتحاد بیان شده در لم ۱۲ حکم نتیجه می‌شود. □

در ادامه می‌خواهیم برای S_1 و S_2 و S_3 کران بالا به دست آوریم.

لم ۱۴. *با فرض‌های قضیه ۱۱ داریم*

$$|S_1| \ll \left(\frac{N}{q} + N^{\frac{2}{5}} + q\right)(\log N)^2$$

اثبات. فرض کنید $u = N^{\frac{2}{5}}$. می‌دانیم $\sum_{l|r}\Lambda(l) = \log r$. داریم

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{d\le u}\sum_{l\le \frac{N}{d}}\sum_{m\le \frac{N}{ld}} \mu(d)\Lambda(l)e(\alpha dlm)\\
&= \sum_{d\le u}\sum_{lm\le \frac{N}{d}} \mu(d)\Lambda(l)e(\alpha dlm)\\
&= \sum_{d\le u}\sum_{r\le \frac{N}{d}} \mu(d)e(\alpha dr)\sum_{l|r}\Lambda(l)\\
&= \sum_{d\le u}\mu(d)\sum_{r\le \frac{N}{d}} e(\alpha dr)\log r\\
&\ll \sum_{d\le u}\mu(d)\Big|\sum_{r\le \frac{N}{d}} e(\alpha dr)\log r\Big|
\end{aligned}$$

اکنون جمع داخل قدر مطلق را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
\sum_{r\le \frac{N}{d}} e(\alpha dr)\log r &= \sum_{r\le \frac{N}{d}} e(\alpha dr)\int_1^r \frac{\mathrm{d}x}{x}\\
&= \sum_{r=2}^{\lfloor \frac{N}{d}\rfloor} e(\alpha dr)\sum_{s=2}^{r}\int_{s-1}^{s}\frac{\mathrm{d}x}{x}\\
&= \sum_{s=2}^{\lfloor \frac{N}{d}\rfloor}\sum_{r=s}^{\lfloor \frac{N}{d}\rfloor}\int_{s-1}^{s} e(\alpha dr)\frac{\mathrm{d}x}{x}\\
&= \sum_{s=2}^{\lfloor \frac{N}{d}\rfloor}\int_{s-1}^{s}\Big(\sum_{s=2}^{\lfloor \frac{N}{d}\rfloor} e(\alpha dr)\Big)\frac{\mathrm{d}x}{x}
\end{aligned}$$

طبق لم ۶ داریم

$$\begin{aligned}
&\sum_{r=s}^{\lfloor \frac{N}{d}\rfloor} e(dr\alpha) \ll \min\{\frac{N}{d}, \|\alpha d\|^{-1}\}\\
\Rightarrow &\sum_{r\le \frac{N}{d}} e(dr\alpha)\log r \ll \min\{\frac{N}{d}, \|\alpha d\|^{-1}\}\log N\\
\Rightarrow &S_1 \ll \min\{\frac{N}{d}, \|\alpha d\|^{-1}\}\log N
\end{aligned}$$

در این‌جا از حکمی استفاده می‌کنیم که اثبات آن در ضمیمه آمده است. این حکم بیان می‌کند: اگر $\alpha\in\mathbb{R}$ و $|\alpha - \frac{a}{q}| \le \frac{1}{q^2}$ که در آن $a,q\in\mathbb{Z}$ و $q\ge 1$ و $(a,q)=1$ به ازای هر $n\in\mathbb{N}$ و $U\ge 1$ داریم

$$\sum_{1\le k\le U}\min\{\frac{n}{k}, \|\alpha k\|^{-1}\} \ll \left(\frac{n}{q} + U + q\right)\log(2qU) \qquad (2)$$

در نتیجه در این‌جا می‌توان نوشت

$$\sum_{n\le d}\min\{\frac{N}{d}, \|\alpha k\|^{-1}\} \ll \left(\frac{N}{q} + N^{\frac{2}{5}} + q\right)\log N$$

دو رابطه‌ی فوق حکم مورد نظر را نتیجه می‌دهند. □

لم ۱۵. *با فرض‌های قضیه ۱۱ داریم*

$$|S_2| \ll \left(\frac{N}{q} + N^{\frac{4}{5}} + q\right)(\log N)^2$$

اثبات. اگر $d\le N^{\frac{2}{5}}$ و $l\le N^{\frac{2}{5}}$ آن‌گاه $dl\le N^{\frac{4}{5}}$. در نتیجه با تغییر متغیر $k=dl$ داریم

$$\begin{aligned}
S_2 &= \sum_{d\le N^{\frac{2}{5}}}\sum_{l\le N^{\frac{2}{5}}}\sum_{m\le \frac{N}{ld}} \mu(d)\Lambda(l)e(\alpha dlm)\\
&= \sum_{k\le N^{\frac{4}{5}}}\Big(\sum_{k\le \frac{N}{k}} e(\alpha km)\Big)\Big(\sum_{\substack{k=dl\\ d,l\le N^{\frac{2}{5}}}} \mu(d)\Lambda(l)\Big)
\end{aligned}$$

همچنین داریم

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{k=dl\\ d,l\le N^{\frac{2}{5}}}} \mu(d)\Lambda(l) &\ll \sum_{\substack{k=dl\\ d,l\le N^{\frac{2}{5}}}} \Lambda(l)\\
&\le \sum_{l|k}\Lambda(l) = \log k \ll \log N
\end{aligned}$$

اکنون مشابه لم قبل با استفاده از لم ۶ و حکم (۲) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}
S_2 &\ll \log N \sum_{k\le N^{\frac{4}{5}}}\sum_{m\le \frac{N}{k}} e(\alpha km)\\
&\ll \log N \sum_{k\le N^{\frac{4}{5}}}\min\{\frac{N}{k}, \|\alpha k\|^{-1}\}\\
&\ll \left(\frac{N}{q} + N^{\frac{4}{5}} + q\right)(\log N)^2
\end{aligned}$$

اثبات لم به پایان رسید. □

لم ۱۶. *با فرض‌های قضیه ۱۱ داریم*

$$|S_3| \ll \left(\frac{N}{\sqrt{q}} + N^{\frac{4}{5}} + \sqrt{Nq}\right)(\log N)^4$$

اثبات. قرار می‌دهیم $u = N^{\frac{2}{5}}$ و $h = \lfloor \frac{\log N}{2\log 2}\rfloor + 1$. در این صورت $N^{\frac{1}{5}} < 2^h \le 2N^{\frac{1}{5}}$ و $h \ll \log N$. اگر $ileh$ آن‌گاه $2^i u \le 2N^{\frac{3}{5}} \ll N$. اگر $N^{\frac{2}{5}} < l \le \frac{N}{k}$ آن‌گاه

$$k \le \frac{N}{d} < N^{\frac{3}{5}} = N^{\frac{1}{5}}u < 2^h u$$

در نتیجه می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} S_3 &= \sum_{k>N^{\frac{2}{5}}} \sum_{N^{\frac{2}{5}}<l\le \frac{N}{k}} M_u(k)\Lambda(l)e(\alpha kl) \\ &= \sum_{i=1}^{h} \sum_{2^{i-1}u<k\le 2^i u} M_u(k) \sum_{u<l\le \frac{N}{k}} \Lambda(d)e(\alpha kl) = \sum_{i=1}^{h} S_{3,i} \end{aligned}$$

که در آن

$$S_{3,i} = \sum_{2^{i-1}u<k\le 2^i u} M_u(k) \sum_{u<l\le \frac{N}{k}} \Lambda(d)e(\alpha kl)$$

از نابرابری کوشی-شوارتز نتیجه می‌شود

$$|S_{3,i}|^2 \le \Big(\sum_{2^{i-1}<k\le 2^i u} |M_u(k)|^2\Big).$$

$$\Big(\sum_{2^{i-1}<k\le 2^i u} \Big|\sum_{u<l\le \frac{N}{k}} \Lambda(l)e(\alpha kl)\Big|^2\Big)$$

اکنون می‌خواهیم برای دو عبارت فوق کران بالا پیدا کنیم.

$$|M_u(k)| = \Big|\sum_{\substack{d|k\\ d\le u}} \mu(d)\Big| \le \sum_{\substack{d|k\\ d\le u}} 1 \le d(k)$$

که $d(n)$ تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت n است. در این جا از حکم دیگری که در ضمیمه اثبات می‌کنیم، استفاده می‌کنیم. این حکم بیان می‌کند

$$\sum_{n\le x} d(n)^2 \ll x(\log x)^3 \qquad (۳)$$

در نتیجه داریم

$$\begin{aligned} \sum_{2^{i-1}<k\le 2^i u} |M_u(k)|^2 \le \sum_{2^{i-1}<k\le 2^i u} d(k)^2 &\ll 2^i u(\log 2^i u)^3 \\ &\ll 2^i u(\log N)^3 \end{aligned}$$

کران موردنیاز برای عبارت اول به دست آمد. به سراغ عبارت دوم می‌رویم

$$\begin{aligned} &\sum_{2^{i-1}<k\le 2^i u} \Big|\sum_{u<l\le \frac{N}{k}} \Lambda(l)e(\alpha kl)\Big|^2 \\ &= \sum_{2^{i-1}<k\le 2^i u} \sum_{u<l\le \frac{N}{k}} \sum_{u<m\le \frac{N}{k}} \Lambda(l)\lambda(m)e(\alpha k(l-m)) \\ &= \sum_{u<l<\frac{N}{2^{i-1}u}} \sum_{u<m<\frac{N}{2^{i-1}u}} \Lambda(l)\lambda(m) \sum_{k\in I(k,m)} e(\alpha k(l-m)) \end{aligned}$$

که در این‌جا

$$I(l,m) = \big\{k\in\mathbb{Z} | 2^{i-1}u<k\le \min\{2^i u, \frac{N}{l}, \frac{N}{m}\}\big\}$$

به وضوح داریم $|I(l,m)|\le 2^{i-1}u$ در نتیجه طبق لم ۶ داریم

$$\sum_{k\in I(l,m)} e\big(\alpha k(l-m)\big) \ll \min\{2^{i-1}u, \|\alpha(l-m)\|^{-1}\}$$

به ازای اعداد صحیح $l,m\in[1,N]$ داریم $\Lambda(m)\le\log N$ و $0\le\Lambda(l)$. در نتیجه داریم

$$\begin{aligned} &\sum_{2^{i-1}u<k\le 2^i u} \Big|\sum_{u<l\le \frac{N}{k}} \Lambda(l)e(\alpha kl)\Big|^2 \\ &\ll \sum_{u<l<\frac{N}{2^{i-1}u}} \sum_{u<m<\frac{N}{2^{i-1}u}} \Lambda(l)\Lambda(m)Z \\ &\ll (\log N)^2 \sum_{u<l<\frac{N}{2^{i-1}u}} \sum_{u<m<\frac{N}{2^{i-1}u}} \Lambda(l)\Lambda(m)Z \end{aligned}$$

که در آن

$$Z = \min\{2^{i-1}u, \|\alpha(l-m)\|^{-1}\}$$

قرار می‌دهیم $j=l-m$ که $m<\frac{N}{2^{i-1}u}$ و $u<l$. در این صورت $|j|<\frac{N}{2^{i-1}u}$ و تعداد راه‌های نمایش چنین jای به شکل مذکور حداکثر $\frac{N}{2^{i-1}u}$ است. با توجه به حکم (۲) داریم

$$\begin{aligned} &\sum_{2^{i-1}u<k\le M2^i u} \Big|\sum_{u<l\le \frac{N}{k}} \Lambda(l)e(\alpha kl)\Big|^2 \\ &\ll (\log N)^2 \frac{N}{2^{i-1}u} \sum_{i\le j\le \frac{N}{2^{i-1}u}} \min\{2^{i-1}u, \|\alpha j\|^{-1}\} \\ &\ll (\log N)^2 \frac{N}{2^{i-1}u} \sum_{i\le j\le \frac{N}{2^{i-1}u}} \min\{\frac{N}{j}, \|\alpha j\|^{-1}\} \\ &\ll \frac{N}{2^{i-1}u}\Big(\frac{N}{q}+\frac{N}{2^{i-1}u}+q\Big)(\log N)^3 \end{aligned}$$

دومین کران موردنیاز را به دست آوردیم. اکنون می‌توانیم یک کران برای $S_{3,i}$ پیدا کنیم.

$$\begin{aligned} |S_{3,i}|^2 &\ll \big(2^i u(\log N)^3\big)\frac{N}{2^{i-1}u}\Big(\frac{N}{q}+\frac{N}{2^{i-1}u}+q\Big)(\log N)^3 \\ &\ll N^2(\log N)^6\Big(\frac{1}{q}+\frac{1}{u}+\frac{q}{N}\Big) \\ &\le N^2(\log N)^6\Big(\frac{1}{\sqrt{q}}+\frac{1}{\sqrt{u}}+\sqrt{\frac{q}{N}}\Big)^2 \\ \Rightarrow |S_{3,i}| &\ll \& N(\log N)^3\Big(\frac{1}{\sqrt{q}}+\frac{1}{N^{\frac{1}{5}}}+\sqrt{\frac{q}{N}}\Big) \end{aligned}$$

$$h\ll\log N \Rightarrow S_3 = \sum_{i=1}^{h} S_{3,i} \ll (\log N)^4\Big(\frac{N}{\sqrt{q}}+N^{\frac{4}{5}}+\sqrt{q}N\Big)$$

این اثبات لم را کامل می‌کند. $\square$

اکنون کافی است کران‌هایی را که برای S_1 و S_2 و S_3 یافتیم در لم ۱۳ جایگذاری کنیم تا به حکم قضیه ۱۱ برسیم. اکنون آماده‌ایم تا مقدار انتگرال روی m را به کمک قضیه ۱۱ تقریب بزنیم.

قضیه ۱۷. *برای هر $B > 0$ داریم*
$$\int_m F(\alpha)^3 e(-N\alpha)\,\mathrm{d}\alpha \ll \frac{N^2}{(\log N)^{\frac{B}{2}-5}}$$
که ثابت مورد (برای $\ll$) فقط به B وابسته است.

اثبات. $\alpha \in m$ را در نظر می‌گیریم. طبق قضیه‌ی دیریکله (که در ضمیمه بیان و اثبات شده است.) عدد گویای $\frac{a}{q} \in [0,1]$ با شرط $1 \le q \le N/Q$ و $(a,q)=1$ موجود است که
$$|\alpha - \frac{a}{q}| \le \frac{Q}{q^N} \le \min\{Q/N, 1/q^2\}$$
اگر $q \le Q$ باشد نتیجه می‌شود $\alpha \in M(q,a)$ که امکان ندارد (چون $\alpha \in m$). در نتیجه درایم $Q < q \le N/Q$. طبق قضیه‌ی ۱۱ داریم:
$$\begin{aligned} F(\alpha) &\ll (\frac{N}{\sqrt{q}} + N^{4/5} + \sqrt{Nq})(\log N)^4 \\ &\ll (\frac{N}{(\log N)^{B/2}} + N^{4/5} + \sqrt{N}(\frac{N}{(\log N)^B})^{1/2})(\log N)^4 \\ &\ll \frac{N}{(\log N)^{B/2-4}} \end{aligned}$$

طبق قضیه چپیشف داریم:
$$\begin{aligned} v(N) &:= \sum_{p \le N} \log p \\ &\le \pi(N)\log N \ll N \\ &\Rightarrow \int_0^1 |F(\alpha)|^2 \mathrm{d}\alpha \\ &= \sum_{p \le N} (\log p)^2 \\ &\le \log N \sum_{p \le N} \log p \\ &= \log N . v(N) l N \log N \\ &\Rightarrow \int_m |F(\alpha)|^3 \mathrm{d}\alpha \\ &\ll \sup\{|F(\alpha)| : \alpha \in m\} \int_m |F(\alpha)|^2 \mathrm{d}\alpha \\ &\ll \frac{N}{(\log N)^{B/2-4}} \int_0^1 |F(\alpha)|^2 \mathrm{d}\alpha \\ &\ll \frac{N^2}{(\log N)^{B/2-5}} \end{aligned}$$

اثبات کامل شد. □

۷ اثبات قضیه ۱

در این قسمت ابتدا یک تخمین برای $R(N)$ به دست می‌آوریم و سپس با استفاده از آن قضیه ۱ را اثبات می‌کنیم.

قضیه ۱۸. (*Vinogradov*) *برای N فرد به اندازه‌ی کافی بزرگ و برای هر $A > 0$ داریم*
$$R(N) = G(N)\frac{N^2}{2} + O(\frac{N^2}{(\log N)^A})$$
که ثابت مورد نیاز فقط به A وابسته است.

اثبات. از قضیه‌های ۱۰ و ۱۷ نتیجه می‌شود برای هر $B, C, \epsilon > 0$ که $C > 2B$ داریم
$$\begin{aligned} R(N) &= \int_0^1 F(\alpha)^3 e(-N\alpha)\mathrm{d}\alpha \\ &= \int_M F(\alpha)^3 e(-N\alpha)\mathrm{d}\alpha + \int_m F(\alpha)^3 e(-N\alpha)\mathrm{d}\alpha \\ &= G(N)\frac{N^2}{2} + O(\frac{N^2}{(\log N)^{(1-\epsilon)B}}) + O(\frac{N^2}{(\log N)^{C-5B}}) \\ &+ O(\frac{N^2}{(\log N)^{B/2-5}}) \end{aligned}$$
که ثابت‌های مورد نیاز فقط به B و C و ϵ وابسته هستند. اکنون قرار می‌دهیم:
$$B = 2A + 10, C = A + 5B, \epsilon = \frac{1}{2}$$
با توجه به اینکه $A = \min\{(1-\epsilon)B, C - 5B, B/2 - 5\}$، با جایگذاری در رابطه‌ی فوق به دست می‌آوریم
$$R(N) = G(N)\frac{N^2}{2} + O(\frac{N^2}{(\log N)^A}($$
و ثابت مورد نیاز فقط به A بستگی دارد. □

اثبات قضیه ۱: ابتدا توجه کنید که داریم
$$\begin{aligned} R(N) &= \sum_{p_1+p_2+p_3=N} \log p_1 \log p_2 \log p_3 \\ &\le (\log N)^3 \sum_{p_1+p_2+p_3=N} 1 = (\log N)^3 . r(N) \end{aligned}$$
به ازای $0 < \delta < \frac{1}{2}$ فرض کنید $r_\delta(N)$ برابر تعداد نمایش‌های N به صورت $N = p_1 + p_2 + p_3$ با شرط $\exists i : p_i \le N^{1-\delta}$ باشد. در این صورت داریم:
$$\begin{aligned} r_\delta(N) &\ll 3 \sum_{p_1+p_2+p_3=N, p_1 \le N^{1-\delta}} 1 \ll \sum_{p_1 \le N^{1-\delta}} (\sum_{p_2+p_3=N-p_1} 1) \\ &\le \sum_{p_1 \le N^{1-\delta}} (\sum_{p_2 < N} 1) \\ &\le \pi(N^{1-\delta})\pi(N) \ll \frac{N^{2-\delta}}{(\log N)^2} \end{aligned}$$

با توجه به این نکته می‌توان نوشت:

$$R(N) \geq \sum_{p_1+p_2+p_3=N, p_1,p_2,p_3>N^{1-\delta}} \log p_1 . \log p_2 . \log p_3$$
$$\geq (1-\delta)^3 (\log N)^3 (\sum_{p_1+p_2+p_3=N, p_1,p_2,p_3>N^{1-\delta}} 1)$$
$$\geq (1-\delta)^3 (\log N)^3 (r(N) - r_\delta(N))$$
$$\gg (1-\delta)^3 (\log N)^3 (r(N) - \frac{N^{2-\delta}}{(\log N)^2})$$
$$\Rightarrow (\log N)^3 r(N) \leq (1-\delta)^{-3} R(N) + (\log N) N^{2-\delta}$$

$$0 < \delta < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < 1-\delta < 1$$
$$\Rightarrow 0 < (1-\delta)^{-3} - 1 = \frac{1-(1-\delta)^3}{(1-\delta)^3} \leq 8(1-(1-\delta)^3) < 24\delta$$

طبق قضیه ۱۸، $R(N) \ll N^2$ و در نتیجه داریم:

$$0 \leq (\log N)^3 r(N) - R(N)$$
$$\leq ((1-\delta)^{-3} - 1) R(N) + (\log N) N^{2-\delta}$$
$$\ll \delta R(N) + (\log N) N^{2-\delta}$$
$$\ll \delta N^2 + (\log N) N^{2-\delta} = N^2 (\delta + \frac{\log N}{N^\delta})$$

این نابرابری برای هر $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ برقرار است و ثابت مورد نیاز به δ بستگی ندارد. قرار می‌دهیم:

$$\delta = \frac{2 \log\log N}{\log N}$$
$$\Rightarrow \delta + \frac{\log N}{N^\delta} = \frac{2\log\log N}{\log N} + \frac{\log N}{(\log N)^2} << \frac{\log\log N}{\log N}$$
$$\Rightarrow 0 \leq (\log N)^3 r(N) - R(N) \ll \frac{N^2 \log\log N}{\log N}$$

فرض کنید $A \geq 1$. طبق قضیه ۱۸ داریم:

$$(\log N)^3 r(N) = R(N) + O(\frac{N^2 \log\log N}{\log N})$$
$$= G(N) \frac{N}{2} + O(\frac{N^2}{(\log N)^A})$$
$$+ O(\frac{N^2 \log\log N}{\log N})$$
$$= G(N) \frac{N^2}{2} (1 + O(\frac{N^2 \log\log N}{\log N}))$$
$$\Rightarrow r(N) = G(N) \frac{N^2}{2(\log N)^3} (1 + O(\frac{N^2 \log\log N}{\log N}))$$

به این ترتیب اثبات قضیه کامل می‌شود.

۸ ضمیمه

در این‌جا چند حکم را که در اثبات‌ها به کار بردیم ولی به منظور جلوگیری از انحراف از موضوع آن‌ها را اثبات نکردیم، بیان و اثبات خواهیم کرد.

(i)

فرض کنید α عددی حقیقی باشد. اگر $|\alpha - \frac{a}{q}| \leq \frac{1}{q^2}$ که در آن $a, q \in \mathbb{Z}$ و $q \geq 1$ و $(a,q) = 1$ آن‌گاه برای هر عدد حقیقی $U \geq 1$ و عدد طبیعی n داریم

$$\sum_{1 \leq k \leq U} \min\{\frac{n}{k}, ||\alpha k||^{-1}\} \ll (\frac{n}{q} + U + q) \log(2qU)$$

برای اثبات به دو لم نیاز داریم!

لم ۱۹. *با فرض‌های (i)، داریم:*

$$\sum_{1 \leq r \leq \frac{q}{2}} ||\alpha r||^{-1} \ll q \log q$$

اثبات. حکم برای $q = 1$ واضح است. پس فرض می‌کنیم $q \geq 2$. برای هر عدد صحیح r، اعداد صحیح $m(r), s(r) \in [0, \frac{q}{2}]$ موجود است به طوری که داریم:

$$\frac{s(r)}{q} = ||\frac{ar}{q}|| = \pm(\frac{ar}{q} - m(r))$$

چون $(a,q) = 1$ داریم

$$s(r) = 0 \iff r \equiv 0 (\mod q)$$

در نتیجه وقتی $r \in [1, \frac{q}{2}]$ آن‌گاه $s(r) \in [1, \frac{q}{2}]$. قرار می‌دهیم:

$$\theta := q^2(\alpha - \frac{a}{q}) \Rightarrow -1 \leq \theta \leq 1$$

در نتیجه عدد حقیقی θ' موجود است که:

$$\alpha r := \frac{ar}{q} + \frac{\theta r}{q^2} = \frac{ar}{q} + \frac{\theta'}{2q}$$

در نتیجه داریم:

$$|\theta'| = |\frac{2\theta r}{q}| \leq |\theta| \leq 1$$

با توجه به آن‌چه گفتیم می‌توان نوشت:

$$||\alpha r|| = ||\frac{ar}{q} + \frac{\theta'}{2q}||$$
$$= ||m(r) \pm \frac{s(r)}{q} + \frac{\theta'}{2q}||$$
$$= ||\frac{s(r)}{q} \pm \frac{\theta'}{2q}||$$
$$\geq ||\frac{s(r)}{q}|| - ||\frac{\theta'}{2q}||$$
$$\geq \frac{s(r)}{q} - \frac{1}{2q} \geq \frac{1}{2q}$$

ادعا می‌کنیم برای $1 \leq r_1 \leq r_2 \leq \frac{q}{2}$ داریم

$$s(r_1) = s(r_2) \iff r_1 = r_2$$

داریم

$$s(r_۱)=s(r_۲)$$
$$\Rightarrow ||\frac{ar_۲}{q}||=||\frac{ar_۲}{q}||$$
$$\Rightarrow \pm(\frac{ar_۱}{q}-m(r_۱))=\pm(\frac{ar_۲}{q}-m(r_۲))$$
$$\Rightarrow ar_۱\equiv \pm ar_۲(\mod q)$$
$$(a,q)=۱\Rightarrow r_۱\equiv \pm r_۲(\mod q)$$
$$۱\le r_۱\le r_۲\le \frac{q}{۲}\Rightarrow r_۱=r_۲$$

ادعایمان را اثبات کردیم. از این ادعا می‌توان نتیجه گرفت

$$\{||\frac{ar}{q}||:۱\le r\le \frac{q}{۲}\}$$
$$=\{\frac{s(r)}{q}:۱\le r\le \frac{q}{۲}\}$$
$$=\{\frac{s}{q}:۱\le s\le \frac{q}{۲}\}$$

در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\sum_{۱\le r\le \frac{q}{۲}}||\alpha r||^{-۱}\le \sum_{۱\le r\le \frac{q}{۲}}(\frac{s(r)}{q}-\frac{۱}{۲q})^{-۱}$$
$$=\sum_{۱\le s\le \frac{q}{۲}}(\frac{s}{q}-\frac{۱}{۲q})^{-۱}$$
$$=۲q\sum_{۱\le s\le \frac{q}{۲}}\frac{۱}{۲s-۱}$$
$$\le ۲q\sum_{۱\le s\le \frac{q}{۲}}\frac{۱}{s}\ll q\log q$$

حکم اثبات شد. □

لم ۲۰. *با فرض‌های (i)، برای هر عدد حقیقی و مثبت V و عدد صحیح نامنفی h داریم:*

$$\sum_{r=۱}^{q}\min\{V,||\alpha(hq+r)^{-۱}||\}\ll V+q\log q$$

اثبات. فرض کنید $\theta\in[-۱,۱]$ طوری باشد که $\alpha=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^۲}$. در این صورت داریم

$$\alpha(hq+r)=ah+\frac{ar}{q}+\frac{\theta h}{q}+\frac{\theta r}{q^۲}$$
$$=ah+\frac{ar}{q}+\frac{\lfloor\theta h\rfloor+\{\theta h\}}{q}+\frac{\theta r}{q^۲}$$
$$=ah+\frac{ar+\lfloor\theta h\rfloor+\delta(r)}{q}$$

که در آن $۲>\{\theta h\}+\frac{\theta r}{q}=\delta(r)\le -۱$. برای هر $r\in\{۱,۲,\dots,q\}$ عدد صحیح یکتای r' موجود است که

$$\{\alpha(hq+r)\}=\frac{ar+\lfloor\theta h\rfloor+\delta(r)}{q}-r'$$

اگر $t\le\{\alpha(hq+r)\}\le t+\frac{۱}{q}$ آن‌گاه:

$$qt\le ar-qr'+\lfloor\theta h\rfloor+\delta(r)\le qt+۱$$
$$\Rightarrow ar-qr'\le qt-\lfloor\theta h\rfloor+۱-\delta(r)\le qt-\lfloor\theta h\rfloor+۲$$

همچنین می‌توان نتیجه گرفت

$$ar-qr'\ge qt-\lfloor\theta h\rfloor-\delta(r)>qt-\lfloor\theta h\rfloor-۲$$
$$\Rightarrow ar-qr'\in J=(qt-\lfloor\theta h\rfloor-۲,qt-\lfloor\theta h\rfloor+۲]$$
$$\Rightarrow |J|=۴$$

بازه‌ی J شامل دقیقا چهار عدد صحیح است. برای $۱\le r_۱\le r_۲\le q$ داریم

$$ar_۱-qr'_۱=ar_۲-qr'_۲$$
$$\Rightarrow ar_۱\equiv ar_۲(\mod q)$$
$$(a,q)=۱\Rightarrow r_۱\equiv r_۲(\mod q)$$
$$\Rightarrow r_۱=r_۲$$

در نتیجه برای هر $t\in[۰,\frac{q-۱}{q}]$ حداکثر چهار عدد صحیح $r\in[۱,q]$ وجود دارد به طوری که $\{\alpha(hq+r)\}\in[t,t+\frac{۱}{q}]$. توجه کنید که

$$||\alpha(hq+r)||\in[t,t+\frac{۱}{q}]\iff \{\alpha(hq+r)\}\in[t,t+\frac{۱}{q}]$$
$$\text{یا } ۱-\{\alpha(hq+r)\}\in[t,t+\frac{۱}{q}]$$

همچنین داریم

$$۱-\{\alpha(hq+r)\}\in[t,t+\frac{۱}{q}]$$
$$\Rightarrow \{\alpha(hq+r)\}\in[t',t'+\frac{۱}{q}],۰\le t'=۱-\frac{۱}{q}-t\le ۱-\frac{۱}{q}$$

این نتیجه می‌دهد برای هر $t\in[۰,\frac{q-۱}{q}]$ حداکثر هشت عدد صحیح $r\in[۱,q]$ وجود دارد که

$$||\alpha(hq+r)||\in J(s):=[\frac{s}{q},\frac{s+۱}{q}]$$

اکنون به اثبات حکم می‌پردازیم. اگر $||\alpha(hq+r)||\in J(۰)$ از نابرابری $\min\{V,||\alpha(hq+r)||^{-۱}\}\le V$ و اگر داشته باشیم $||\alpha(hq+r)||\in J(s)$ که $s\ge ۱$ آن‌گاه از نابرابری زیر استفاده می‌کنیم

$$\min\{V,||\alpha(hq+r)||^{-۱}\}\le||\alpha(hq+r)||\le\frac{q}{s}$$

با توجه به اینکه به ازای هر r وجود دارد $s<\frac{q}{۲}$ که $||\alpha(hq+r)||\in J(s)$، داریم

$$\sum_{۱\le s\le q}\min\{V,||\alpha(hq+r)||^{-۱}\}\le ۸V+۸\sum_{۱\le s<\frac{q}{۲}}\frac{q}{s}$$
$$\ll V+q\log q$$

اثبات کامل شد. □

اثبات (i): k را می‌توانیم به شکل زیر بنویسیم

$$k = hq + r, ۱ \le r \le q, ۰ \le h < \frac{U}{q}$$

در نتیجه داریم

$$\begin{aligned} S &:= \sum_{۱\le k\le U} \min\{\frac{n}{k}, ||\alpha k||^{-۱}\} \\ &\le \sum_{۰\le h<\frac{U}{q}}\sum_{۱\le r\le q}\min\{\frac{n}{hq+r}, ||\alpha(hq+r)||^{-۱}\} \end{aligned}$$

اگر $h = ۰$ و $۱ \le r \le \frac{q}{۲}$ آن‌گاه لم ۱۹ نتیجه می‌دهد

$$\sum_{۱\le r\le \frac{q}{۲}}\min\{\frac{n}{r}, ||\alpha r||^{-۱}\} \le \sum_{۱\le r\le\frac{q}{۲}} ||\alpha r||^{-۱} << q\log q$$

برای بقیه جملات داریم $\frac{۱}{hq+r} < \frac{۲}{(h+۱)q}$. زیرا

$$h\ge ۱ \Rightarrow hq+r > hq \ge \frac{(h+۱)q}{۲}$$

$$h=۰, \frac{q}{۲} < r\le q \Rightarrow hq+r = r > \frac{q}{۲} = \frac{(h+۱)q}{۲}$$

در نتیجه داریم

$$S \ll q\log q + \sum_{۰\le h<\frac{U}{q}}\sum_{۱\le r\le q}\min\{\frac{n}{(h+۱)q}, ||\alpha(hq+r)||^{-۱}\}$$

با توجه به اینکه $\frac{U}{q} + ۱ \le U+q \le ۲\max\{q,U\} \le ۲qU$ و با قرار دادن $V = \frac{n}{(h+۱)q}$ در لم ۲۰ به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} S &\ll q\log q + \sum_{۰\le h<\frac{U}{q}}\sum_{۱\le r\le q}\min\{\frac{n}{(h+۱)q}, ||\alpha(hq+r)||^{-۱}\} \\ &\ll q\log q + \sum_{۰\le h<\frac{U}{q}}(\frac{n}{(h+۱)q} + q\log q) \\ &\ll q\log q + \frac{n}{q} \sum_{۰\le h<\frac{U}{q}}\frac{۱}{h+۱} + (\frac{U}{q} + ۱)q\log q \\ &\ll q\log q + \frac{n}{q}\log(\frac{U}{q}+۱) + U\log q + q\log q \\ &\ll (\frac{n}{q} + U + q)\log ۲qU \end{aligned}$$

حکم اثبات شد.

(ii)

$\sum_{n\le x} d(n)^۲ \ll x(\log x)^۳$. برای اثبات به یک لم ساده نیاز داریم.

لم ۲۱. $D(x) := \sum_{n\le x} d(n) = x\log x + (۲\gamma-۱)x + O(\sqrt{x})$.

اثبات. توجه کنید که $d(n) = \sum_{d|n}۱$ نشان دهنده‌ی تعداد نقاط شبکه‌ای روی سهمی $uv=n$ است که در ربع اول صفحه مختصات قرار دارند. در نتیجه $D(x)$ برابر است با تعداد نقاط شبکه‌ای از ربع اول است روی یا زیر سهمی $uv = x$ قرار دارند. در واقع برابر است با تعداد نقاط با مختصات صحیح مثبت (u,v) به طوری که $۱\le v\le \frac{x}{u}$ و $۱\le u\le x$. این مجموعه از نقاط را می‌توانیم به سه مجموعه‌ی مجزا افراز کنیم:

$$\{۱\le u\le\sqrt{x}, ۱\le v\le\sqrt{x}\}$$

$$\{۱\le u\le\sqrt{x}, \sqrt{x} < v\le\frac{x}{u}\}$$

$$\{\sqrt{x} < u\le x, ۱\le v\le\frac{x}{u}\}$$

همچنین توجه کنید که داریم:

$$\{\sqrt{x} < u\le x, ۱\le v\le\frac{x}{u}\} = \{۱\le v\le\sqrt{x}, \sqrt{x} < u\le\frac{x}{v}\}$$

در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned} D(x) &= \lfloor\sqrt{x}\rfloor^۲ + \sum_{۱\le u\le\sqrt{x}}(\lfloor\frac{x}{u}\rfloor - \lfloor\sqrt{x}\rfloor) \\ &+ \sum_{۱\le v\le\sqrt{x}}(\lfloor\frac{x}{v}\rfloor - \lfloor\sqrt{x}\rfloor) \\ &= \lfloor\sqrt{x}\rfloor^۲ + ۲\sum_{۱\le u\le\sqrt{x}}(\lfloor\frac{x}{u}\rfloor - \lfloor\sqrt{x}\rfloor) \\ &= ۲\sum_{۱\le u\le\sqrt{x}}\lfloor\frac{x}{u}\rfloor - \lfloor\sqrt{x}\rfloor^۲ \\ &= ۲\sum_{۱\le u\le\sqrt{x}}(\frac{x}{u} - \{\frac{x}{u}\}) - (\sqrt{x} - \{\sqrt{x}\})^۲ \\ &= ۲x\sum_{۱\le u\le\sqrt{x}}\frac{۱}{u} - ۲\sum_{۱\le u\le\sqrt{x}}\{\frac{x}{u}\} - x + O(\sqrt{x}) \\ &= ۲x(\log\sqrt{x} + \gamma + O(\frac{۱}{\sqrt{x}})) - x + O(\sqrt{x}) \\ &= x\log x + (۲\gamma - ۱)x + O(\sqrt{x}) \end{aligned}$$

که در آن γ ثابتی است با این ویژگی که

$$\sum_{۱\le n\le x}\frac{۱}{n} = \log x + \gamma + O(\frac{۱}{x})$$

اثبات به پایان رسید. □

اثبات (ii): ابتدا توجه کنید که برای هر $a,b\in\mathbb{N}$ داریم $d(ab)\le d(a)d(b)$ (این حکم را می‌توان به راحتی با نوشتن a و b به صورت حاصل‌ضرب توان‌های اعداد اول اثبات کرد و ما از نوشتن اثبات

خودداری می‌کنیم). با توجه به این نکته داریم

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x} d(n)^{۲} &= \sum_{n\le x} d(n) \sum_{n=ab} ۱ = \sum_{ab\le x} d(ab)\\ &\le \sum_{ab\le x} d(a)d(b) = \sum_{a\le x} d(a) \sum_{b\le \frac{x}{a}} d(b)\\ &\overset{\text{استفاده از لم ۲۱}}{=} \sum_{a\le x} d(a)\big((\frac{x}{a})\log(\frac{x}{a}) + O(\frac{x}{a})\big)\\ &\le x\log x \sum_{a\le x}\frac{d(a)}{a} + O(x\sum_{a\le x}\frac{d(a)}{a})\\ &\ll x(\log x)^{۳}\end{aligned}$$

حکم ثابت شد.

(iii)

قضیه‌ی دیریکله: فرض کنید Q و α اعداد حقیقی باشند و $Q \ge ۱$.
در این صورت اعداد صحیح a, q با شرایط زیر موجودند

$$۱ \le q \le Q, (a,q) = ۱, |\alpha - \frac{a}{q}| < \frac{۱}{qQ}$$

اثبات (iii): قرار می‌دهیم $N = \lfloor Q \rfloor$. فرض کنید برای عددی طبیعی مانند q با $q \le Q$ داشته باشیم $\{q\alpha\} \in [۰, \frac{۱}{N+۱})$. اگر $a = \lfloor q\alpha \rfloor$، آن‌گاه

$$۰ \le \{q\alpha\} = q\alpha - \lfloor q\alpha \rfloor = q\alpha - a < \frac{۱}{N+۱}$$

$$|\alpha - \frac{a}{q}| < \frac{۱}{q(N+۱)} < \frac{۱}{qQ}$$

هم‌چنین اگر برای $q \le Q$ای داشته باشیم $\{q\alpha\} \in [\frac{N}{N+۱}, ۱)$. اگر $a = \lfloor q\alpha \rfloor + ۱$، آن‌گاه

$$\frac{N}{N+۱} \le \{q\alpha\} = q\alpha - a + ۱ < ۱$$

$$\Rightarrow |q\alpha - a| \le \frac{۱}{N+۱} \Rightarrow |\alpha - \frac{a}{q}| \le \frac{۱}{q(N+۱)} < \frac{۱}{qQ}$$

پس در این حالات حکم درست است. اکنون اگر برای هر $q \in \{۱, ۲, \dots, N\}$ داشته باشیم $\{q\alpha\} \in [\frac{۱}{N+۱}, \frac{N}{N+۱}]$، آن‌گاه N عدد حقیقی $\{q\alpha\}$ در $N-۱$ بازه‌ی $[\frac{i}{N+۱}, \frac{i+۱}{N+۱})$ برای $i = ۱, ۲, \dots, N-۱$ قرار دارند و بنابر اصل لانه‌کبوتری $i \in \{۱, \dots, N\}$ و $q_۱, q_۲ \in \{۱, \dots, N\}$ موجود است به طوری که

$$q_۱ < q_۲, \{q_۱\alpha\}, \{q_۲\alpha\} \in [\frac{i}{N+۱}, \frac{i+۱}{N+۱})$$

اگر $q = q_۲ - q_۱ \in [۱, N-۱]$ و $a = \lfloor q_۲\alpha \rfloor - \lfloor q_۱\alpha \rfloor$، آن‌گاه

$$\begin{aligned}|q\alpha - a| &= |(q_۲\alpha - \lfloor q_۲\alpha \rfloor) - (q_۱\alpha - \lfloor q_۱\alpha \rfloor)|\\ &= |\{q_۲\alpha\} - \{q_۱\alpha\}| < \frac{۱}{N+۱} < \frac{۱}{Q}\\ &\Rightarrow |\alpha - \frac{a}{q}| < \frac{۱}{qQ}\end{aligned}$$

اثبات حکم کامل شد.

مراجع

[1] Steven J. Miller, Ramin Takloo-Bighash - The Circle Method

[2] R. C. Vaughan - The Hardy-Littlewood Method (Second Edition), Cambridge University Press

[3] Ian N. Petro - Vinogradov’s Three Primes Theorem

[4] Melvyn B. Nathanson - Additive Number Theory (The Classical Bases) , Springer

[5] I. M. Vinogradov - The Method of Trigonometrical Sums in the Theory of Numbers

مسأله

مسأله ۱. G گروهی متناهی است و $f : G \to G$ همریختی‌ای که بیش از $\frac{3}{4}$ از اعضای G را به معکوس آنها می‌نگارد. ثابت کنید $f(x) = x^{-1}$ برای هر $x \in G$ و همچنین G آبلی است. به علاوه با ذکر یک مثال تحقیق کنید این احکام در حالتی که همریختیِ $f : G \to G$، دقیقاً $\frac{3}{4}$ از اعضای G را به معکوس آنها تصویر کند، لزوماً صادق نیستند.

مسأله ۲. فرض کنید G یک گروهِ غیرآبلی و متناهی باشد. نشان دهید اعضای $g, h, a \in G$ وجود دارند به طوری که $g \neq h$، $h = aga^{-1}$ و $gh = hg$.[1]

مسأله ۳. R حلقه‌ای است متناهی (که ممکن است یکدار یا جابجایی نباشد.) با این ویژگی که برای هر $a, b \in R$، یک عنصرِ $c \in R$ موجود است به قسمی که $a^2 + b^2 = c^2$. ثابت کنید برای هر $a, b, c \in R$، $d \in R$ای موجود است که تساویِ $2abc = d^2$ را برآورده می‌کند.

مسأله ۴. $(G, *)$ یک گروه است به قسمی که

- G زیرمجموعه‌ای است از $\mathbb{R}^3$.
- برای هر $a, b \in G$، حداقل یکی از تساوی‌های $a \times b = a * b$ یا $a \times b = \vec{0}$ رخ می‌دهد که در آن $\times$ نمایانگرِ ضرب خارجی در $\mathbb{R}^3$ است.

نشان دهید $a \times b = \vec{0}$ برای هر $a, b \in G$.

مسأله ۵. V فضایی برداری است بر میدانِ k که دارای پایه‌ای شمارا و نامتناهی است. حلقه‌ی اندومورفیسم‌های V یا $End(V)$ (یعنی مجموعه‌ی تمامی نگاشت‌های k-خطیِ $V \to V$ که با اعمالِ جمع نگاشت‌های خطی و ترکیب نگاشت‌ها به عنوانِ ضرب، تشکیل یک حلقه می‌دهد.) را E می‌نامیم. نشان دهید تنها ایده‌آل‌های دوطرفه‌ی E عبارتند از ایده‌آلِ صفر، E و ایده‌آلِ متشکل از تمامی اندومورفیسم‌هایی که رتبه‌شان متناهی است.

مسأله ۶. نشان دهید هر میدانی که گروه ضربی‌اش متناهی مولد[2] باشد متناهی است.

[1] مطرح شده در سی و هفتمین مسابقه‌ی ریاضی دانشجویی کشور. راه‌حلِ ارائه شده در اینجا با راه‌حلِ رسمی در سایتِ ims.ir متفاوت است.

[2] finitely generated

مسأله ۷. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی ثابت و غیرپیوسته است و به ازای تابعی مانندِ F داریم: $f(x+y) = F(f(x), f(y))$ برای هر $x, y \in \mathbb{R}$. ثابت کنید f اکیداً یکنواست.

مسأله ۸. تابع پیوسته‌ی $f_0 : [0,1] \to \mathbb{R}$ مفروض است. دنباله‌ی توابعِ $\{f_n : [0,1] \to \mathbb{R}\}_{n \geq 0}$ را به طور استقرایی با $f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\mathrm{d}t$ تعریف می‌کنیم. فرض کنید $f_k(1) = \frac{1}{(k+1)!}$ به ازای یک $k \in \mathbb{N}$. نشان دهید $x_0 \in [0,1]$ وجود دارد به قسمی که $f_0(x_0) = x_0$.

مسأله ۹. الف) ثابت کنید یک تابع منحصربه‌فردِ $f : [1, \infty) \to [0, \infty)$ یافت می‌شود به طوری‌که:

$$\forall x \geq 1 : e^{f(x)} = \frac{f(x)}{x} + x$$

ب) نشان دهید که برای این تابع، اولاً $\lim_{x \to \infty} x(f(x) - \ln x) = 0$ و ثانیاً دنباله‌ی $\{a_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \ln n!\}_{n=1}^{\infty}$ همگراست.

مسأله ۱۰. برای تابعِ

$$f(x) = \frac{1}{1 + 2x + \cdots + 1389x^{1388}}$$

که حولِ مبدأ تعریف شده و هموار است، $f^{(1390)}(0)$ را بیابید.

مسأله ۱۱. ثابت کنید نمی‌توان ناشمارا زیرمجموعه‌ی مجزا و همیمورف با T (منظور شکل حرف انگلیسیِ T است که می‌توان آن را به عنوان زیرفضای $\{1\} \times [-1,1] \cup [0,1] \times \{0\}$ از $\mathbb{R}^2$ در نظر گرفت.) در صفحه پیدا کرد.

مسأله ۱۲. فرض کنید $(H, \langle , \rangle)$ یک فضای ضرب داخلیِ مختلط باشد و $T : H \to H$ عملگری خطی با این ویژگی که

$$\forall x \in H : |\langle Tx, x \rangle| \leq \| x \|^2$$

$\mu \in \mathbb{C}$ با $|\mu| = 1$ را مقدارویژه‌ای از این عملگر بگیرید و

$$E = \{x \in H \mid Tx = \mu x\}$$

را فضای ویژه‌ی متناظرش. ثابت کنید مکمل متعامدِ E یعنی $E^\perp$، تحت T ناورداست: $T(E^\perp) \subseteq E^\perp$.

مسأله ۱۳. فرض کنید $U \subseteq \mathbb{C}$ باز و همبند و $f, g : U \to \mathbb{C}$ توابعی تحلیلی باشند که $|f| + |g|$ ثابت است. ثابت کنید f و g توابعی ثابت هستند.[3]

مسأله ۱۴. (خشایار فیلُم) ثابت یا رد کنید: تابعی هولومورف و پوشا از دیسک باز واحد $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ به $\mathbb{C}$ موجود است که مشتقش در هیچ نقطه‌ای صفر نمی‌شود.

[3] مطرح شده در سی و ششمین مسابقه‌ی ریاضی دانشجویی کشور. راه‌حلِ ارائه شده در اینجا با راه‌حل رسمی در سایتِ ims.ir متفاوت است.

مسأله ۱۵. (ابوالفضل طاهری) فرض کنید (X, d) یک فضای متریک فشرده باشد. می‌گوییم $x, y \in X$ را می‌توان از هم جدا کرد اگر زیرمجموعه‌های بازِ U, V از X موجود باشند به طوری که $x \in U$، $y \in V$ و $U \cap V = \emptyset$ و $X = U \cup V$. نشان دهید اگر نتوان دو نقطه‌ی x, y از X را جدا کرد، آنگاه یک زیرمجموعه‌ی همبند از X وجود دارد که شامل هردوی x, y است. (اگر X فشرده نباشد چطور؟)

مسأله ۱۶. (عرفان صلواتی) فرض کنید $x_۱, x_۲, \dots$ دنباله‌ای کراندار در فضای هیلبرتِ H باشد. تعریف کنید:

$$C_۰ = \{\sum_{n=۱}^{N} t_n x_n \mid N \in \mathbb{N}, t_n \geq ۰\,,\ \sum_{n=۱}^{N} t_n = ۱\}$$

$$C = \{\sum_{n=۱}^{\infty} t_n x_n \mid t_n \geq ۰\,,\ \sum_{n=۱}^{\infty} t_n = ۱\}$$

نشان دهید $\bar{C} = \bar{C}_۰$. آیا لزوماً $\bar{C}_۰ \subseteq C$ برقرار است؟

مسأله ۱۷. هریک از اعداد حقیقی را با یکی از رنگ‌های آبی یا قرمز رنگ کرده‌ایم. می‌دانیم که تابعِ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ وجود دارد با این ویژگی که اگر رنگِ x و y متفاوت باشد، آنگاه:

$$\min\{f(x), f(y)\} \leq |x - y|$$

ثابت کنید هر بازه‌ی باز از $\mathbb{R}$ شامل زیربازه‌ای باز است که رنگ تمامی نقاط آن یکسان است.

مسأله ۱۸. A را یک ماتریس متقارن و $n \times n$ حقیقی بگیرید. نشان دهید اگر رتبه‌ی این ماتریس $n - ۱$ باشد، آنگاه $k \in \{۱, \dots, n\}$ موجود است به قسمی که رتبه‌ی ماتریسی که از حذف سطرِ kام و ستونِ kام از A حاصل می‌شود $n - ۱$ است.

مسأله ۱۹. فرض کنید $v_۰$ بردارِ صفر در $\mathbb{R}^n$ و $v_۱, v_۲, \dots, v_{n+۱} \in \mathbb{R}^n$ به گونه‌ای باشند که برای هر $۰ \leq i, j \leq n + ۱$، $|v_i - v_j|$ عددی گویا شود ($|x|$ به معنای نرم اقلیدسیِ $x \in \mathbb{R}^n$ است). ثابت کنید $v_۱, \dots v_{n+۱}$ روی میدانِ اعداد گویا وابسته‌ی خطی‌اند.

مسأله ۲۰. A و B ماتریس‌هایی مربعی با درایه‌های مختلط هستند به طوری که $AB - BA$ به صورت ترکیب خطیِ A و B است. نشان دهید A، B حداقل یک بردار ویژه‌ی (غیرصفر) مشترک دارند.

مسأله ۲۱. (M, g) یک خمینه‌ی ریمانی است. تابعک‌های طول و انرژی را که با $L(\gamma)$ و $E(\gamma)$ نشان می‌دهیم، بر فضای خم‌های مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته‌ی $\gamma : [۰, ۱] \to M$ با ضابطه‌های زیر تعریف می‌شوند:

$$L(\gamma) = \int_۰^۱ \sqrt{g_{\gamma(s)}\big(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s)\big)}\mathrm{ds}$$

$$E(\gamma) = \int_۰^۱ g_{\gamma(s)}\big(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s)\big)\mathrm{ds}$$

ثابت کنید اگر خمِ γ، E را مینیمم کند L را نیز مینیمم می‌کند و در نتیجه یک ژئودزیک روی M است.

مسأله‌های پیشنهادی خود را به همراه راه‌حل برای ما بفرستید:

mathematicsjournal@gmail.com

پاسخ مسأله‌ها

پاسخ ۱. قرار می‌دهیم:
$$A=\{a\in G \mid f(a)=a^{-1}\}$$
پس $|A|>\frac{3}{4}|G|$. یک $x\in A$ دلخواه را تثبیت کنید. زیرمجموعه‌ی $\{xa \mid a\in A\}$ را xA می‌نامیم. به دلیل دوسویی بودنِ $\begin{cases}G\to G\\ g\mapsto xg\end{cases}$، $|xA|=|A|$. اعضای $xA\cap A$ با x جابجا می‌شوند. چرا که هر $z\in A\cap xA$، به ازای $y\in A$ای به صورت $z=xy$ قابل بیان است. حال چون x، y و z همگی به A تعلق دارند، f هریک از آنها را به وارونشان تصویر می‌کند و داریم:
$$y^{-1}x^{-1}=(xy)^{-1}=z^{-1}=f(z)=f(xy)=f(x)f(y)$$
$$=x^{-1}y^{-1}\Rightarrow xy=yx\Rightarrow xz=zx$$
پس $xA\cap A\subseteq C_G(x)$[1]. ولی:
$$|C_G(x)|\ge|xA\cap A|\ge|xA|+|A|-|G|=2|A|-|G|$$
$$>2(\frac{3}{4}|G|)-|G|=\frac{1}{2}|G|\Rightarrow[G:C_G(x)]<2$$
پس اندیس زیرگروهِ مرکزسازِ x یا $C_G(x)$ در G باید یک باشد که تنها وقتی می‌تواند رخ دهد که $G=C_G(x)$ که این هم به معنای تعلقِ x به مرکزِ G است. بنابراین باید: $A\subseteq Z(G)$. لذا مرکزِ G یا همان $Z(G)$ زیرگروهی از G است که بیش از نیمی از اعضای گروه را دربردارد که دوباره به معنای منطبق بودنِ آن بر کلِ گروه است. پس G آبلی است. برای اتمام کار باید نشان دهیم که f برابر است با $\begin{cases}h:G\to G\\ h(g)=g^{-1}\end{cases}$، نگاشتی که چون G آبلی است، خود یک همریختی خواهد بود. بدین منظور همریختیِ $f^{-1}\circ h:G\to G$ را در نظر می‌گیریم، همریختی‌ای که هسته‌اش چون $f|_A=h|_A$، A و بنابراین حداقل نیمی از اعضای G را در بردارد و به ناچار باید برابر با G باشد، امری که به معنای بدیهی بودن همریختیِ $f^{-1}\circ h:G\to G$ یا معادلاً $f=h$ است.

در انتها برای یافتن مثالی که نشان دهد با جایگزین کردن شرطِ $|A|>\frac{3}{4}|G|$ با $|A|\ge\frac{3}{4}|G|$ ممکن است حکم مسأله درباره‌ی f برقرار نباشد، توجه کنید به فرض آنکه تعداد اعضای زیرمجموعه‌ی A متشکل از نقاطی که تحت f به وارون خود تصویر می‌شوند $\frac{3}{4}|G|$ باشد، نامساوی‌هایی که در بالا داشتیم به صورتِ
$$\forall x\in A:\quad [G:C_G(x)]\le 2$$
در می‌آیند. ولی $[G:C_G(x)]$ تعداد اعضای کلاس تزویجیِ x است. پس زیرمجموعه‌ی A از G حداقل $\frac{3}{4}$ اعضای G را در بردارد و برای هر $x\in A$، $|\bar{x}|$ یک است یا دو. لذا یک ایده برای یافتنِ مثال مطلوب، در نظر گرفتنِ گروه متناهی‌ای است که هر کلاس تزویجیِ آن یک یا دو عضوی باشد. مثالی از چنین گروهی، گروه کواترنیون‌های ۸ عضوی
$$Q_8=\{\pm 1,\pm i,\pm j,\pm k\}$$
است. اگر همریختیِ f را خودریختی داخلیِ
$$\begin{cases}f:Q_8\to Q_8\\ f(x)=ixi^{-1}=ix(-i)\end{cases}$$
از Q_8 تعریف کنیم، آنگاه f به تعدادِ $\frac{3}{4}|Q_8|=6$ تا از عناصرِ G را به معکوسِ آنها می‌نگارد: همه‌ی اعضا به جز $\pm i$ را.

پاسخ ۲. در واقع باید نشان دهیم که در هر گروهِ متناهی و غیر آبلی دو عنصر متمایز در یک کلاس تزویجی موجودند که با هم جابجا می‌شوند. فرض کنید اینگونه نباشد و گروهِ متناهی و غیر آبلی‌ای که حکم را نقض می‌کند چنان بگیرید که تعداد اعضایش حداقل مقدار ممکن باشد و این گروه را G بنامید. پس اگر دو عنصر مزدوج در G با هم جابجا شوند، باید مساوی باشند. از روش انتخابِ G، اگر زیرگروهِ سره‌ای از G غیر آبلی باشد باید در حکم مسأله صدق کند، یعنی دو عنصر مزدوج و متمایز در زیرگروهِ مذکور با هم جابجا شوند. ولی چنین عناصرِ متمایزی در G نیز با هم مزدوج خواهند بود و جابجا خواهند شد و این ویژگی در نظر گرفته شده برای G را نقض می‌کند. پس ثابت کردیم که هر زیرگروهِ سره از G آبلی است. در مرحله‌ی بعد نشان می‌دهیم که:

$(*)$ مرکزِ G بدیهی است: $Z(G)=\{e\}$.

برای اثبات توجه کنید که اگر چنین نباشد، تعداد اعضای گروهِ خارج‌قسمتیِ $\frac{G}{Z(G)}$ از G کمتر خواهد بود. پس دوباره با توجه به روشِ انتخابِ G، گروهِ خارج‌قسمتیِ مذکور یا آبلی است یا اینکه دو عنصر مزدوج و متمایز از آن با هم جابجا می‌شوند. خواهیم دید که هر دو حالت به تناقض منتهی می‌گردد: اگر $\frac{G}{Z(G)}$ آبلی باشد، با انتخابِ $a,b\in G$ به قسمی که $ab\neq ba$ (توجه کنید که G آبلی نبود.)، اعضای $aZ(G)$ و $bZ(G)$ از $\frac{G}{Z(G)}$ هم جابجا می‌شوند و این به معنای وجود یک عنصرِ $c\in Z(G)$ است که تساویِ $ab=bac$ را در G برآورده می‌کند. ولی آنگاه $b^{-1}ab$ که به کلاس تزویجیِ a در G تعلق دارد، برابرِ ac خواهد بود و لذا چون $c\in Z(G)$، با a جابجا خواهد شد. پس باید از خواصِ G: $b^{-1}ab=a$ که با توجه به چگونگی انتخابِ a و b نمی‌تواند رخ دهد. در ادامه، حالت دوم را در نظر می‌گیریم: $\frac{G}{Z(G)}$ دو عنصر مزدوج و متفاوت همچون همدسته‌های $xyx^{-1}Z(G)$ و $yZ(G)$ دارد که در گروهِ مذکور با هم جابجا می‌شوند یا معادلاً به ازای یک $z\in Z(G)$، تساویِ $(xyx^{-1})y=y(xyx^{-1})z$ را در G داریم. ولی

[1] در حل سؤال‌های ۱ و ۲ مرکزسازِ عنصرِ a از G را به $C_G(a)$ و کلاس تزویجیِ دربردارنده‌ی آن را به $\bar{a}$ نشان داده‌ایم.

دوباره این را می‌توان به صورتِ $y^{-۱}(xyx^{-۱})y = (xyx^{-۱})z$ نوشت که جابجا شدنِ دو عنصر مزدوجِ $xyx^{-۱}$ و $y^{-۱}(xyx^{-۱})y$ در G را بدست می‌دهد. مجدداً این تنها در صورت تساوی این دو عنصر می‌تواند رخ دهد: $(xyx^{-۱})y = y^{-۱}(xyx^{-۱})y$. تساوی اخیر به معنای جابجا شدن عناصرِ $xyx^{-۱}$ و y از G است که در یک کلاس تزویجی واقعند. بنابراین دوباره تنها وقتی می‌تواند رخ دهد که $y = xyx^{-۱}$ و این با $xyx^{-۱}Z(G) \neq yZ(G)$ در $\frac{G}{Z(G)}$ تناقض دارد و اثباتِ $(*)$ تکمیل می‌شود.

حال از $(*)$ داریم:

$(**)$ رابطه‌ی جابجا شدن بر $G-\{e\}$ ترایایی است: اگر x، y و z عناصری متعلق به G و متفاوت با همانی باشند به قسمی که $xy = yx$ و $yz = zy$، آنگاه $xz = zx$.

برای دیدن دلیل، توجه کنید که $xy = yx$ و $yz = zy$ با به ترتیب $x \in C_G(y)$ و $z \in C_G(y)$ معادلند. زیرگروهِ $C_G(y)$ از G سره است، چرا که در غیر این صورت y در مرکزِ G واقع می‌شود و این با $(*)$ تناقض دارد. ولی گفتیم زیرگروه‌های سره‌ی G آبلی‌اند و بنابراین x و z که به $C_G(y)$ تعلق داشتند، باید با هم جابجا شوند.

به کمک گزاره‌های ثابت شده، حل را تکمیل خواهیم کرد: $a \in G-\{e\}$ را دلخواه بگیرید. اگر به ازای عناصرِ متمایزِ x و y متعلق به کلاس تزویجِ $\bar{a}$، $C_G(x)$ و $C_G(y)$ یکدیگر را در عضوی متفاوت با همانی مانندِ z قطع کنند، باید بنابر $(**)$ x با y جابجا شود (توجه کنید که شرایط استفاده از $(**)$ مهیا است: $e \neq z$ و به علاوه x و y که هردو به یک کلاس تزویج تعلق داشتند و لذا مزدوج بودند، متمایزند. پس هیچ یک از x و y نیز همانی نیست.) که این هم چون عناصرِ $y \neq x$ از G مزدوج بودند (در واقع هر دو با a مزدوجند.) با توجه به فرض خلف امکان ندارد رخ دهد. پس برای هر $x, y \in \bar{a}$ با $x \neq y$: $C_G(x) \cap C_G(y) = \{e\}$. این نشان می‌دهد که برای هر $a \in G - \{e\}$، زیرمجموعه‌های $C_G(x) - \{e\}$ که در آن x میان عناصرِ $\bar{a}$ تغییر می‌کند دوبدو مجزا هستند. از طرف دیگر، تعداد اعضای چنین زیرمجموعه‌ای برابرِ $|C_G(a)| - ۱$ است، زیرا اگر x با a مزدوج باشد، زیرگروه‌های $C_G(x)$ و $C_G(a)$ از G هم مزدوج و به تبع آن تعداد اعضایشان برابر خواهد بود. پس برای هر $a \in G - \{e\}$:

$$|\cup_{x\in\bar{a}} C_G(x) - \{e\}| = |\cup_{x\in\bar{a}} (C_G(x) - \{e\})|$$

$$= \sum_{x\in\bar{a}} |C_G(x) - \{e\}| = |\bar{a}|(|C_G(a)| - ۱) = |G| - |\bar{a}|$$

که در تساوی آخر از این استفاده کردیم که تعداد اعضای کلاس تزویجیِ a یا به عبارت دیگر $\bar{a}$، برابر است با اندیسِ مرکزسازِ a، یعنی همان $[G : C_G(a)]$. پس با تثبیتِ $a \neq e$ در G، $\cup_{x\in\bar{a}}C_G(x) - \{e\}$ بر $G - \{e\}$ منطبق نیست. چرا که در غیر این صورت از تساوی فوق باید $\bar{a}$ برابر یک شود. ولی تک‌عضوی بودنِ کلاس تزویجِ متناظرِ a به معنای تعلقِ a به مرکزِ G است، امری که با توجه به $(*)$ نمی‌تواند رخ دهد. پس می‌توان یک $b \in G - \cup_{x\in\bar{a}}C_G(x) - \{e\}$ برگزید که غیرهمانی خواهد بود. با استدلالی مشابه، $|\cup_{x\in\bar{b}} C_G(x)| = |G| - |\bar{b}|$. ولی توجه کنید که زیرمجموعه‌های $\cup_{x\in\bar{a}}C_G(x)-\{e\}$ و $\cup_{x\in\bar{b}}C_G(x)-\{e\}$ از $G-\{e\}$ مجزا هستند. چرا که اگر اینگونه نباشد، مزدوج‌های $uau^{-۱}$ و $vbv^{-۱}$ از به ترتیب a و b موجود خواهند بود به قسمی که $C_G(uau^{-۱}) \cap C_G(vbv^{-۱})$ شامل عضوی غیرهمانی همچون c است. پس از $(**)$، $uau^{-۱}$ و $vbv^{-۱}$ جابجا می‌شوند (توجه کنید که این دو همانی نیستند زیرا $a, b \neq e$). ولی این نشان می‌دهد که b با مزدوجِ $(v^{-۱}u)a(v^{-۱}u)^{-۱}$ از a جابجا می‌شود. در حالی که این به دلیلِ $b \notin \cup_{x\in\bar{a}}C_G(x)$ نمی‌تواند رخ دهد. تا اینجا نشان دادیم که زیرمجموعه‌های $\cup_{x\in\bar{a}}C_G(x) - \{e\}$ و $\cup_{x\in\bar{b}}C_G(x) - \{e\}$ از $G - \{e\}$ مجزا و با تعداد اعضای به ترتیب $|G| - |\bar{a}|$ و $|G| - |\bar{b}|$ هستند. لذا:

$$(|G| - |\bar{a}|) + (|G| - |\bar{b}|) \leq |G| - ۱$$

که نامساوی $|\bar{a}| + |\bar{b}| \geq |G| + ۱$ را بدست می‌دهد. این نامساوی نمی‌تواند برقرار باشد، زیرا $\bar{a}$ و $\bar{b}$ کلاس‌های تزویج متمایزی از G هستند (چرا که به دلیلِ $b \notin \cup_{x\in\bar{a}}C_G(x)$، b با a مزدوج نیست.) و لذا زیرمجموعه‌ی $\bar{a}\cup\bar{b}$ از G، $|\bar{a}| + |\bar{b}|$ تا عضو دارد. پس به تناقض رسیدیم و فرض خلف باطل است.

پاسخ ۳. زیرمجموعه‌ی X از R را برابر با $\{x^{۲} \mid x \in R\}$ تعریف می‌کنیم. شرطی که در صورت مسأله بر حلقه‌ی R قرار داده شده به آن معنی است که X تحت جمع بسته است. در ادامه ثابت می‌کنیم که X تحت تفریق نیز بسته است. برای یک $a \in R$ دلخواه، نگاشتِ $\begin{cases} X \to X \\ y \mapsto a^{۲} + y \end{cases}$ به دلیل بسته بودنِ X تحت جمع خوش‌تعریف است. این نگاشت به وضوح یک به یک است و لذا چون R و به تبع آن X متناهی‌اند، این نگاشت پوشا نیز هست. پس برای هر $b \in R$ دلخواه باید $b^{۲} \in X$ در بردِ این نگاشت باشد، امری که نشان می‌دهد $b^{۲} - a^{۲} \in X$. تا اینجا دیدیم که X تحت جمع و تفریق بسته است. در مرحله‌ی بعد نشان می‌دهیم که برای هر $a, b \in R$: $ab + ba \in X$. این از آنجا ناشی می‌شود که می‌توان $ab + ba$ را با جمع و تفریق از عناصرِ X بدست آورد: $ab + ba = (a + b)^{۲} - a^{۲} - b^{۲}$. در نهایت باید نشان دهیم که هرگاه $a, b, c \in R$، به ازای $d \in R$ مناسبی $۲abc = d^{۲}$ یا معادلاً $۲abc \in X$. با توجه به خواصی که در بالا برای X برشمردیم، تنها کافی است نشان دهیم $۲abc$ به صورت جمع و تفریقِ عناصری به فرمِ $xy + yx$ که در آن $x, y \in R$ قابل بیان است. این را هم می‌توان در تساویِ زیر مشاهده کرد:

$$۲abc = \big(a(bc) + (bc)a\big) - \big(b(ca) + (ca)b\big) + \big(c(ab) + (ab)c\big)$$

پاسخ ۴. عنصر همانیِ G را با e نشان می‌دهیم. برای هر $a \in G$، بنابر

فرض مسأله، یا داریم $a \times e = \vec{0}$ که در چنین حالتی به شرط آنکه $e \neq \vec{0}$ بردارِ a در $\mathbb{R}^3$ مضربی از e خواهد بود یا آنکه

$$a \times e = a * e = a \Rightarrow a \perp a \times e = a \Rightarrow a = \vec{0}$$

پس اگر $e \neq \vec{0}$، هر عنصر دلخواهِ $a \in G \subseteq \mathbb{R}^3$ یا هم‌راستا با e خواهد بود یا صفر که در این حالت حکمِ مطلوب برقرار است. بنابراین در ادامه توجه خود را به حالتی معطوف می‌کنیم که: $e = \vec{0}$. آنگاه با تثبیت یک $a \in G - \{e = \vec{0}\}$، برقراری هریک از تساوی‌های $a \times a^{-1} = a * a^{-1} = e$ یا $a \times a^{-1} = 0$ به معنای هم‌راستا بودنِ a و وارونش خواهد بود. به کمکِ این مطب، با استقرایی ساده بر $n \in \mathbb{N}$، می‌توان نتیجه گرفت که بردارهای $a^n = \overbrace{a * \cdots * a}^{n \text{ بار}}$ و a از $\mathbb{R}^3$ هم‌راستا هستند: دوباره با به کاربردنِ ویژگیِ مفروض برای G در صورتِ مسأله، $a^n \times a^{-1} \in \mathbb{R}^3$ یا صفرخواهد شد یا ناصفر و برابر با $a^n * a^{-1} = a^{n-1}$. در حالتِ نخست، چون $a^{-1} \neq \vec{0}$ (زیرا در غیر این صورت a^{-1} و به تبع آن a برابر با $e = \vec{0}$ خواهند بود که با روش برگزیدنِ a در تناقض است.) باید a^n مضربی از a^{-1} و در نتیجه مضربی از a باشد که همان چیزی است که در پی آن بودیم. حالتِ دوم یعنی $a^n \times a^{-1} = a^{n-1} \neq \vec{0}$ رخ نمی‌دهد. چرا که از آن نتیجه می‌شود a^{n-1} و a^{-1} بر هم عمودند، در حالی که این دو از فرض استقرا و آنچه که در بالا ثابت شد، مضارب ناصفری از بردارِ a هستند. پس برای یک عنصر دلخواهِ $a \in G - \{e\}$ اثبات کردیم که a^{-1} و a^n ها برای هر $n \in \mathbb{N}$ هم‌راستای a هستند. با اعمالِ این مطلب به a^{-1} این گزاره‌ی کلی‌تر حاصل می‌شود که برای هر $n \in \mathbb{Z}$، $a^n \in \mathbb{R}^3$ مضربی از $a \in \mathbb{R}^3$ است. در جمع‌بندی آنچه که تا اینجا حاصل گردید:

$(*)$ $e = \vec{0}$ و برای هر $a \in G - \{e\}$، عناصر زیرگروه دوری تولید شده توسطِ a به زیرفضایی از $\mathbb{R}^3$ که a تولید می‌کند تعلق دارند و به علاوه a^{-1} مضرب ناصفری است از a.

در ادامه ادعا می‌کنیم که:

$(**)$ اگر $a \in G$ و $b \in G$ مضربی از بردارِ a نباشد، آنگاه $a \perp b$.

برای دیدن دلیل توجه کنید که باید نشان دهیم که اگر برای $a, b \in G$، $a \times b \neq \vec{0}$، آنگاه $a \perp b$. ضرب خارجیِ این دو بردار صفر نیست و لذا باید $a * b = a \times b$. ضرب خارجیِ این بردار و a^{-1} صفر نیست، چرا که با توجه به $(*)$ صفر شدن این ضرب خارجی به معنای آن خواهد بود که ضرب خارجیِ $a \times b$ و a صفر است که امکان‌پذیر نیست چراکه این دو بردارِ غیر صفر بر هم عمودند. پس باید:

$$b = a^{-1} * (a * b) = a^{-1} \times (a \times b)$$

که صفر بودن ضرب داخلیِ b و a^{-1} و از آنجا b و a را بدست خواهد داد. در نهایت با استفاده از $(*)$ و $(**)$، حکم مطلوب مبنی بر صفر بودن ضرب خارجیِ هر دو عنصر از G را اثبات خواهیم کرد. فرض کنید اینگونه نباشد و $a \in G - \{e = \vec{0}\}$ را دلخواه بگیرید. از فرض خلف G مشمول در زیرفضای $Span\{a\}$ از $\mathbb{R}^3$ نیست و لذا $b \in G$ موجود است به قسمی که ضرب خارجیِ عناصرِ a و b از G صفر نیست یا معادلاً بردارهایی ناصفر و غیر هم‌راستا هستند. پس از ویژگی مفروض برای G در صورتِ مسأله، باید $a * b = a \times b$ و به علاوه بنابر $(**)$ a و b بر هم عمودند. پس سه بردار ناصفرِ a، b و $a*b = a \times b$ از $\mathbb{R}^3$ دوبدو متعامدند و لذا ضرب هردوتایی از آنها در G با ضرب خارجی‌شان در $\mathbb{R}^3$ یکسان است. بنابراین پایه‌ای برای $\mathbb{R}^3$ معین می‌کنند و علی‌الخصوص هیچ بردار غیر صفری نمی‌تواند بر هر تمامی آنها عمود باشد. این در حالی است که با توجه به $(**)$، $a^2 * b = a * (a * b)$ باید بر a و $a * b$ عمود باشد و با به کاربردن مجددِ $(**)$، اگر $a^2 \neq \vec{0}$ بر b هم عمود خواهد شد (با استفاده از $(*)$، $a^2 \neq \vec{0}$ نشان می‌دهد که a^2 مضرب ناصفری از a است و لذا همانندِ بردار اخیر، ضرب خارجیِ a^2 در b هم ناصفر است.) پس چون همان‌گونه که گفتیم هیچ بردار ناصفری از $\mathbb{R}^3$ نمی‌تواند بر هر سه بردارِ b و $a * b = a \times b$ عمود باشد، یا باید $a^2 = \vec{0}$ یا آنکه

$$a^2 * b = a * (a * b) = a \times (a \times b) = \vec{0}$$

تساویِ اخیر به دلیل آنکه بردارهای ناصفرِ a و $a \times b$ متعامد بودند رخ نمی‌دهد و لذا $a^2 = \vec{0} = e$. $a \in G - \{e\}$ دلخواه بود و در نتیجه هر عنصر غیرهمانی از گروهِ G از مرتبه‌ی دو است. به وضوح چنین گروهی آبلی است. در حالی که G نمی‌تواند آبلی باشد، زیرا برای همان a, b مورد بحث در بالا: $a * b = a \times b = -b \times a = -b * a \neq \vec{0}$. تناقض حاصله حکم مطلوب را نتیجه می‌دهد.

پاسخ ۵. سه زیرمجموعه‌ای از $E = End(V)$ که در صورت مسأله ذکر شده‌اند ($\{0\}$، $End(V)$ و زیرمجموعه‌ی شامل اندومورفیسم‌هایی که رتبه‌شان متناهی است.) به وضوح ایده‌آل‌های دوطرفه‌ای از حلقه‌ی $E = End(V)$اند. حال بالعکس باید نشان دهیم که هر ایده‌آل سره و ناصفرِ I از این حلقه باید یکی از این سه باشد. بدین منظور کافی است دو مورد اثبات شوند: اگر اندومورفیسمِ $f : V \to V$ ناصفر باشد، آنگاه هر اندومورفیسمی از V با رتبه‌ی متناهی در ایده‌آل دوطرفه‌ای از E که f تولید می‌کند واقع است. به علاوه اگر رتبه‌ی f نامتناهی باشد آنگاه ایده‌آل دوطرفه‌ی تولید شده توسط آن بر E منطبق است. مورد اول نشان می‌دهد که I ایده‌آل متشکل از اندومورفیسم‌های با رتبه‌ی متناهی را شامل می‌شود و مورد دوم نشان می‌دهد که I مشمول است در آن و بنابراین اثبات این دو حل را تکمیل خواهد کرد. ابتدا به مورد اول می‌پردازیم: فرض کنید بردارِ $w = f(v)$ در بردِ f ناصفر باشد. فرض کنید $\tilde{f} : V \to V$ با رتبه‌ی متناهی باشد و عناصرِ $w_1 = \tilde{f}(v_1), \ldots, w_n = \tilde{f}(v_n)$ پایه‌ای برای زیرفضای $Im(\tilde{f})$ از V. با اضافه کردن پایه‌ای برای $Ker(\tilde{f})$ به

$\{v_1, \dots, v_n\}$، پایه‌ای برای V بدست می‌آید که آن را β می‌نامیم. حال برای هر $1 \le i \le n$ یک اندومورفیسم یکتای $g_i : V \to V$ موجود است که عنصرِ v_i از پایه‌ی β را به v و سایر عناصر را به صفر می‌برد و همچنین چون بردارهای w و w_i ناصفرند، می‌توان یک اندومورفیسم $h_i : V \to V$ از V را برگزید با این ویژگی که $h_i(w) = w_i$. حال اندومورفیسمِ

$$h_1 \circ f \circ g_1 + \dots h_n \circ f \circ g_n$$

که به ایده‌آل دوطرفه‌ای از $End(V)$ که f تولید می‌کند تعلق دارد، با $\tilde{f}$ برابر است، چرا که بر $Ker(\tilde{f})$ صفر است (هریک از g_iها چنین ویژگی را داشت.) و هر v_i را به

$$h_i\big(f(g_i(v_i))\big) = h_i(f(v)) = h_i(w) = w_i$$

می‌برد و لذا چگونگی عملِ $h_1 \circ f \circ g_1 + \dots h_n \circ f \circ g_n$ و $\tilde{f}$ بر عناصر پایه‌ی β از V یکسان است که تساوی آنها را بدست می‌دهد. پس $\tilde{f}$ عضو ایده‌آل دوطرفه‌ی تولید شده توسط f است. در ادامه به دومین گزاره می‌پردازیم: باید نشان دهیم که اگر رتبه‌ی اندومورفیسمِ $f : V \to V$ نامتناهی باشد، آنگاه ایده‌آل دوطرفه‌ی تولیدشده با آن کل $End(V)$ است یا معادلاً اندومورفیسم همانی 1_V را دربردارد. فرض کنید بردارهای

$$f(a_i) = b_i (i \in \mathbb{N})$$

واقع در بردِ f مستقل خطی باشند. پس زیرمجموعه‌ی $\{b_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ از V مستقل خطی است و قابل گسترش به یک پایه‌ی β' از V. از طرف دیگر طبق فرض مسأله پایه‌ای مانند $\beta'' = \{e_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ برای V موجود است. اندومورفیسم یکتای $f' : V \to V$ موجود است که هر عنصرِ e_i از β'' را به a_i تصویر می‌کند. f'' را اندومورفیسمی از V بگیرید که در پایه‌ی β' تحت آن $b_i \mapsto e_i$ برای هر i و سایر عناصر پایه‌ی مذکور به صفر می‌روند. حال $f'' \circ f \circ f' : V \to V$ متعلق به ایده‌آل دوطرفه‌ای از $End(V)$ که f تولید می‌کند، همانی است چرا هر e_i را ثابت نگاه می‌دارد:

$$f''\big(f(f'(e_i))\big) = f''(f(a_i)) = f''(b_i) = e_i$$

پاسخ ۶. فرض کنید F میدانی باشد با این ویژگی که گروه ضربیِ $(F^\times, \times)$ متناهی مولد یا به عبارت دقیق‌تر یک گروه آبلیِ متناهی مولد است. زیرمیدان اول[2] F برابر با اشتراک تمامی زیرمیدان‌های F تعریف می‌شود و می‌دانیم که یکریخت است با $\mathbb{Q}$ اگر مشخصه‌ی F صفر باشد و یکریخت است با میدان p عضویِ $\mathbb{Z}_p$ اگر مشخصه‌ی F عدد اولِ p باشد. حالت نخست رخ نمی‌دهد چرا که زیرگروه‌های هر گروه آبلیِ متناهی مولد، خود متناهی مولد هستند، در حالی که گروه ضربیِ اعداد گویا $(\mathbb{Q} - \{0\}, \times)$ چنین نیست: اگر اعداد گویای ناصفرِ $\frac{a_1}{b_1}, \dots, \frac{a_n}{b_n}$ مفروض باشند و q را عدد اولی آنقدر بزرگ بگیریم که درتجزیه‌ی هیچ‌یک از اعداد صحیح و ناصفرِ $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$ ظاهر نمی‌گردد، آنگاه q در زیرگروهی از $(\mathbb{Q}-\{0\}, \times)$ که اعداد گویای فوق تولید می‌کنند واقع نخواهد بود. پس مشخصه‌ی F عددی اول همچون p است و می‌توان زیرمیدانِ اول آن $\{n.1_F \mid n \in \mathbb{Z}\}$ را با $\mathbb{Z}_p$ یکی گرفت. حال توجه کنید که «قضیه‌ی ساختاری گروه‌های آبلیِ متناهی مولد» بیان می‌دارد که هر گروهی از این دست، یکریخت است با جمع مستقیمِ تعدادی متناهی گروه دوری. پس اگر مرتبه‌ی تمامی عناصر آن متناهی باشد، خود متناهی خواهد بود. بنابراین کافی است وجودِ یک عنصر ناصفرِ θ از F را که مرتبه‌اش در $(F^\times, \times)$ نامتناهی است به تناقض بکشانیم و این حل را تکمیل خواهد کرد. چنین عنصری از F بر $\mathbb{Z}_p$ (که از طریق یکی گرفتنِ آن با زیرمیدان اول، زیرمیدانی از F در نظر گرفته شد.) جبری نخواهد بود. چرا که در غیر این صورت، $\mathbb{Z}_p[\theta]$ یک توسیع میدانی متناهی از $\mathbb{Z}_p$ و لذا یک میدان متناهی خواهد بود. اگر درجه‌ی این توسیع را k بگیریم، این میدان متناهی p^kعضوی خواهد بود و از آنچه که درباره‌ی میدان‌های متناهی می‌دانیم، باید $\theta^{p^k-1} = 1_F$ که با روش انتخابِ θ در تناقض است. پس این عنصر بر زیرمیدانِ $\mathbb{Z}_p$ از F جبری نیست، امری که نشان می‌دهد کوچکترین زیرمیدانی از F که θ را دربرمی‌گیرد یا به عبارت دیگر $\mathbb{Z}_p(\theta)$، از طریق همریختیِ معین شده با $x \mapsto \theta$ یکریخت است با میدانِ توابع گویا با ضرایبِ در $\mathbb{Z}_p$ یا به عبارت دیگر $\mathbb{Z}_p(x)$. پس F زیرمیدانی یکریخت با $\mathbb{Z}_p(x)$ را شامل می‌شود و لذا با تکرار استدلالی که پیشتر هم به کار رفت، گروه ضربیِ این میدان نیز باید همانندِ گروه ضربیِ F متناهی مولد باشد، در حالی که اینگونه نیست. چرا که می‌توان همان استدلالی که متناهی مولد نبودنِ $(\mathbb{Q} - \{0\}, \times)$ را نتیجه داد تکرار کنیم: با داشتنِ عناصرِ $\frac{p_1(x)}{q_1(x)}, \dots, \frac{p_n(x)}{q_n(x)}$ از $\mathbb{Z}_p(x) - \{0\}$ که در آن چندجمله‌ای‌های $p_1(x), q_1(x), \dots, p_n(x), q_n(x)$ از $\mathbb{Z}_p[x]$ ناصفرند، چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیری متعلق به $\mathbb{Z}_p[x]$ که هیچ‌یک از هیچ‌یک از چندجمله‌ای‌های فوق را نشمارد (توجه کنید که چنین چندجمله‌ای موجود است: $\mathbb{Z}_p[x]$ یک $U.F.D$ است و دارای نامتناهی عنصر تحویل‌ناپذیر.) در زیرگروهی از $(\mathbb{Z}_p(x)^\times, \times)$ که عناصرِ $\frac{p_1(x)}{q_1(x)}, \dots, \frac{p_n(x)}{q_n(x)}$ تولید می‌کنند واقع نخواهد بود.

پاسخ ۷. هر تابع پیوسته و یک به یک یکنواست. بنابراین کافی است نشان دهیم f یک به یک است. برهان خلف: اعداد حقیقیِ $a < b$ موجودند که $f(a) = f(b)$. حال توجه کنید که اگر $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ و $f(c_1) = f(c_2)$، آنگاه با قرار دادنِ $c = |c_1 - c_2|$ خواهیم داشت:

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = f(x + c)$$

این از آنجا ناشی می‌شود که با به کار بردن ویژگیِ مفروض برای f در صورتِ مسأله، برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم:

$$f(x + c_1) = F(f(x), f(c_1)) = F(f(x), f(c_2)) = f(x + c_2)$$

از طرف دیگر نشان می‌دهیم برای هر $n \in \mathbb{N}$، عدد حقیقیِ α موجود است به قسمی که: $f(\alpha + \frac{b-a}{n}) = f(\alpha)$ و سپس به کمک حکم قبلی نتیجه

[2] subfield prime

خواهد شد که هر $\frac{b-a}{n} > 0$ دوره‌ی تناوبی از f است. عدد طبیعیِ n را تثبیت کنید و تابع پیوسته‌ی

$$\begin{cases} g:[a,b-\frac{b-a}{n}]\to\mathbb{R}\\ g(x)=f(x+\frac{b-a}{n})-f(x)\end{cases}$$

را در نظر بگیرید. چون $f(a)=f(b)$: $\sum_{k=0}^{n-1} g(a+k\frac{b-a}{n})=0$، پس g در نقطه‌ای صفر می‌شود (زیرا در غیر این صورت بنابر قضیه‌ی مقدار میانی g یا همواره مثبت خواهد بود یا همواره منفی که با تساوی فوق در تناقض است.)، حکمی که با توجه به ضابطه‌ی تعریف g نتیجه می‌دهد f در دو نقطه به فاصله‌ی $\frac{b-a}{n}$ از هم مقادیری یکسان می‌پذیرد که همان چیزی است که در پی آن بودیم. بنابراین تابع پیوسته‌ی $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دوره‌های تناوبی به دلخواه کوچک دارد که عبارتند از اعدادِ $\frac{b-a}{n}$. اثبات خواهیم کرد که چنین تابع پیوسته‌ای باید ثابت باشد با این روش که برای $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ و $\epsilon>0$ دلخواه نشان می‌دهیم: $|f(x_1)-f(x_2)|<\epsilon$. از آنجا که تحدیدِ f به $[0,b-a]$ پیوسته‌ی یکنواخت است، $\delta>0$ را می‌توان برگزید با این ویژگی که برای هر $x,y\in[0,b-a]$ با $|x-y|<\delta$ داشته باشیم: $|f(x)-f(y)|<\epsilon$. $n\in\mathbb{N}$ را آنقدر بزرگ بگیرید که $\frac{b-a}{n}<\delta$. چون $\frac{b-a}{n}$ یک دوره‌ی تناوبِ f بود:

$$f(x_1)=f\big(x_1-\frac{b-a}{n}\lfloor\frac{x_1}{\frac{b-a}{n}}\rfloor\big)=f\big(\frac{b-a}{n}\{\frac{x_1}{\frac{b-a}{n}}\}\big)$$

و

$$f(x_2)=f\big(x_2-\frac{b-a}{n}\lfloor\frac{x_2}{\frac{b-a}{n}}\rfloor\big)=f\big(\frac{b-a}{n}\{\frac{x_2}{\frac{b-a}{n}}\}\big)$$

که در آن $\{\}$ نمادِ جز اعشاری است. ولی $\frac{b-a}{n}\{\frac{x_1}{\frac{b-a}{n}}\}$ و $\frac{b-a}{n}\{\frac{x_2}{\frac{b-a}{n}}\}$ در $[0,\frac{b-a}{n}]$ واقعند و لذا فاصله‌شان از هم کمتر از δ است و در نتیجه قدرمطلق تفاضل مقادیرِ f در این دو نقطه - که با توجه به تساوی‌های فوق همان $|f(x_1)-f(x_2)|$ است - از ϵ تجاوز نمی‌کند یا به عبارت دیگر: $|f(x_1)-f(x_2)|<\epsilon$. پس تابعِ f باید ثابت باشد که با مفروضات مسأله در تناقض است.

پاسخ ۸. ادعا می‌کنیم که اگر عدد طبیعیِ n و $0<a\le 1$ چنان باشند که $f_n(a)=\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$، آنگاه $0<c\le 1$ موجود است به قسمی که $f_{n-1}(c)=\frac{c^n}{n!}$. با فرض درست بودن این حکم، k بار استفاده از آن مسأله را حل خواهد کرد: چون $f_k(1)=\frac{1}{(k+1)!}$ برای عدد طبیعیِ k، در حالت $n=k+1$ و نقطه‌ی $a=1$ تساویِ $f_n(a)=\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$ را برآورده می‌کند و بنابراین در حالتِ $n=0$ باید $c\in(0,1]$ای موجود باشد با $f_n(c)=\frac{c^{n+1}}{(n+1)!}$ که همان تساویِ $f_0(c)=c$ است و حکم مطلوب مبنی بر نقطه‌ی ثابت داشتنِ $f_0:[0,1]\to[0,1]$ را بدست می‌دهد. . پس به حکمی که در ابتدای حل بیان شد می‌پردازیم: تابعِ مشتق‌پذیرِ $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی

$$g(x)=f_n(x)-\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=\int_0^x f_{n-1}(t)\mathrm{d}t-\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

در $x=0$ و $x=a\in(0,1]$ صفر می‌شود و در نتیجه از قضیه‌ی رول باید $g'(x)=f_{n-1}(x)-\frac{x^n}{n!}$ در یک نقطه‌ی $c\in(0,a)$ صفر گردد که به معنای برقراریِ $f_{n-1}(c)=\frac{c^n}{n!}$ به ازای یک $c\in(0,1]$ است.

پاسخ ۹. قسمت الف) وجودِ f با خواص مذکور معادل است با این گزاره که برای هر $x\ge 1$ تابعِ

$$\begin{cases} g_x:[0,\infty)\to[0,\infty)\\ g_x(a)=e^a-\frac{a}{x}-x\end{cases}$$

ریشه‌ای یکتا دارد. برای دیدن دلیل درستی این گزاره توجه کنید که g_x اکیداً صعودی است:

$$\forall a>0: g'_x(a)=e^a-\frac{1}{x}>1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}\ge 0$$

و به علاوه چون $g_x(0)=1-x\le 0$ و $\lim_{a\to\infty}g_x(a)=\infty$ بنابر قضیه‌ی مقدار میانی باید ریشه داشته باشد، ریشه‌ای که به دلیل اکیداً صعودی بودنِ g_x یکتاست. حال اگر برای هر $x\ge 1$، $f(x)$ را ریشه‌ی یکتای $g_x:[0,\infty)\to[0,\infty)$ بنامیم، به تابعی همچون $f:[1,\infty)\to[0,\infty)$ خواهیم رسید که در $g_x(f(x))=0$ صدق می‌کند، تساوی‌ای که با توجه به ضابطه‌ی g_x به معنای $e^{f(x)}=\frac{f(x)}{x}+x$ است. این حل قسمت (الف) را تکمیل می‌کند. قبل از پرداختن به قسمت بعدی حل نکته‌ای را بیان می‌کنیم که در ادامه سودمند خواهد بود: با توجه به اینکه دیدیم تابعِ $g_x:[0,\infty)\to[0,\infty)$ اکیداً صعودی است و همچنین $f(x)$ ریشه‌ی یکتای آن است:

$$\forall x\ge 1, t\ge 0: t\ge f(x)\Leftrightarrow g_x(t)\ge 0$$

قسمت ب) ابتدا توجه کنید که با به کار بردن نکته‌ای که در بالا بیان شد: $f(x)\ge\ln x$ برای هر $x\ge 1$، زیرا:

$$g_x(\ln x)=e^{\ln x}-\frac{\ln x}{x}-x=-\frac{\ln x}{x}\le 0$$

پس به منظور رسیدن به حدِ $\lim_{x\to\infty}x(f(x)-\ln x)=0$ کافی است نشان داد که با تثبیت هر $\epsilon>0$، $f(x)\le\ln x+\frac{\epsilon}{x}$ به ازای xهای به اندازه‌ی کافی بزرگ. دوباره با به کار بردن نکته‌ی فوق، تنها کافی است نشان دهیم که از جایی به بعد:

$$g_x(\ln x+\frac{\epsilon}{x})=xe^{\frac{\epsilon}{x}}-\frac{1}{x}(\ln x+\frac{\epsilon}{x})-x\ge 0$$

این برقرار است چرا که با توجه به $\lim_{x\to\infty}x(e^{\frac{\epsilon}{x}}-1)=\epsilon$ و $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}(\ln x+\frac{\epsilon}{x})=0$، حد سمت چپ نامساوی فوق وقتی $x\to\infty$ برابر است با $\epsilon>0$. در نهایت به اثبات همگراییِ دنباله‌ی $\{\sum_{k=1}^n f(k)-\ln n!\}_{n=1}^\infty$ می‌پردازیم. ابتدا توجه کنید که با نوشتنِ $\ln n!$ به صورت $\sum_{k=1}^n\ln n$ مسأله تبدیل می‌شود به اثبات همگراییِ سریِ $\sum_{n=1}^\infty(f(n)-\ln n)$، سری‌ای که با توجه به آنچه که در بالا بیان شد جملاتش نامنفی‌اند. بنابراین می‌توانیم به منظور اثبات همگرایی آن از آزمون

مقایسه استفاده کنیم. هرگاه n به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد. برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$e^{f(n)} = \frac{f(n)}{n} + n \Rightarrow f(n) - \ln n = \ln(1 + \frac{f(n)}{n^2})$$

و می‌دانیم که $\ln(1+x) \leq x$ برای هر $x \geq 0$ (برای دیدن دلیل آن تابعِ $h(x) = x - \ln(x+1)$ را در نظر بگیرید که بر بازه‌ی $[0, \infty)$ مشتق آن $h'(x) = \frac{x}{x+1}$ نامنفی است. لذا h بر این بازه صعودی است و بنابراین چون $h(0) = 0$، بر این بازه نامنفی نیز خواهد بود.) و در نتیجه:

$$f(n) - \ln n = \ln(1 + \frac{f(n)}{n^2}) \leq \frac{f(n)}{n^2}$$

با توجه به حدِ $\lim_{n\to\infty} n(f(n) - \ln n) = 0$ که قبلاً ثابت شد، اگر n به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد $f(n) \leq \ln n + \frac{1}{n}$ و ترکیب آن با نامساوی قبلی نشان می‌دهد که از جایی به بعد

$$f(n) \leq \frac{\ln n}{n^2} + \frac{1}{n^3}$$

حال با توجه به همگرایی سریِ $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\ln n}{n^2} + \frac{1}{n^3})$، آزمون مقایسه همگراییِ $\sum_{n=1}^{\infty}(f(n) - \ln n)$ را بدست خواهد داد و حل تکمیل است.

پاسخ ۱۰. توجه کنید که $\sum_{n=0}^{1389} x^n = \frac{x^{1390}-1}{x-1}$ و با مشتق‌گیری از این تساوی:

$$\sum_{n=1}^{1389} n x^{n-1} = \frac{1389x^{1390} - 1390x^{1389} + 1}{(x-1)^2}$$

پس در همسایگی مناسبی حول مبدأ که در آن $|1389x^{1390} - 1390x^{1389}| < 1$، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x-1)^2}{1 + (1389x^{1390} - 1390x^{1389})} \\ &= (1 - 2x + x^2)\Big(\sum_{n=0}^{\infty}(1389x^{1390} - 1390x^{1389})^n\Big) \end{aligned}$$

با ساده کردن حاصلضربِ فوق به یک سری توانی حولِ $x = 0$ می‌رسیم که تابعِ f را در همسایگی‌ای از مبدأ توصیف می‌کند. پس $f(x)$ در همسایگی‌ای از مبدأ تحلیلی است و سری توانیِ مذکور در واقع بسط تیلورِ آن در $x = 0$ است. لذا ضریبِ x^{1390} در این سری توانی باید برابر باشد با $\frac{f^{(1390)}(0)}{1390!}$. به منظور یافتنِ این ضریب توجه کنید که به ازای یک سری توانی مناسبِ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$، می‌توان حاصلضربِ فوق را اینگونه نوشت:

$$\begin{aligned} &(1 - 2x + x^2)\Big(\sum_{n=0}^{\infty}(1389x^{1390} - 1390x^{1389})^n\Big) \\ &= 1 - 2x + x^2 + (1 - 2x + x^2)(1389x^{1390} - 1390x^{1389}) \\ &+ x^{2778}(1 - 2x + x^2)(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n) \end{aligned}$$

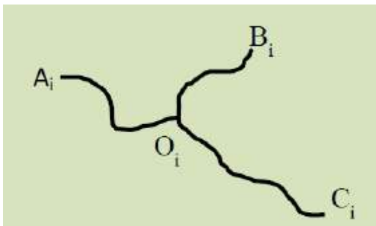
پس $\frac{f^{(1390)}(0)}{1390!}$ همان ضریبِ x^{1390} در

$$(1 - 2x + x^2)(1389x^{1390} - 1390x^{1389})$$

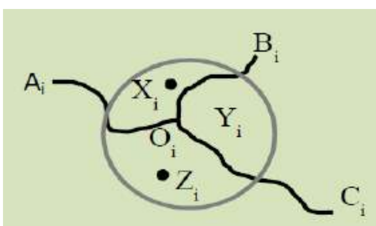
است. لذا:

$$f^{(1390)}(0) = 1390!(2 \times 1390 + 1389) = 4169(1390!)$$

پاسخ ۱۱. فرض کنید بتوان این‌کار را کرد و $\{T_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای ناشمارا از زیرمجموعه‌های دوبدو مجزایی از صفحه باشد که هریک همیمورفند با شکلِ T. مشابه شکل، هر T_i از سه شاخه‌ی مجزا تشکیل شده که در نقطه‌ای همچون O_i به هم متصلند. نقاط انتهایی این شاخه‌ها را A_i، B_i و



C_i نامگذاری کنید [۳]. برای هر $i \in I$، ω_i را دایره‌ای فرض کنید که مختصاتِ مرکز آن و همچنین طول شعاعِ آن اعدادی گویا باشند و O_i نیز درون این دایره باشد ولی A_i، B_i و C_i در آن واقع نشوند. در این صورت شاخه‌های T_i درون دایره را به سه قسمت مجزا تقسیم می‌کنند. X_i، Y_i و Z_i را نقاطی با مختصات گویا در این سه قسمت بگیرید. از آنجا که تعداد دوایرِ



با مرکز و شعاع گویا و نیز تعداد سه‌تایی‌های (X, Y, Z) از نقاط گویای صفحه (نقاطی که هردو مختصه‌شان گویا باشد.) شماراست، پس با توجه به ناشمارا بودن خانواده‌ی $\{T_i\}_{i\in I}$، حداقل دو تا از T_iها مثلاً T_i و T_j موجودند با این ویژگی که: $\omega_i = \omega_j$، $X_i = X_j$، $Y_i = Y_j$ و $Z_i = Z_j$. اما به راحتی می‌توان دید که در این صورت T_i و T_j یکدیگر را قطع می‌کنند.

پاسخ ۱۲. کافی است نشان دهیم که برای عناصر دلخواهِ $x \in E$ و $y \in E^{\perp}$: $\langle Ty, x\rangle = 0$. فرض کنید اینگونه نباشد و $|\langle Ty, x\rangle| > 0$. پس $y \neq 0$. حال قرار می‌دهیم $z = x + \alpha\mu\overline{\langle Ty, x\rangle}y$ که در آن $\alpha > 0$ یک عدد حقیقی دلخواه است. چون $x \in E$، $Tx = \mu x$ و بنابراین:

$$Tz = \mu x + \alpha\mu\overline{\langle Ty, x\rangle}Ty$$

[۳] توجه کنید که همه‌ی این موارد خوش‌تعریف هستند و مستقل از شکل! هر T_i یا در واقع هر فضای همیمورف با شکلِ T یا به عبارت دقیق‌تر همیمورف با زیرفضای $[-1,1] \times \{1\} \cup [0,1] \times \{0\}$ از $\mathbb{R}^2$، دارای نقطه‌ی یکتایی است که مکملش دارای سه مؤلفه‌ی همبندی است که هریک همیمورفند با $[0,1)$. در T_i نقطه‌ی یکتای حائز این ویژگی را O_i و این مؤلفه‌های همبندی را شاخه‌های T_i نامیده‌ایم. انتهای هر شاخه هم با توجه به آنکه هریک از آنها به عنوان زیرفضایی از T_i همیمورف است با $[0,1)$ معنی دارد: نقطه‌ی یکتایی که با حذفش از مؤلفه‌ی همبندی مذکور، فضای حاصل هم همبند خواهد بود.

از طرف دیگر به دلیلِ $y \in E^\perp$، $\langle y, x\rangle = 0$ و لذا داریم:

$$\begin{aligned}\langle Tz, z\rangle &= \langle \mu x + \alpha\mu\overline{\langle Ty, x\rangle}Ty, x + \alpha\mu\overline{\langle Ty, y\rangle}y\rangle\\ &= \mu \parallel x \parallel^2 + \langle \alpha\mu\overline{\langle Ty, x\rangle}Ty, x\rangle\\ &+ \langle \alpha\mu\overline{\langle Ty, x\rangle}Ty, \alpha\mu\overline{\langle Ty, x\rangle}y\rangle\\ &= \mu \parallel x \parallel^2 + \alpha\mu\overline{\langle Ty, x\rangle}\langle Ty, x\rangle + \left|\alpha\mu\overline{\langle Ty, x\rangle}\right|^2\langle Ty, y\rangle\\ &= \mu \parallel x \parallel^2 + \alpha\mu\left|\langle Ty, x\rangle\right|^2 + \alpha^2\left|\langle Ty, x\rangle\right|^2\langle Ty, y\rangle\end{aligned}$$

از طرف دیگر با استفاده‌ی مجدد از $\langle y, x\rangle = 0$:

$$\begin{aligned}\parallel z \parallel^2 &= \parallel x + \alpha\mu\overline{\langle Ty, x\rangle}y \parallel^2 = \parallel x \parallel^2 + \left|\alpha\mu\langle Ty, x\rangle\right|^2 . \parallel y \parallel^2\\ &= \parallel x \parallel^2 + \alpha^2\left|\langle Ty, x\rangle\right|^2 . \parallel y \parallel^2\end{aligned}$$

حال چون بنابر فرض $\left|\langle Tz, z\rangle\right| \leq \parallel z \parallel^2$، از روابط بالا نتیجه می‌شود که برای هر $\alpha > 0$:

$$\begin{aligned}&\left|\left(\mu \parallel x \parallel^2 + \alpha\mu\left|\langle Ty, x\rangle\right|^2 + \alpha^2\left|\langle Ty, x\rangle\right|^2\langle Ty, y\rangle\right)\right|\\ &\leq \parallel x \parallel^2 + \alpha^2\left|\langle Ty, x\rangle\right|^2 . \parallel y \parallel^2\end{aligned}$$

ولی چون $|\mu| = 1$ و $\alpha > 0$، بنابر نامساوی مثلثی:

$$\begin{aligned}&\left|\left(\mu \parallel x \parallel^2 + \alpha\mu\left|\langle Ty, x\rangle\right|^2 + \alpha^2\left|\langle Ty, x\rangle\right|^2\langle Ty, y\rangle\right)\right|\\ &\geq \left|\mu \parallel x \parallel^2 + \alpha\mu\left|\langle Ty, x\rangle\right|^2\right| - \alpha^2\left|\langle Ty, x\rangle\right|^2 . \left|\langle Ty, y\rangle\right|\\ &= \parallel x \parallel^2 + \alpha\left|\langle Ty, x\rangle\right|^2 - \alpha^2\left|\langle Ty, x\rangle\right|^2 . \left|\langle Ty, y\rangle\right|\end{aligned}$$

پس ثابت کردیم که برای هر $\alpha > 0$:

$$\begin{aligned}&\parallel x \parallel^2 + \alpha\left|\langle Ty, x\rangle\right|^2 - \alpha^2\left|\langle Ty, x\rangle\right|^2 . \left|\langle Ty, y\rangle\right|\\ &\leq \parallel x \parallel^2 + \alpha^2\left|\langle Ty, x\rangle\right|^2 . \parallel y \parallel^2 \Rightarrow\\ &\alpha\left|\langle Ty, x\rangle\right|^2 \leq \alpha^2\left|\langle Ty, x\rangle\right|^2\left(\parallel y \parallel^2 + \left|\langle Ty, y\rangle\right|\right)\end{aligned}$$

با توجه به اینکه طبق فرض خلف $\left|\langle Ty, x\rangle\right| \neq 0$ و α مثبت بود، با حذفِ $\alpha\left|\langle Ty, x\rangle\right|$ از طرفینِ نامساوی فوق نتیجه می‌شود که:

$$\forall \alpha > 0 : \alpha\left(\parallel y \parallel^2 + \left|\langle Ty, y\rangle\right|\right) \geq 1$$

که غیرممکن است. پس به تناقض می‌رسیم و باید $T(E^\perp) \subseteq E^\perp$.

پاسخ ۱۳. ابتدا توجه کنید که بدون کاسته شدن از کلیت می‌توان فرض کرد که f و g در هیچ نقطه‌ای از U صفر نمی‌شوند. چرا که در غیر این صورت حکم به سادگی حاصل می‌شود: اگر مقدار ثابتِ $|f| + |g|$ را c بنامیم، برای هر $z \in U$: $|f(z)| + |g(z)| = c$ و بنابراین $|f(z)|, |g(z)| \leq c$ و اگر در $z_0 \in U$ای مثلاً g صفر شود، باید به ناچار $|f(z_0)| = c$ یا به عبارت دیگر در نامساویِ

$$\forall z \in U : |f(z)| \leq c$$

به ازای $z = z_0$ تساوی داریم. ولی با توجه به اصل ماکسیمم مطلق برای توابع هولومورف و همچنین همبند بودنِ U، این به معنای ثابت بودنِ $f : U \to \mathbb{C}$ است. این ثابت بودنِ g را هم نشان می‌دهد: به دلیل ثابت بودنِ $|f| + |g|$، $|g|$ نیز باید ثابت باشد که تنها در صورت ثابت بودن تابع هولومورفِ $g : U \to \mathbb{C}$ امکان‌پذیر است (این دوباره نتیجه‌ای است از اصل ماکسیمم). پس در ادامه توجه خود را به حالتی معطوف می‌کنیم که هیچ‌یک از f یا g در نقطه‌ای از دامنه‌ی تعریف صفر نشوند. در این صورت توابع دو متغیره و حقیقی‌مقدارِ $|f|$ و $|g|$ بر بازِ U از $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ هموار یا به عبارت دیگر C^∞ خواهند بود، زیرا از ترکیب توابع هموارِ $f, g : U \to \mathbb{C} - \{0\}$ (توجه کنید که توابع هولومورف بی‌نهایت بار مشتق‌پذیرند.) و تابعِ نرم $\begin{cases}\mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{R}^+\\ z \mapsto |z|\end{cases}$ بدست می‌آیند. بنابراین می‌توان عملگرِ $\frac{\partial}{\partial\bar{z}}$ [4] را بر آنها اثر داد:

$$\begin{cases}|f|^2 = f\bar{f} \Rightarrow 2|f|\dfrac{\partial|f|}{\partial\bar{z}} = \dfrac{\partial|f|^2}{\partial\bar{z}} = \dfrac{\partial f}{\partial\bar{z}}\bar{f} + f\dfrac{\partial\bar{f}}{\partial\bar{z}}\\ \dfrac{\partial f}{\partial\bar{z}} = 0, \overline{\dfrac{\partial f}{\partial z}} = \bar{f}' \Rightarrow \dfrac{\partial|f|}{\partial\bar{z}} = \dfrac{f\bar{f}'}{2|f|}\\ |g|^2 = g\bar{g} \Rightarrow 2|g|\dfrac{\partial|g|}{\partial\bar{z}} = \dfrac{\partial|g|^2}{\partial\bar{z}} = \dfrac{\partial g}{\partial\bar{z}}\bar{g} + g\dfrac{\partial\bar{g}}{\partial\bar{z}}\\ \dfrac{\partial g}{\partial\bar{z}} = 0, \overline{\dfrac{\partial g}{\partial z}} = \bar{g'} \Rightarrow \dfrac{\partial|g|}{\partial\bar{z}} = \dfrac{g\bar{g'}}{2|g|}\end{cases}$$

که در آن از اینکه $|f|$ و $|g|$ در هیچ نقطه‌ای صفر نمی‌شوند استفاده شد. از طرف دیگر به دلیل ثابت بودنِ $|g| + |f|$، باید $\frac{\partial|g|}{\partial\bar{z}} + \frac{\partial|f|}{\partial\bar{z}} = 0$ و لذا از محاسبات فوق باید:

$$\forall z \in U : \frac{f(z)\bar{f}'(z)}{2|f(z)|} = -\frac{g(z)\bar{g'}(z)}{2|g(z)|}$$

با محاسبه‌ی نرمِ طرفین تساوی فوق می‌بینیم که $|f'(z)| = |g'(z)|$ برای هر $z \in U$. پس توابع تحلیلیِ f' و g' بر بازِ U تنها در حد ضرب در عددی مختلط با نرم یک تفاوت دارند: $\theta \in \mathbb{R}$ای موجود است که برای آن $f' = e^{i\theta}g'$ در سرتاسرِ U. برای دیدن دلیل کافی است به تابع هولوموفِ $\frac{f'}{g'}$ توجه کرد که بر دیسک بازی حول هر نقطه‌ای که g' در آن ناصفر باشد نُرمش یک است و لذا همان‌گونه که قبلاً هم بیان شد بر چنین همسایگی‌ای باید ثابت باشد. در نقاطی هم که g' صفر شود، f' نیز به دلیل تساوی نرم‌های این دو تابع نُرمش صفر و درنتیجه صفر خواهد بود. پس موضعاً f' از ضرب عددی ثابت با نرمِ یک در g' حاصل می‌شود و حال همبندیِ U وجود تساوی‌ای همچون $f' = e^{i\theta}g'$ را بدست می‌دهد. از $f' = e^{i\theta}g'$، ثابت بودنِ $f - e^{i\theta}g$ بدست می‌آید: $a \in \mathbb{C}$ موجود است چنان که

$$\forall z \in U : f(z) - e^{i\theta}g(z) = a$$

[4] یادآوری: عملگرهای $\frac{\partial}{\partial z}$ و $\frac{\partial}{\partial\bar{z}}$ بر توابع مشتق‌پذیر و مختلط‌مقدار به دامنه‌ی بازی از $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ اینگونه عمل می‌کنند:

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial h}{\partial x} - i\frac{\partial h}{\partial y}\right) \quad \frac{\partial h}{\partial\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial h}{\partial x} + i\frac{\partial h}{\partial y}\right)$$

به سادگی می‌توان تحقیق کرد که با تجزیه‌ی تابع مشتق‌پذیرِ h به اجزای حقیقی و موهومی‌اش به صورتِ $h = u + iv$، $\frac{\partial h}{\partial\bar{z}} = 0$ به معنای برقراری روابط کوشی-ریمان

$$u_x = v_y \quad u_y = -v_x$$

است. پس اگر فرض کنیم که h تابعی دومتغیره، مختلط مقدار و C^1 بر بازی از $\mathbb{R}^2$ است، اینکه با در نظر گرفتنِ آن به عنوان تابعی بر بازی از $\mathbb{C}$ هولومورف باشد معادل است با $\frac{\partial h}{\partial\bar{z}} = 0$ و در صورت هولوموف بودنِ h، h' همان $\frac{\partial h}{\partial z}$ خواهد بود.

از طرف دیگر تابع $|f|+|g|$ بر U تابعی ثابت بود. پس اگر فرض کنیم تابع ثابت با مقدار c باشد، این به همراه بالایی نشان می‌دهد:

$$\forall z\in U: |f(z)|+|ae^{i\theta}-f(z)|=c$$

پس برد تابع هولومورف $f:U\to\mathbb{C}$ مشمول است در یک بیضی، در حالی که اگر در نقطه‌ای مشتق f ناصفر باشد، بنابر قضیه‌ی تابع وارون باید برد آن بازی از $\mathbb{C}$ را دربرداشته باشد. پس باید $f'=0$ در تمامی نقاط U، که با به کار بردن همبندی U ثابت بودن $f:U\to\mathbb{C}$ از آن حاصل می‌گردد. اینکه ثابت بودن f حکم مشابه برای g را نتیجه می‌دهد هم قبلاً ثابت شد.

پاسخ ۱۴. پاسخ مثبت است. باز همبند $\mathbb{C}-\{0,1\}$ از صفحه‌ی مختلط را در نظر بگیرید. می‌دانیم پوشش جهانی[5] هولومورف آن از میان سه انتخابی که «قضیه‌ی نگاشت ریمان»[6] مجاز می‌دارد - یعنی کره‌ی ریمان، صفحه‌ی مختلط و دیسک باز واحد - (در حد یکریختی) دیسک باز واحد است. پس یک نگاشت هولومورف $g:D\to\mathbb{C}-\{0,1\}$ موجود است که به پوششی نیز هست. به دلیل پوششی بودن پوشاست و به علاوه موضعاً یک وارون هولومورف دارد و بنابراین مشتق آن در هیچ نقطه‌ای از D صفر نیست. حال اگر آن را با یک نگاشت هولومورف و پوشای $h:\mathbb{C}-\{0,1\}\to\mathbb{C}$ که مشتقش در هیچ نقطه‌ای صفر نشود ترکیب کنیم، حاصل یک نگاشت هولومورف و پوشای $h\circ g:D\to\mathbb{C}$ خواهد بود که بنابر قاعده‌ی زنجیره‌ای مشتقش همه‌جا ناصفر است. $h(z)=\frac{2z^3}{3}-z^2$ مثالی از چنین hای است و لذا $f:=\frac{2g^3}{3}-g^2:D\to\mathbb{C}$ حائز تمامی خواص مطلوب در صورت مسأله است.

پاسخ ۱۵. یک رابطه‌ی هم‌ارزی $\sim$ روی X تعریف می‌کنیم به این صورت که:

$x\sim y \Leftrightarrow$ x و y را نتوان از هم جدا کرد.

به سادگی دیده می‌شود که این یک رابطه‌ی هم‌ارزی است:

- x را نمی‌توان از x جدا کرد، پس $x\sim x$.
- اگر x را بتوان به کمک بازهای U و V با خواص بیان شده در صورت مسأله از y جدا کرد، آنگاه می‌توان با همان U و V، y را هم از x جدا نمود. پس $x\nsim y$ نتیجه می‌دهد $y\nsim x$ که به معنای تقارنی بودن این رابطه است
- این رابطه ترایایی است. چرا که اگر چنین نباشد، به ازای نقاطی همچون x، y و z خواهیم داشت: $x\sim y$ و $y\sim z$ در حالی که $x\nsim z$ یا معادلاً می‌توان x و z را از هم جدا کرد. پس بازهای U و V از X حول به ترتیب x و z موجودند به قسمی که $U\cap V=\emptyset$

[5] covering universal
[6] Theorem Mapping Riemann

و $X=U\cup V$. حال اگر y در U باشد، این دو باز آن را از z جدا می‌کنند که با $y\sim z$ تناقض دارد و اگر در V باشد این بازها آن را از x جدا می‌کنند که به دلیل $x\sim y$ امکان‌پذیر نیست.

در ادامه نشان می‌دهیم کلاس‌های هم‌ارزی رابطه‌ی $\sim$ همان مؤلفه‌های همبندی X هستند. امری که اثباتش قسمت اول مسأله را حل خواهد کرد: امکان‌پذیر نبودن جدا کردن x و y از هم به معنای $x\sim y$ است و در این صورت این دو نقطه باید در یک کلاس هم‌ارزی باشند که خود (با صحیح پنداشتن حکم فوق) زیرمجموعه‌ای همبند از X (در واقع یک مؤلفه‌ی همبندی آن) است. پس به اثبات حکم فوق می‌پردازیم. ابتدا توجه کنید که به وضوح اعضای هر مؤلفه‌ی همبندی در یک کلاس هم‌ارزی از $\sim$ واقعند. چرا که اگر $x\nsim y$ یا به عبارت دیگر بتوان x و y را به وسیله‌ی بازهای U و V با خواصی مشابه قبل از هم جدا کرد، این دو نقطه نمی‌توانند تواماً در هیچ زیرمجموعه‌ی همبند D از X واقع شوند. چرا که با توجه به اینکه زیرمجموعه‌ی همبند D به صورت $(D\cap U)\cup(D\cap V)$ به عنوان اجتماع بازهای مجزایش قابل بیان است، باید یک از زیرمجموعه‌های ظاهر شده در سمت راست برابر D شود که نشان می‌دهد $D\subseteq U$ یا $D\subseteq V$. حال بالعکس نشان می‌دهیم که هر کلاس هم‌ارزی مشمول است در یک مؤلفه‌ی همبندی از X یا به بیان دیگر خود همبند است. بدین منظور یک کلاس هم‌ارزی C از $\sim$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $C=X_1\cup X_2$ که در آن X_1 و X_2 در C هم بازند و هم بسته. باید نشان دهیم که یکی از آنها تهی است تا همبندی C حاصل گردد. ابتدا توجه کنید که

$$C=\bigcap_{F\ \text{شامل}\ C\ \text{و در}\ X\ \text{هم باز است و هم بسته}} F$$

این از آنجا ناشی می‌شود که نقاط اشتراک ظاهر شده در سمت راست را نمی‌توان از نقاط C جدا کرد. زیرا اگر بازهای U و V از X حول به ترتیب $x\in C$ و عنصر y از اشتراک ظاهر شده در بالا موجود باشند به گونه‌ای که $X=U\cup V$ و $U\cap V=\emptyset$، آنگاه چون نمی‌توان اعضای C را از هم جدا کرد باید C به تمامی مشمول باشد در یکی از U و V. از طرف دیگر $x\in U\cap C\neq\emptyset$ و لذا به ناچار باید $C\subseteq U$. پس زیرمجموعه‌ی هم باز و هم بسته‌ی U شامل C است و بنابراین باید اشتراک مذکور و به تبع آن y را هم دربرداشته باشد که با $y\in V=X-U$ تناقض دارد. از این تساوی، C اشتراک تعدادی زیرمجموعه‌ی بسته ولذا خود بسته خواهد بود و بنابراین X_1 و X_2 که زیرمجموعه‌هایی مجزا و بسته از C بودند، X هم بسته خواهند بود. از طرف دیگر X یک فضای متریک فشرده است. لذا X_1 و X_2 هم فشرده‌اند و فاصله‌ی مثبتی از هم دارند: $\epsilon=dist(X_1,X_2)>0$ پس می‌توان بازهای مجزای W_1 و W_2 از X حول به ترتیب X_1 و X_2 را یافت[7] : کافی است اجتماع گوی‌های باز به شعاع $\frac{\epsilon}{3}$ حول نقاط این دو

[7] توجه کنید که در واقع تنها چیزی که اینجا نیاز داریم، نرمال بودن فضای X است و

زیرمجموعه را در نظر گرفت:

$$W_1 = \cup_{x\in X_1} B_{\frac{\epsilon}{4}}(x) \quad W_2 = \cup_{x\in X_2} B_{\frac{\epsilon}{4}}(x)$$

این دو زیرمجموعه بازند و چون $\epsilon > 0$ برابر با $dist(X_1, X_2)$ انتخاب شده بود مجزا. قرار دهید $W = W_1 \cup W_2$ و $Z = X - W$. پس W باز و Z بسته خواهند بود و Z با توجه به فشرده بودنِ X فشرده. W که برابر با $W_1 \cup W_2$ بود، چون $X_1 \subseteq W_1$ و $X_2 \subseteq W_2$، $C = X_1 \cup X_2$ را شامل می‌شود. پس برای مکملِ آن Z:

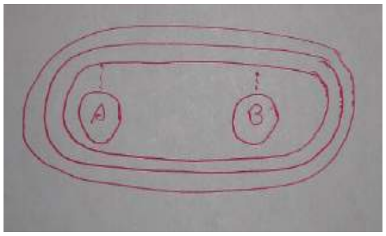
$$Z \subseteq X - C = \cup_{F \text{ شاملِ } C \text{ و در } X \text{ هم باز است و هم بسته}} (X - F)$$

ولی در بالا هر $X - F$ بازی از X است و در نتیجه با توجه به فشرده بودنِ زیرفضای C از X، تعداد متناهی زیرمجموعه‌ی هم باز و هم بسته‌ی $F_1, \dots, F_n$ از X موجودند که همگی شامل C اند و همچنین $Z \subseteq \cup_{i=1}^{n} (X - F_i)$. لذا:

$$C \subseteq \cap_{i=1}^{n} F_i \subseteq X - Z = W = W_1 \cup W_2$$

قرار دهید $A := \cap_{i=1}^{n} F_i$. این زیرمجموعه در X هم باز است و هم بسته و C را نیز شامل می‌شود (چرا که تمامیِ F_iها این خواص را داشتند.) و به علاوه از بالا $A \cap W_1$، $A \cap W_2$ و $X - A$ فضای X را می‌پوشانند. توجه کنید که این زیرمجموعه‌های دوبدو مجزا، همگی بازند. چرا که در X، W_1 و W_2 باز بودند و A تواماً باز و بسته. حال فضای X را با سه زیرمجموعه‌ی بازِ دوبدو مجزا پوشانده‌ایم و بنابراین نقاطی که در دو تای مختلف از این بازها باشند را می‌توان به کمک همین بازها از هم جدا کرد. پس C که هیچ‌یک از دو نقطه‌اش از هم جدا نمی‌شدند، به تمامی مشمول است در یکی از این سه زیرمجموعه، علی‌الخصوص حداقل یکی از $A \cap W_1$ و $A \cap W_2$ را قطع نمی‌کند، بنابر تقارن دومی را. امری که با توجه به $C \subseteq A$ نشان می‌دهد $C \cap W_2 = \emptyset$. اما W_2 شاملِ $X_2 \subseteq C$ بود و لذا $X_2 = \emptyset$ که نشان می‌دهد C همبند است. [8]

اگر فضای متریکِ X فشرده نباشد حکم درست نیست. به عنوان مثال زیرفضایی از $\mathbb{R}^2$ را در نظر بگیرید متشکل از دو گوی بسته و مجزای A و B و شمارا تا بیضی دوبدو مجزا حول این دو گوی که به آنها نزدیک می‌شوند بی‌آنکه بینشان تقاطعی رخ دهد. مطابق شکل:



A و B مؤلفه‌های همبندی جدا از هم‌اند در حالی که نمی‌توان اعضای آنها را از یکدیگر جدا کرد.

پاسخ ۱۶. نرم در فضای هیلبرتِ H را به صورتِ $|.|$ نشان می‌دهیم و M را کران بالایی برای $\{|x_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$ می‌گیریم.چون $C \subseteq C_0$، به وضوح داریم: $\bar{C} \subseteq \bar{C}_0$ و برای اثبات آنکه در واقع تساوی رخ می‌دهد، یک عنصرِ $x = \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n$ از C را در نظر می‌گیریم که در آن t_nها اعدادی نامنفی هستند که $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1$ را برآورده می‌کنند [9] و سپس نشان می‌دهیم که می‌توان با دنباله‌ای از عناصرِ C_0 به آن میل کرد. قرار دهید: $y_m := \sum_{n=1}^{m} t_n x_n + (\sum_{n=m+1}^{\infty} t_n) x_{m+1}$. با توجه به تعریفِ C_0 به دلیلِ $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1$ و $t_n \geq 0$، هر y_m به C_0 تعلق دارد و حال ادعا می‌کنیم حد دنباله‌ی $\{y_m\}_{m=1}^{\infty}$ برابر است با x، که حکم مطلوب را بدست خواهد داد. برای هر $m \in \mathbb{N}$ داریم:

$$|x - y_m| = |\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n - (\sum_{n=1}^{m} t_n x_n + (\sum_{n=m+1}^{\infty} t_n) x_{m+1})|$$

$$= |\sum_{n=m+1}^{\infty} t_n x_n - \sum_{n=m+1}^{\infty} t_n x_{m+1}| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} t_n |x_n - x_{m+1}|$$

$$\leq 2M(\sum_{n=m+1}^{\infty} t_n)$$

وقتی $m \to \infty$، به دلیل همگراییِ $\sum_{n=1}^{\infty} t_n$ باید $\sum_{n=m+1}^{\infty} t_n \to 0$ که با توجه به نامساویِ فوق، $\lim_{m\to\infty} y_m = x$ را اثبات می‌کند.

درباره‌ی قسمت دوم توجه کنید که $\bar{C}_0 \subseteq C$ حتی برای فضاهای هیلبرتِ یک‌بعدی هم درست نیست! فرض کنید H همان فضای هیلبرتِ $\mathbb{R}$ باشد و قرار دهید $x_n = \frac{1}{n}$ برای هر $n \in \mathbb{N}$. دنباله‌ی $\{x_n = \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ از اعضای C_0 به صفر همگراست، نقطه‌ای که در

$$C = \{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n}{n} \mid t_n \geq 0, \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1\}$$

واقع نیست.

پاسخ ۱۷. بازه‌ای را که همه‌ی نقاطش همرنگ باشند یک بازه‌ی «تک رنگ» می‌نامیم. به منظور حل مسأله کافی است نشان داد برای هردو عدد حقیقی دلخواهِ $a < b$، بازه‌ی $I = (a, b)$ شامل زیربازه‌ای تک رنگ و باز است. برهان خلف: فرض کنید I هیچ زیربازه‌ی تک رنگ و بازی را دربرنداشته باشد. به دو گزاره‌ی کمکی نیاز خواهیم داشت:

بنابراین با تبدیلِ فضای متریک فشرده به فضای توپولوژیک فشرده و هاسدورف، با توجه به نرمال بودنِ فضاهایی از این دست، این راه‌حل در آن حالت هم معتبر خواهد بود.

[8] لازم به ذکر است که اگر فضای X موضعاً همبند باشد، می‌توان حکم مسأله را بسیار راحت‌تر ثابت کرد. چرا با این شرط مؤلفه‌های همبندی X باز خواهند بود و حال اگر $x, y \in X$ در یک مؤلفه‌ی همبندی نباشند، مؤلفه‌ی همبندی x و اجتماعِ سایر مؤلفه‌های همبندی، دو بازی خواهند بود که این دو نقطه را از هم جدا می‌کنند.

[9] توجه کنید که سریِ $\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n$ در فضای هیلبرتِ H همگراست و به عبارت دیگر x خوشتعریف است. چراَ که مجموعه‌های جزئیِ این دنباله کُوشی هستند. امری که با توجه به نامساوی زیر، از همگراییِ $\sum_{n=1}^{\infty} t_n$ نتیجه می‌گردد.

$$|\sum_{n=m}^{\infty} t_n x_n| \leq \sum_{n=m}^{\infty} t_n |x_n| \leq M(\sum_{n=m}^{\infty} t_n)$$

(*) با فرض $x \in I$ دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=۱}^{\infty}$ از اعضای I وجود دارد با این خواص که برای هر n: $a_n > x$، $\lim_{n\to\infty} a_n = x$، $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = ۰$ و رنگ هریک از a_nها با رنگِ x متفاوت است.

به منظور اثباتِ (*) بنابر تقارن فرض کنید x قرمز باشد و برای هر $n \in \mathbb{N}$ زیربازه‌ی باز و ناتهیِ $I \cap (x, x+\frac{۱}{۲^n})$ از I را در نظر بگیرید که بنابر فرض خلف نمی‌تواند تک رنگ باشد و لذا حداقل یک نقطه‌ای آبی مثلاً نقطه‌ی a_n در آن واقع است. این نقاط یک دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=۱}^{\infty}$ تعریف می‌کنند که به x همگراست، رنگ تمامی جملاتش آبی و در نتیجه متفاوت با رنگِ x است و همچنین همه‌ی جملات از x بیشترند و تنها اثباتِ $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = ۰$ باقی می‌ماند. برای آن هم توجه کنید که از ویژگی مفروض در صورت مسأله برای f: $\min\{f(a_n), f(x)\} \le |x-a_n|$ برای هر n. $f(x) > ۰$ و $\lim_{n\to\infty} a_n = x$، پس از جایی به بعد $|x-a_n| < f(x)$ و با قرار دادن آن در نامساویِ فوق می‌بینیم که برای nهای به اندازه‌ی کافی بزرگ:

$$۰ < f(a_n) = \min\{f(a_n), f(x)\} \le |x-a_n|$$

و در نتیجه با توجه به $\lim_{n\to\infty} |x-a_n| = ۰$ به $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = ۰$ می‌رسیم. بنابراین $\{a_n\}_{n=۱}^{\infty}$ همه‌ی خواص مطلوب در (*) را دارد.

(**) به ازای هر $x \in I$ $y \in I$ای موجود است که برای آن $f(y) \le \frac{f(x)}{۲}$، $[y-\frac{f(y)}{۲}, y+\frac{f(y)}{۲}] \subset [x-\frac{f(x)}{۲}, x+\frac{f(x)}{۲}]$ و رنگِ x و y یکی نیست.

برای اثبات این حکم، دوباره بنابر تقارن فرض کنید x قرمز باشد و دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=۱}^{\infty}$ از اعضای I را که (*) بدست می‌دهد در نظر بگیرید: هر a_n آبی و از x بیشتر است و به علاوه $a_n \to x$ و $f(a_n) \to ۰$ وقتی $n \to \infty$. با توجه به این موارد و $f(x) > ۰$، می‌توان m را آنقدر بزرگ گرفت تا $f(a_m) \le \frac{f(x)}{۲}$ و $|a_m - x| \le \frac{f(x)}{۴}$ برقرار شوند. حال قرار می‌دهیم $y = a_m$ و نشان می‌دهیم که موارد مطلوب در (**) را برآورده می‌کند. از موارد فوق $f(y) = f(a_m) \le \frac{f(x)}{۲}$ و $y \in I$ برخلافِ x که قرمز بود آبی است . تنها $[y-\frac{f(y)}{۲}, y+\frac{f(y)}{۲}] \subset [x-\frac{f(x)}{۲}, x+\frac{f(x)}{۲}]$ باقی می‌ماند که آن هم برقرار است. زیرا با توجه به $y = a_m$، از بالا: $y > x$، $۰ < f(y) \le \frac{f(x)}{۲}$ و $|y-x| \le \frac{f(x)}{۴}$. در نتیجه:

$$(y - \frac{f(y)}{۲}) - (x - \frac{f(x)}{۲}) > y - x > ۰$$

و

$$(x + \frac{f(x)}{۲}) - (y + \frac{f(y)}{۲}) = \frac{f(x)-f(y)}{۲} - (y-x) \ge \frac{f(x)}{۴} - (y-x) \ge ۰$$

پس (**) هم ثابت شد. حال به کمک این موارد مسأله را حل می‌کنیم: یک نقطه‌ی دلخواهِ $x_۱ \in I$ در نظر بگیرید و بنابر تقارن فرض کنید قرمز باشد.

قرار می‌دهیم $I_۱ = [x_۱ - \frac{f(x_۱)}{۲}, x_۱ + \frac{f(x_۱)}{۲}]$. از (**) $x_۲ \in I$ با رنگ آبی وجود دارد که $f(x_۲) \le \frac{f(x_۱)}{۲}$ و به علاوه اگر $[x_۲ - \frac{f(x_۲)}{۲}, x_۲ + \frac{f(x_۲)}{۲}]$ را $I_۲$ بنامیم $I_۲ \subset I_۱$. دوباره بنابر (**) $x_۳ \in I$ با رنگ قرمز موجود است که برای آن $f(x_۳) \le \frac{f(x_۲)}{۲}$ با قرار دادنِ $I_۳ = [x_۳ - \frac{f(x_۳)}{۲}, x_۳ + \frac{f(x_۳)}{۲}]$ داریم $I_۳ \subset I_۲$. مجدداً از (**) یک $x_۴ \in I$ با رنگ آبی موجود است که $f(x_۴) \le \frac{f(x_۳)}{۲}$ و ... . پس با تکرار این روند، دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ از اعضای I و بازه‌های بسته‌ی $I_n = [x_n - \frac{f(x_n)}{۲}, x_n + \frac{f(x_n)}{۲}]$ برای هر $n \in \mathbb{N}$ حاصل می‌شوند با این ویژگی که x_n به ازای nهای فرد قرمز و به ازای nهای زوج آبی است و همچنین برای هر n: $f(x_{n+۱}) \le \frac{f(x_n)}{۲}$ و $I_{n+۱} \subset I_n$. از این موارد:

$$\forall n \in \mathbb{N} : ۰ < f(x_n) \le \frac{f(x_۱)}{۲^{n-۱}}$$

و بنابراین $f(x_n) = diam(I_n)$ وقتی $n \to \infty$ به صفر میل می‌کند. اما $I_۱ \supset I_۲ \supset \dots$ دنباله‌ای تودرتو از بازه‌های بسته است و بنابراین طبق قضیه‌ی اشتراک کانتور $\cap_{n=۱}^{\infty} I_n$ از تنها یک عضو تشکیل شده که آن را c می‌نامیم. حال به تناقض می‌رسیم: $c \in \mathbb{R}$ نه می‌تواند آبی باشد و نه قرمز! زیرا اگر قرمز باشد، باید برای هر عدد طبیعیِ k:

$$c \in I_{۲k} = [x_{۲k} - \frac{f(x_{۲k})}{۲}, x_{۲k} + \frac{f(x_{۲k})}{۲}]$$

و از آنجا $|c - x_{۲k}| \le \frac{f(x_{۲k})}{۲}$. از طرف دیگر چون رنگِ c و $x_{۲k}$ متفاوت است (به ترتیب قرمز و آبی‌اند.)، از فرض مسأله $\min\{f(c), f(x_{۲k})\} \le |c - x_{۲k}|$ و با ترکیبِ این با نامساوی قبلی خواهیم داشت $\min\{f(c), f(x_{۲k})\} < f(x_{۲k})$ که نتیجه می‌دهد $۰ < f(c) < f(x_{۲k})$ برای هر k که با توجه به $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = ۰$ که پیشتر بدست آمد، امکان‌پذیر نیست. وقتی هم که که عضو یکتای $\cap_{n=۱}^{\infty} I_n = \{c\}$ آبی باشد هم به روشی کاملاً مشابه به تناقض می‌رسیم: برای هر $k \in \mathbb{N}$ رابطه‌ی

$$c \in I_{۲k-۱} = [x_{۲k-۱} - \frac{f(x_{۲k-۱})}{۲}, x_{۲k-۱} + \frac{f(x_{۲k-۱})}{۲}]$$

نشان می‌دهد $|c - x_{۲k-۱}| \le \frac{f(x_{۲k-۱})}{۲}$ و از طرف دیگر چون رنگِ c و $x_{۲k-۱}$ یکسان نیست (به ترتیب آبی و قرمزند.)، داریم: $\min\{f(c), f(x_{۲k-۱})\} \le |c - x_{۲k-۱}|$ که به همراه قبلی نشان می‌دهد $\min\{f(c), f(x_{۲k-۱})\} < f(x_{۲k-۱})$ و لذا $۰ < f(c) < f(x_{۲k-۱})$ برای هر k که دوباره چون $f(x_{۲k-۱}) \to ۰$ وقتی $k \to \infty$، تناقض است. پس فرض خلف باطل است و حکم مطلوب اثبات می‌شود.

پاسخ ۱۸. حکم در حالتِ $n = ۱$ واضح است و در حالت کلی از برهان خلف استفاده می‌کنیم: فرض کنید $n \ge ۲$ و A ماتریسی $n \times n$ با درایه‌های حقیقی، متقارن و از رتبه‌ی $n-۱$ باشد با این ویژگی که برای هر $۱ \le k \le n$ زیرماتریسِ $(n-۱) \times (n-۱)$ی A_k جاصل از حذف سطر و ستون kامِ

A وارون‌پذیر نیست. پس برای هر $1 \le k \le n$ بردارِ

$$v^{(k)} = \begin{bmatrix} v_1^{(k)} \\ \vdots \\ v_{n-1}^{(k)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n-1} - \{0\}$$

را می‌توان یافت با این ویژگی که $A_k v^{(k)} = 0$. حال از روی $v^{(k)} \in \mathbb{R}^{n-1}$، بردار $w^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ را اینگونه می‌سازیم:

$$w^{(k)} = \begin{bmatrix} v_1^{(k)} \\ \vdots \\ v_{k-1}^{(k)} \\ 0 \\ v_k^{(k)} \\ \vdots \\ v_{n-1}^{(k)} \end{bmatrix}$$

که بدیهی است به دلیل ناصفر بودنِ $v^{(k)}$ آن هم ناصفر خواهد بود: $w^{(k)} \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. حال توجه کنید که چون با حذف سطر و ستونِ kام از A به A_k و با حذف درایه‌ی kامِ $w^{(k)}$ که صفر است به بردارِ $v^{(k)}$ می‌رسیم، باید درایه‌های اول تا $k-1$ام از $Aw^{(k)}$ با درایه‌های متناظر از $A_k v^{(k)}$ یکی باشند و درایه‌های $k+1$ تا n از $Aw^{(k)}$ با درایه‌های به ترتیب k تا $n-1$ از $A_k v^{(k)}$. پس به دلیلِ $A_k v^{(k)} = 0$ تمامی درایه‌های $Aw^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ به جز احتمالاً درایه‌ی kام صفرند. یعنی هر $Aw^{(k)}$ یا صفر است یا مضرب ناصفری از e_k، بردارِ nتایی‌ای که درایه‌ی nامِ آن یک است و سایر درایه‌هایش صفر. ($\{e_1,\dots,e_n\}$ را پایه‌ی استاندارد برای $\mathbb{R}^n$ گرفته‌ایم.) و بنابراین هرگاه ماتریس A به عنوان یک نگاشت خطیِ $\begin{cases}\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ x \mapsto Ax\end{cases}$ در نظر گرفته‌شود، از آنچه که تا اینجا اثبات کرده‌ایم، برای هر $1 \le k \le n$ یا $w^{(k)} \in Ker(A)$ یا $e_k \in Im(A)$. فرض کنید به ازای عناصرِ $k_1 < \cdots < k_s$ از $\{1,\dots,n\}$ حالت اول رخ دهد و به ازای سایر اعضای این مجموعه حالت دوم. لذا

$$\forall k \in \{1,\dots,n\} - \{k_1,\dots,k_s\} : e_k \in Im(A)$$

و به‌علاوه بردارهای ناصفرِ $w^{(k_1)},\dots,w^{(k_s)}$ از $\mathbb{R}^n$ در $Ker(A)$ واقعند. چون رتبه‌ی ماتریسِ $n \times n$ی A $n-1$ بود، زیرفضای $Ker(A)$ از $\mathbb{R}^n$ یک‌بعدی است و بنابراین هردو بردار ناصفر در آن مضرب یکدیگرند. پس چون بنابر روش ساختن بردارهای ناصفرِ $w^{(1)},\dots,w^{(n)}$، مؤلفه‌ی kامِ $w^{(k)}$ صفر بود، $w^{(k_1)},\dots,w^{(k_s)} \in Ker(A)$ با توجه به آنچه که در بالا بیان شد نتیجه می‌دهد که مؤلفه‌های $k_1,\dots,k_s$ در هر بردار متعلق به زیرفضای $Ker(A)$ از $\mathbb{R}^n$ صفرند. ولی چون ماتریسِ A متقارن بود، نگاشت خطیِ $\begin{cases}\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ x \mapsto Ax\end{cases}$ در ضرب داخلیِ متداول بر $\mathbb{R}^n$ خودالحاق است و در نتیجه: $Im(A) = Ker(A)^{\perp}$. این در حالی است که از مورد قبلی $e_{k_1},\dots,e_{k_s}$ به مکمل متعامدِ $Ker(A)$ در $\mathbb{R}^n$ تعلق دارند. بنابراین بردارهای $e_{k_1},\dots,e_{k_s}$ نیز در کنار e_kهایی که $k \notin \{k_1,\dots,k_s\}$ در $Im(A)$ واقعند، امری که نشان می‌دهد زیرفضای $Im(A)$ بر کلِ $\mathbb{R}^n$ منطبق است و این با $rank(A) = n-1$ تناقض دارد.

پاسخ ۱۹. برای هر $0 \le i,j \le n+1$ داریم: $|v_i - v_j| \in \mathbb{Q}$. اگر قرار دهیم $j = 0$، چون $v_0 = 0$ نتیجه می‌شود که برای هر $1 \le i \le n+1$: $|v_i| \in \mathbb{Q}$. حال اگر $1 \le i,j \le n+1$ باید طبق فرض $|v_i - v_j| \in \mathbb{Q}$ و خواهیم داشت:

$$|v_i - v_j| \in \mathbb{Q} \Rightarrow |v_i - v_j|^2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow |v_i|^2 + |v_j|^2 - 2v_i.v_j \in \mathbb{Q}$$

ولی گفتیم که $|v_i|,|v_j| \in \mathbb{Q}$ و لذا $v_i.v_j \in \mathbb{Q}$ (منظور از $v_i.v_j$ ضرب‌داخلیِ این دو بردار در $\mathbb{R}^n$ است). پس برای هر $1 \le i,j \le n+1$، $v_i.v_j$ عددی گویاست. حال A را ماتریسِ $n \times (n+1)$ای بگیرید که ستون iامِ آن بردارِ v_i است:

$$A = [v_1|v_2|\cdots|v_{n+1}]$$

A^tA ماتریسی $(n+1) \times (n+1)$ است که درایه‌ی ijامِ آن با ضرب داخلیِ $v_i.v_j$ داده می‌شود. لذا از آنچه که در بالا گفتیم، درایه‌های A^tA گویا هستند. ولی توجه کنید که $rank(A^tA) \le rank(A)$ و چون A n تا سطر دارد: $rank(A) \le n$. پس برای ماتریسِ A^tA که $(n+1) \times (n+1)$ بود: $rank(A^tA) \le n$، نامساوی‌ای که معادل است با $\det(A^tA) = 0$ که آن هم به معنای وجود یک بردارِ $x \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ است که تساویِ $A^tAx = 0$ را برآورده می‌کند. ولی درایه‌های A^tA گویا بودند و بنابراین گزاره‌ای استاندارد از جبرخطی بیان می‌کند که می‌توان بردار ناصفرِ x در بالا را با درایه‌های گویا انتخاب کرد: بردارِ

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{bmatrix}$$

موجود است با این ویژگی که در آن x_iها همگی گویا هستند و حداقل یکی از آنها ناصفر و همچنین $A^tAx = 0$. تساوی اخیر تنها در صورتی می‌تواند رخ دهد که $Ax = 0$، چرا که:

$$A^tAx = 0 \Rightarrow |Ax|^2 = (Ax)^t(Ax) = x^tA^tAx = 0 \Rightarrow Ax = 0$$

از این می‌توان به سادگی حکم مطلوب را نتیجه گرفت:

$$Ax = 0 \Rightarrow [v_1|v_2|\cdots|v_{n+1}] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_{n+1}v_{n+1} = 0$$

تساوی اخیر با توجه به آنکه اعداد گویای $x_1,\dots,x_{n+1}$ همگی صفر نبودند، وابستگی خطیِ $v_1,\dots,v_{n+1}$ بر میدان اعداد گویا را بدست می‌دهد.

پاسخ ۲۰. هردوی ماتریس‌های A و B را $n \times n$ بگیرید و فرض کنید $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ چنان باشند که $AB - BA = c_1A + c_2B$. فرض کنید A و B برخلاف حکم مطلوب مسأله هیچ بردار ویژه‌ی مشترک غیرصفری نداشته باشند. عملگرهای خطیِ $T_1 : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ و $T_2 : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ را با ضابطه‌های به ترتیب $T_1(v) = Av$ و $T_2(v) = Bv$ تعریف می‌کنیم. چون میدانِ $\mathbb{C}$ بسته‌ی جبری است، A حداقل یک مقدار ویژه دارد که آن را λ_1 می‌نامیم و B نیز حداقل یک مقدار ویژه دارد که آن را λ_2 می‌نامیم و $v_1 \neq 0$ و $v_2 \neq 0$ را بردارویژه‌هایی متناظر به ترتیب λ_1 و λ_2 می‌گیریم. پس $T_1(v_1) = Av_1 = \lambda_1 v_1$ و $T_2(v_2) = Bv_2 = \lambda_2 v_2$. اکنون داریم:

$$\begin{aligned}
&(AB - BA)v_1 = (c_1A + c_2B)v_1 \\
&\Rightarrow A(Bv_1) = B(Av_1) + c_1(Av_1) + c_2(Bv_1) \\
&\Rightarrow A(Bv_1) = (\lambda_1 + c_2)Bv_1 + \lambda_1 c_1 v_1 \\
&\Rightarrow T_1(Bv_1) = (\lambda_1 + c_2)Bv_1 + \lambda_1 c_1 v_1 (*)
\end{aligned}$$

تساوی اخیر به همراهِ $T_1(v_1) = \lambda_1 v_1$ نتیجه می‌دهند که زیرفضای $W_1 := Span\{v_1, Bv_1\}$ از $\mathbb{C}^n$ تحتِ T_1 ناورداست. توجه کنید که این زیرفضا دوبعدی است. چرا که $v_1 \neq 0$ و Bv_1 مضربی از بردارِ v_1 نیست، زیرا اگر باشد v_1 علاوه بر A بردار ویژه‌ی B هم خواهد بود که طبق فرض خلف امکان‌پذیر نیست. لذا $\dim W_1 = 2$ و $\beta_1 := \{v_1, Bv_1\}$ پایه‌ی مرتبی برای این زیرفضای T_1-ناورداست. تحدیدِ T_1 به زیرفضای ناوردای W_1 را عملگرِ $U_1 : W_1 \to W_1$ بگیرید. نمایش ماتریسیِ این عملگر در پایه‌ی مرتبِ β_1 با توجه به $T_1(v_1) = \lambda_1 v_1$ و $(*)$ اینگونه خواهد بود:

$$[U_1]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_1 c_1 \\ 0 & \lambda_1 + c_2 \end{bmatrix}$$

پس چندجمله‌ای ویژه‌ی عملگرِ U_1 برابر است با $(x - \lambda_1)(x - \lambda_1 - c_2)$ که چون U_1 از تحدیدِ T_1 به زیرفضای T_1-ناوردای W_1 حاصل شده بود، باید چندجمله‌ای ویژه‌ی T_1 را بشمارد. بنابراین $\lambda_1 + c_2$ نیز ریشه‌ای از چندجمله‌ای ویژه‌ی T_1 و در نتیجه مقدار ویژه‌ای از A است. ولی مقدار ویژه‌ی λ_1 از A که کار را با آن آغاز کرده بودیم دلخواه بود. پس با استفاده‌ی مکرر از استدلال فوق، همه‌ی جملات دنباله‌ی $\{\lambda_1 + kc_2\}_{k=0}^{\infty}$ باید مقادیر ویژه‌ی ماتریسِ A باشند. اما تعداد مقادیر ویژه‌ی A متناهی است و از آنجا $c_2 = 0$. در ادامه آنچه که در بالا برای v_1 انجام شد را برای بردار ویژه‌ی v_2 از B تکرار می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&(AB - BA)v_2 = (c_1A + c_2B)v_2 = c_1Av_2 \\
&\Rightarrow B(Av_2) = A(Bv_2) - c_1Av_2 = (\lambda_2 - c_1)Av_2 \\
&\Rightarrow T_2(Av_2) = (\lambda_2 - c_1)Av_2 (**)
\end{aligned}$$

این تساوی به همراهِ $T_2(v_2) = \lambda_2 v_2$ ثابت می‌کنند که زیرفضای $W_2 = Span\{v_2, Av_2\}$ تحتِ T_2 ناورداست. با همان استدلالی که برای W_1 هم به کار رفت، به دلیلِ عدم وجود بردار ویژه‌ی مشترک برای A و B، W_2 دو بعدی است و $\beta_2 = \{v_2, Av_2\}$ پایه‌ای مرتب برای آن. با فرضِ $U_2 := T_2|_{W_2}$، بنابر $(**)$ و $T_2(v_2) = \lambda_2 v_2$ ماتریس نمایشِ $U_2 : W_2 \to W_2$ در پایه‌ی مرتبِ β_2 برابر خواهد بود با:

$$[U_2]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 - c_1 \end{bmatrix}$$

مجدداً چون U_2 از تحدیدِ T_2 به زیرفضای T_2- ناوردای W_2 حاصل شده، باید چندجمله‌ای ویژه‌ی ماتریس فوق یعنی $(x - \lambda_2)(x - \lambda_2 + c_1)$ مقسوم‌علیه‌ای از چندجمله‌ای ویژه‌ی T_2 باشد و بنابراین مانندِ λ_2، $\lambda_2 - c_1$ نیز مقدار ویژه‌ای از عملگرِ T_2 یا معادلاً از ماتریسِ B است. دوباره مشابه قبل با توجه به اینکه مقدار ویژه‌ی λ_2 از B که کار را با آن شروع کرده بودیم دلخواه بود، تکرار این استدلال نشان می‌دهد که تمامی جملات دنباله‌ی $\{\lambda_2 - kc_1\}_{k=0}^{\infty}$ مقادیر ویژه‌ی Bاند که تنها در صورت برقراریِ $c_1 = 0$ می‌تواند رخ دهد. پس تا اینجا $c_1 = c_2 = 0$ که به معنای جابجا شدنِ A و B است. ولی $AB = BA$ نشان می‌دهد که هر فضای ویژه از ماتریسِ A یا معادلاً از عملگرِ T_1، تحت B یا معادلاً عملگرِ T_2 ناورداست. علی‌الخصوص اگر W_3 را فضای ویژه‌ی متناظر مقدار ویژه‌ی λ_1 از T_1 بگیریم:

$$W_3 = \{v \in \mathbb{C}^n \mid T_1(v) = \lambda_1 v_1\}$$

آنگاه تحدیدِ T_2 به آن عملگری مانندِ $U_3 : W_3 \to W_3$ بدست می‌دهد. U_3 عملگری است بر فضای مختلط و متناهی‌البعدِ $W_3 \neq \{0\}$ و لذا به دلیل بسته‌ی جبری بودن میدانِ $\mathbb{C}$ یک بردار ویژه‌ی ناصفر دارد و این بردار ویژه‌ی هردوی T_1 و T_2 یا به عبارت دیگر هردوی ماتریس‌های A و B خواهد بود که با فرض خلف در تناقض است و این حکم مطلوب مسأله را ثابت می‌کند.

پاسخ ۲۱. بنابر نامساوی کوشی-شوارتز:

$$\begin{aligned}
E(\gamma) &= \int_0^1 g_\gamma(s)\big(\dot\gamma(s), \dot\gamma(s)\big)\mathrm{ds} \\
&\geq \Big(\int_0^1 \sqrt{g_\gamma(s)\big(\dot\gamma(s), \dot\gamma(s)\big)}\mathrm{ds}\Big)^2 = L(\gamma)^2
\end{aligned}$$

تساوی زمانی رخ می‌دهد که تابعِ $s \mapsto \sqrt{g_{\gamma(s)}\big(\dot\gamma(s), \dot\gamma(s)\big)}$ یا به عبارت دیگر طول بردار سرعت در خمِ $\gamma : [0, 1] \to M$ ثابت باشد. فرض کنید خم مشتق‌پذیر و با مشتق‌پیوسته‌ی γ تابعِ E را مینیمم کند. حال برای خم دیگری از این دست همچون $\alpha : [0, 1] \to M$ باید نشان دهیم که $L(\gamma) \geq L(\alpha)$. می‌توان یک بازپرمایشِ $\tilde\alpha : [0, 1] \to M$ از آن در نظر گرفت با این ویژگی که طول بردار مماسِ $\dot{\tilde\alpha}(s)$ تغییر نکند [10]. پس بنابر آنچه که قبلاً گفتیم $E(\tilde\alpha) = (L(\tilde\alpha))^2$ به علاوه از آنجا که طولِ خم تحت بازپرمایش عوض نمی‌شود $L(\alpha) = L(\tilde\alpha)$. با ترکیبِ این موارد با نامساوی‌ای که در ابتدا

[10] برای ساختنِ چنین بازپرمایشی به عنوان مثال کافی است بازپرمایشِ α برحسب طول را به صورت $\beta : [0, l] \to M$ در نظر گرفت که در آن l را طولِ α گرفته‌ایم. حال کافی است قرار داد $\tilde\alpha(s) = \beta(\frac{s}{l})$.

بیان شد و با توجه به خاصیتی که برای γ در نظر گرفته بودیم، خواهیم داشت:

$$(L(\alpha))^۲ = (L(\tilde{\alpha}))^۲ = E(\tilde{\alpha}) \geq E(\gamma) \geq (L(\gamma))^۲$$

پس $L(\alpha) \geq L(\gamma)$ که همان چیزی است که می‌خواستیم.

معرفی نشریه ریاضی کاربردی

حتماً شما هم قبلاً با این سؤال مواجه شده‌اید که " پس از فارغ التحصیلی چه شغلی خواهی داشت ؟ " و به احتمال زیاد بعد از کلی فکر کردن در جواب گفته‌اید " تدریس ولی در کشورهای دیگر کارهای بیشتری برای کسانی که ریاضی خوانده‌اند وجود دارد " . حالا اگر پرسیده شود " مثلاً چه کارهایی؟ "، درجواب چه می‌گویید؟

«نشریه ریاضی کاربردی»، نشریه‌ای دانشجویی است که قرار است زیر نظر دکتر فتوحی فعالیت کند. هدف ما در این نشریه اطلاع‌رسانی در مورد کاربردهای ریاضی در صنعت است:

- یک مهندس مکانیک وقتی که می‌خواهد در زمینه مکانیک سیالات کار کند، به یک معادله دیفرانسیل پاره‌ای می‌رسد و تنها راهی که می‌شناسد حل عددی است. حتی اگر روش‌های حل عددی را هم به خوبی بشناسد باز هم نمی‌داند که با ابزارهای موجود در ریاضی، می‌توان معادله را موضعاً تحلیلی بررسی کرد و دینامیک آنرا تحلیل کرد یا با تغییر پارامتری در معادله انشعاب لازم را به وجود آورد و رفتار جواب را عوض کرد یا اینکه می‌تواند برای بهینه سازی آن از حساب تغییرات استفاده کند.
- وقتی که در دانشکده با بچه‌ها حرف می‌زنید، بطور پراکنده کاربردهایی از ریاضی می‌شنوید. مثلاً از کسی می‌شنوید که شرکت گوگل الگوریتم‌های جستجوی خود را بر اساس ایده‌ای در جبرخطی می‌نویسد!
- از نظریه گالوا در برنامه‌نویسی استفاده می‌شود!
- در فلان کشور مهندسین عمران برای طراحی سازه‌های خود از هندسه منیفلد استفاده می‌کنند!
- فرآیندهای تصادفی در مدلسازی تخلخل سنگ مخزن در مهندسی نفت ظاهر می‌شوند! و .....

آیا این کاربردها گمان بچه‌های دانشکده است؟

آن ایده جبرخطی چیست که گوگل از آن استفاده می‌کند؟

هندسه منیفلد به چه سؤال‌هایی در صنعت می‌تواند جواب دهد که مهندسین عمران از آن استفاده می‌کنند؟

فرآیندهای تصادفی چه کاربردهای دیگری دارند؟ و ......

ما برای تهیه این نشریه به همکاری شما نیاز داریم. اگر کاربردهایی از ریاضی می‌دانید یا علاقه دارید بدانید، لطفاً با ما همکاری کنید.

hadijamshidi50@yahoo.com

گزارشی از برگزاری اولین همایش مرزهای علوم ریاضی (همایشی در بزرگداشت سیاوش شهشهانی)

چکیده

اولین همایش از مجموعه همایش‌های سالانه «مرزهای علوم ریاضی» از ۵ لغایت ۷ دی ماه ۱۳۹۱ به مناسبت بزرگداشت ۷۰ سالگی دکتر سیاوش شهشهانی در دانشگاه صنعتی شریف برگزار گردید. در ادامه به اختصار به آن چه که در این همایش گذشت و حواشی مرتبط با آن خواهیم پرداخت.

۱ مقدمه

۱.۱ اهداف همایش

همایش سالانه «مرزهای علوم ریاضی» برای ایجاد ساختاری منظم جهت ارتباط مستمر و همکارهای بین المللی ریاضیدانان داخل و خارج از کشور، برگزار می‌شود. این همایش اهداف زیر را دنبال می‌کند:

۱- ایجاد محفلی برای ارتباط موثر بین جامعه ریاضیدانان ایرانی

۲- آشنایی جامعه ریاضی کشور به ویژه دانشجویان تحصیلات تکمیلی با مرزهای علوم ریاضی

۳- ایجاد فرصتی برای تعریف پروژه‌های پژوهشی مشترک

۴- ارائه سخنرانی‌های علمی با استانداردهای بالا در مرزهای دانش ریاضی

۵- انتشار مجموعه مقالات معتبر از ریاضیدانان مطرح ایرانی (در دورنمای آن مجله معتبری برای کشور تصور می‌شود.)

۶- تشکیل کانون علمی معتبر برای جذب ریاضیدانان برجسته ایرانی

۲.۱ اولین همایش

اولین همایش از همایش‌های سالانه «مرزهای علوم ریاضی» از ۵ لغایت ۷ دی ماه ۱۳۹۱ در دانشگاه صنعتی شریف برگزار گردید. از آنجا که سال ۱۳۹۱ مصادف بود با ۷۰ سالگی دکتر سیاوش شهشهانی، و با توجه به نقش برجسته ایشان در رشد ریاضیات کشور، برگزار کنندگان این همایش که نوعاً از دانشجویان سابق ایشان بودند بر آن شدند که به این بهانه همایشی سالانه با اهداف مذکور را آغاز کنند. جمع بزرگی از ریاضیدانان موفق ایرانی داخل و خارج از کشور که بسیاری از آنها سابقه ارتباط علمی با دکتر شهشهانی داشته‌اند برای شرکت در همایش دعوت شدند که از میان ایشان ۲۵ نفر دعوت برگزارکنندگان برای شرکت در همایش را پذیرفتند. از میان مقالات ارسال شده نیز ۵ مقاله برای ارائه در همایش پذیرفته شد. به این ترتیب همایش در قالب ۶ سخنرانی عمومی (قابل دسترسی برای همه دانشجویان و اساتید رشته ریاضی و حتی رشته‌های مرتبط) و ۲۹ سخنرانی تخصصی (به صورت سخنرانی‌های موازی و با مخاطب قرار دادن دانشجویان تحصیلات تکمیلی و اساتید شاخه‌های مرتبط ریاضی) برگزار گردید. از میان سخنرانان این همایش ۱۴ نفر مقیم کشور و ۱۵ نفر مقیم خارج از کشور بودند.

در کنار برنامه اصلی همایش، و در راستای آشنا کردن دانشجویان دوره‌های تحصیلات تکمیلی با حوزه‌های مهم و فعال تحقیقات در دنیا، چندین دوره‌ی کوتاه درسی به همت میهمانان مدعو برنامه برگزار گردید که شرحی از آنها نیز در ادامه خواهد آمد. درس‌های کوتاه که بیشتر به صورت ۳ الی ۵ جلسه‌ی ۲ ساعته برگزار گردید به معرفی یک شاخه تحقیقاتی می‌پرداختند. با وجود همزمان شدن اکثر دروس کوتاه با ایام امتحانات دانشگاه استقبال نسبتاً خوبی از این برنامه‌ها شد و تعداد قابل توجهی از اساتید جوان دانشگاه‌های تهران هم در این درس‌ها شرکت کردند. با توجه به اهمیتی که کمیته برگزاری برای این بخش از برنامه‌های همایش از جهت تأثیر گذاری بر نگاه پژوهشی دانشجویان تحصیلات تکمیلی قائل است، دروس ارائه شده و سخنرانی‌های همایش همگی ضبط ویدئویی شده‌اند و برای عموم جامعه علمی کشور در وب‌گاه همایش http://front.math.sharif.ir/ در دسترس هستند.

۲ روایتی از شکل‌گیری همایش

در خردادماه سال ۱۳۹۱ مراسمی در بزرگداشت ۷۰ سالگی دکتر سیاوش شهشهانی و به پاس نزدیک به ۴۰ سال خدمات علمی و آموزشی ایشان به جامعه ریاضی، علمی و فرهنگی کشور برگزار گردید. پس از این بزرگداشت یک روزه، جمعی از علاقمندان ایشان بر آن شدند که به بهانه ۷۰ سالگی ایشان، برنامه‌ای با محتوای علمی غنی‌تر برگزار نمایند. به این ترتیب کمیته‌ای (متشکل از ایمان افتخاری، علیرضا بحرینی، یحیی تابش، محمدرضا رزوان، مرتضی فتوحی، علی کمالی‌نژاد و امید نقشینه‌ارجمند) جلسات منظمی را برای بررسی چگونگی رسیدن به این مقصود تشکیل دادند.

در جلسات ذکر شده، اهداف برگزارکنندگان تدوین گردید، و بالاخص بر لزوم تداوم و استمرار این همایش تأکید گردید. لذا همایش مرزهای علوم ریاضی به صورت همایشی سالانه اعلام موجودیت کرد. پس از آن،

ساختار برنامه و چشم انداز سال‌های آینده همایش تدوین گردید و با جمعی از ریاضیدانان برجسته مکاتباتی صورت گرفت که نتیجه آن قبول زحمت همراهی علمی با همایش مرزهای علوم ریاضی از سوی کمیته علمی همایش بود. اعضای این کمیته در اولین همایش مرزهای علوم ریاضی از افراد زیر تشکیل شده بود:

مسعود امینی	دانشگاه تربیت مدرس، تهران
محمد اردشیر	دانشگاه صنعتی شریف، تهران
راما کنت	دانشگاه پاریس ۶، پاریس، فرانسه
عباس عدالت	ایمپریال کالج، لندن، انگلستان
محمد مهدیان	گروه تحقیقات شرکت گوگل، سانتا کلارا، آمریکا
مریم میرزاخانی	دانشگاه استانفورد، استانفورد، آمریکا
حسین مواساتی	ایمپا، ریو دو ژانیرو، برزیل
فریدون رضاخانلو	دانشگاه کالیفرنیا در برکلی، برکلی، آمریکا
فریدون شهیدی	دانشگاه پردو، وست لافایت، آمریکا
مهرداد شهشهانی	استاد میهمان دانشگاه صنعتی شریف، تهران
کامران وفا	دانشگاه هاروارد، کمبریج، آمریکا
سیامک یاسمی	دانشگاه تهران، تهران

کمیته برگزاری همایش در ادامه در مورد ساختار برنامه‌های همایش و اجزایی که این برنامه برای رسیدن به اهداف مذکور باید داشته باشد بحث و تبادل نظر کرد. برگزاری همایش به صورت برنامه‌ای فشرده و سه روزه، در قالب سخنرانی‌های موازی که زمینه‌های قابل توجهی در ریاضیات را پوشش می‌دهند، گنجاندن سخنرانی‌های عمومی با مخاطب عام در میان سخنرانی‌ها، تشکیل درس‌های کوتاه در حاشیه همایش، برقراری ارتباط مستمر با تعدادی از میهمانان خارجی، استفاده از این فرصت برای ارتقای ارتباطات بین‌المللی بین مؤسسات پژوهشی و هم‌اندیشی در مورد آینده ریاضیات کشور، از تصمیماتی بود که در کمیته برگزاری اتخاذ گردید.

در ادامه، اجزای مختلف فعالیت‌های علمی صورت گرفته در همایش با تفصیل بیشتری ارائه می‌گردد.

افتتاحیه این همایش بود. به علاوه هر روز در چهار نوبت (۲ نوبت پیش از ظهر و ۲ نوبت بعد از ظهر) سخنرانی‌های تخصصی موازی ارائه گردید. تلاش شد که سخنرانی‌های موازی همپوشانی موضوعی نداشته باشند. لیست سخنرانان مدعو همایش در ادامه این بخش آمده است:

عمران احمدی درویشوند	پژوهشگاه دانش های بنیادی
شبنم اختری	دانشگاه مونترئال (کانادا)
مسعود امینی	دانشگاه تربیت مدرس
امیرحسین اسدی	دانشگاه ویسکانسین در مدیسن (آمریکا)
رویا بهشتی زواره	دانشگاه واشنگتن (آمریکا)
سلمان ابوالفتح بیگی	پژوهشگاه دانش های بنیادی
پیمان کسایی	کینگز کالج لندن (انگلستان)
مسعود خلخالی	دانشگاه وسترن اونتاریو (کانادا)
عبادا... محمودیان	دانشگاه صنعتی شریف
سپیده میررحیمی	پلی تکنیک پاریس (فرانسه)
حسین مواساتی	ایمپا (برزیل)
میثم نصیری	پژوهشگاه دانش های بنیادی
علیرضا رنجبر مطلق	دانشگاه صنعتی شریف
محمدرضا رئوفی	دانشگاه صنعتی اصفهان
فریدون رضاخانلو	دانشگاه کالیفرنیا در برکلی (آمریکا)
علیرضا صالحی گلسفیدی	دانشگاه کالیفرنیا در سن دیگو (آمریکا)
هادی سلماسیان	دانشگاه اتاوا (کانادا)
مهرداد شهشهانی	استاد میهمان دانشگاه صنعتی شریف
امین شکرالهی	پلی تکنیک لوزان (سوییس)
علی تهذیبی	دانشگاه سائوپائولو (برزیل)
رامین تکلو بیغش	دانشگاه ایلینوی در شیکاگو (آمریکا)
سعاد ورسایی	دانشگاه تحصیلات تکمیلی زنجان
سیامک یاسمی	دانشگاه تهران
رضا سید علی	دانشگاه واترلو (کانادا)
عباس محرابیان	دانشگاه واترلو (کانادا)
رسول رمضانیان	دانشگاه صنعتی شریف
جعفر شفاف	دانشگاه شهید بهشتی
رضا طالب	فارغ التحصیل دانشگاه مک مستر (کانادا)
سعید صالحی پورمهر	دانشگاه تبریز
اکرم شیخ علیشاهی	دانشگاه صنعتی شریف

۳ برنامه اصلی همایش

برنامه اصلی همایش در روزهای سه‌شنبه، چهارشنبه و پنج‌شنبه، ۵ الی ۷ دی ماه سال ۱۳۹۱ در دانشگاه صنعتی شریف برگزار گردید. هر روز ۲ سخنرانی عمومی (یکی در نوبت صبح و دیگری در نوبت بعد از ظهر) که با اطلاعات نسبتاً مقدماتی در ریاضیات قابل دسترسی بودند توسط ریاضیدانان داخل و خارج از کشور، و با هدف معرفی حوزه‌هایی اصلی از ریاضیات، استخوان‌بندی اصلی برنامه را تشکیل می‌دادند. از جمله، سخنرانی دکتر سیاوش شهشهانی در مورد «نگاهی تاریخی به مبانی فلسفی هندسه» سخنرانی

علاوه بر سخنرانی‌های علمی، در روز اول همایش (سه شنبه ۵ دی ماه) میزگردی با عنوان «آینده ریاضیات ایران» به عنوان بخشی از همایش برگزار گردید. این میزگرد در واقع مجموعه سه میزگرد کوچکتر با موضوع‌های «درس‌های گذشته برای آینده ریاضی کشور»، «وضعیت فعلی ریاضیات ایران» و «آنچه برای آینده ریاضیات می‌توان انجام داد» بود. این سه میزگرد به ترتیب با حضور «سیاوش شهشهانی، یحیی تابش، بیژن ظهوری زنگنه و امیرحسین اسدی»، «پیمان کسایی، محمدرضا رزوان، ایمان افتخاری، امید نقشینه‌ارجمند و علی رجایی» و «سیاوش شهشهانی، یحیی تابش، ایمان

افتخاری و محمدرضا رزوان» و با همراهی آرش رستگار به عنوان مسئول میزگرد برگزار گردید و با مشارکت شرکت کنندگان در همایش ادامه یافت و به ضیافت شام ساده‌ای در دانشگاه صنعتی شریف ختم گردید.

۴ برنامه جانبی همایش (دوره های درسی کوتاه)

هدف از برگزاری دوره‌های درسی کوتاه، آن بود که در قالب این درس‌ها، سخنران بتواند با عمق و جزئیات بیشتر به یک موضوع تحقیقاتی بپردازد. در این راستا ۷ درس کوتاه توسط ۶ نفر از میهمانان همایش در دانشگاه صنعتی شریف و پژوهشگاه دانش‌های بنیادی برگزار گردید. لیست درس‌های کوتاه ارائه شده در حاشیه همایش مرزهای علوم ریاضی در ادامه می آید:

علیرضا صالحی گلسفیدی	Affine sieve and expanders	روزهای ۲۸ و ۲۹ آذرماه و ۲ و ۳ و ۴ دی ماه
هادی سلماسیان	A tour de force of unitary representation theory	روزهای ۲۷ و ۲۸ و ۲۹ آذرماه و ۳ و ۴ دی ماه
حسین مواساتی	From modular forms and elliptic curves to Calabi-Yau threefolds	روزهای ۲۸ و ۲۹ آذرماه و ۲ و ۳ و ۴ دی ماه
حسین مواساتی	The topology of algebraic varieties: From Poincare, Picard and Lefschetz to Calabi and Yau	۲۷ دی ماه
فریدون رضاخانلو	Large random matrix	۱۱ و ۱۲ و ۱۳ دی ماه
رویا بهشتی زواره	Spaces of rational curves on smooth hypersurfaces	۱۰ و ۱۶ دی ماه
علی تهذیبی	Desintegration of measures along foliations	۱۸ دی ماه

علاوه بر برنامه‌های یاد شده، برخی از سخنرانان مدعو برنامه‌های مستقلی را نیز به صورت داوطلبانه برگزار کردند، که از جمله آنها می‌توان به دو جلسه سخنرانی آقای دکتر حسین مواساتی در جمع اعضای تیم ملی المپیاد ریاضی (یک جلسه در باشگاه دانش پژوهان جوان و یک جلسه در پژوهشگاه دانش‌های بنیادی)، سخنرانی دکتر علی تهذیبی در دانشگاه‌های گیلان و تربیت مدرس تهران و سخنرانی آقای دکتر فریدون رضاخانلو در دانشگاه گیلان اشاره نمود.

۵ آینده «مرزهای علوم ریاضی»

برگزارکنندگان اولین همایش مرزهای علوم ریاضی امیدوارند که این همایش به صورت همایشی سالانه ادامه پیدا کند. اقدامات لازم برای برگزاری همایش سال ۱۳۹۲ مدتی است که آغاز شده است و این همایش از ۴ الی ۶ دی‌ماه در دانشگاه صنعتی شریف برگزار خواهد شد. برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد **دومین همایش مرزهای علوم ریاضی** می‌توانید به وب‌گاه همایش http://front.math.sharif.ir/ مراجعه کنید.

۶ معرفی کوتاه دکتر سیاوش شهشهانی

از آنجا که اولین همایش از همایش‌های سالانه مرزهای علوم ریاضی به تجلیل از دکتر سیاوش شهشهانی اختصاص داشت، در انتهای این گزارش به معرفی بسیار کوتاه ایشان و سرفصل برخی از خدمات علمی و اجرایی ایشان به جامعه علمی کشور می‌پردازیم.

سیاوش میرشمس شهشهانی در سال ۱۳۲۱ در تهران متولد شد. وی پس از تحصیلات دوره‌ی متوسطه در سال ۱۳۳۹، تحصیلات خود را در کشور امریکا ادامه داد و در سال ۱۳۴۸ درجه دکتری خود در رشته ریاضی را از دانشگاه کالیفرنیا در برکلی اخذ کرد. پس از چند سال تدریس و تحقیق در امریکا، وی از سال ۱۳۵۳ در دانشگاه صنعتی شریف شروع به کار کرد، در سال ۱۳۵۸ به مرتبه استادی رسید و در خرداد ماه ۱۳۹۱ بازنشسته شد. علاوه بر فعالیت‌های آموزشی و پژوهشی، وی مسئولیت‌های مختلفی را در داخل و بیرون دانشگاه به عهده داشته است که از جمله می‌توان به موارد زیر اشاره کرد.

- دو دوره ریاست دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شریف برای مجموعاً هفت سال.
- چند دوره عضویت در کمیته‌های ممیزی دانشگاه صنعتی شریف.
- قائم‌مقام پژوهشگاه دانشهای بنیادی از سال ۱۳۶۸ تا سال ۱۳۸۱.
- عضو هیئت تحریریه‌ی مجله‌ی نشر ریاضی از سال ۱۳۶۸ و مدیر مسئول این مجله در سال‌های ۱۳۷۰ تا ۱۳۸۴.
- رئیس کمیته علوم ریاضی شورای‌عالی برنامه‌ریزی در سال‌های ۱۳۷۲ تا ۱۳۸۰.
- عضو کمیته واژه‌گزینی ریاضی فرهنگستان ۵۶-۱۳۵۴ و عضو گروه زبان و رایانه‌ی فرهنگستان زبان و ادب فارسی ۸۳-۱۳۸۲.
- رئیس واحد ثبت دامنه کشوری **ir.** ازسال ۱۳۸۱ تا سال ۱۳۸۸.
- عضویت در کمیته‌های مختلف بین‌المللی اینترنت.

دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

دومین همایش
مرزهای علوم ریاضی

۴ تا ۶ دی ماه ۱۳۹۲
دانشگاه صنعتی شریف

Frontiers in Mathematical Sciences
2nd Conference

front.math.sharif.ir

سمینارهای هفتگی

گروه ریاضیات گسسته و کاربردهای آن

ترم اول ۹۳-۱۳۹۲

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی

Mohammad Mahdian	Algorithms on evolving data sets	۲۳ شهریور ۱۳۹۲
Mohammad Reza Pournaki	Rings which are generated by their units: A graph theoretical approach	۳۰ شهریور ۱۳۹۲
Saeedeh Rashidi	On the possible volume of three way trades	۶ مهر ۱۳۹۲
Hossein Teimori	Discrete model of two-dimensional Ising problem and zeta function of a finite graph	۱۳ مهر ۱۳۹۲
Mohammad Ali Abam	Region-Fault Tolerant Geometric Spanners	۲۰ مهر ۱۳۹۲
Narges Ghareghani	Some factorization of episturmian words	۲۷ مهر ۱۳۹۲
Omid Haji-Mirsadeghi	To be announced	٤ آبان ۱۳۹۲
Sharareh Alipour	Application of Euler formula in computational geometry	۱۱ آبان ۱۳۹۲
Omran Ahmadi	Equations over finite fields	۱۸ آبان ۱۳۹۲
Majid Mirzavaziri	System of disjoint representatives: A disjoint version of Hall's marriage theorem	۲۵ آبان ۱۳۹۲
Shahram Khazaei	Cryptanalysis of a universally verifiable efficient re-encryption mixnet	۲ آذر ۱۳۹۲
Mohammad Gholamzadeh Mahmoudi	Order of finite projective planes and Witt cancellation theorem	۹ آذر ۱۳۹۲
Reza Moghadasi	To be announced	۱۶ آذر ۱۳۹۲
Meysam Madani	Hopf Algebras and Combinatorics	۲۳ آذر ۱۳۹۲
Ghodratollah Aalipour	Laplacian eigenvalues for hypergraphs	۳۰ آذر ۱۳۹۲

شنبه‌ها ساعت ۱۲:۳۰ تا ۱۴

دانشگاه صنعتی شریف - دانشکده علوم ریاضی - اتاق ۴۰۳

Sharif University of Technology

SUT Group of Discrete Mathematics & its Applications

http://mehr.sharif.ir/~combinatorics/

قیمت: ۲۰۰۰ تومان