مجله‌ی ریاضی شریف

سال دوم شماره‌ی چهارم

مجله ریاضی شریف
سال دوم شماره‌ی چهارم

صاحب امتیاز: انجمن علمی و فوق برنامه‌ی دانشکده‌ی علوم ریاضی؛ مدیر مسوول: دکتر امیر جعفری؛ سردبیر: خشایار فیلْم؛ همکاران این شماره: دکتر کسری علیشاهی، دکتر علی کمالی‌نژاد، دکتر امیر جعفری، علی قصاب، عرفان صلواتی، روزبه فرهودی، خشایار فیلم، اوژن غنی‌زاده‌ی خوب، کاوه حسینی، نوید علامتی، احمدرضا حاج سعیدی، محمدعلی کرمی؛ هیئت تحریریه: دکتر امیر جعفری، دکتر علی کمالی‌نژاد، خشایار فیلم، علی قصاب، روزبه فرهودی، عرفان صلواتی، مصطفی عین‌الله‌زاده صمدی، نوید هاشمی، اوژن غنی‌زاده‌ی خوب، احمدرضا حاج‌سعیدی، ابوالفضل طاهری؛ طراحی: اوژن غنی‌زاده‌ی خوب؛ طراحی سایت: محسن منصوریار؛ صفحه‌بندی: ابوالفضل طاهری؛ ویراستاری: خشایار فیلم، اوژن غنی‌زاده‌ی خوب، ابوالفضل طاهری؛ با تشکر ازدکتر کسری علیشاهی، شهاب ابراهیمی، حمیدرضا صابر، مهتاب کریمی

فهرست مطالب

بسمه تعالی

مدت‌ها بود که دانشکده‌ی ریاضی دانشگاه صنعتی شریف جای خالی نشریه‌ای علمی را احساس می‌کرد. سال‌ها پیش چنین نشریه‌ای با همت چند دانشجو -که نام برخی از آنان در بین اساتید کنونی دانشکده دیده می‌شود- منتشر می‌شد. به این بحث که کم و کیف آن چه‌گونه بود و چرا متوقف شد، در این نوشته نمی‌پردازم و نوشته‌ی خود را به نکاتی در باره‌ی نشریه‌ی جوان «مجله ریاضی شریف» و رابطه‌ی آن با دانشکده‌ی ریاضی اختصاص می‌دهم.

حدود سه سال از عمر فعالیت‌های من در «انجمن علمی و فوق برنامه‌ی دانشکده‌ی ریاضی» می‌گذرد و همین طور که از نام «انجمن» پیداست، این فعالیت‌ها هم جنبه‌هایی علمی دارد و هم غیرعلمی. بسیاری از دانشجویان دیگر نیز به طور مستقیم و غیرمستقیم درگیر این گونه برنامه‌ها هستند. در مقایسه با انجمن‌های سایر دانشکده‌ها، می‌توان گفت که پویایی «انجمن علمی و فوق برنامه دانشکده‌ی ریاضی» در حد خوبی قرار دارد. در زمینه‌های علمی می‌توان به برگزاری سخنرانی‌ها و همایش‌ها و سمینارهایی تحت عنوان «گپ ریاضی» و «گویا» اشاره کرد که به طور منظم توسط این «انجمن» برگزار می‌شود. اما چنان که گفتم جای خالی یک نشریه‌ی علمی در دانشکده کاملاً احساس می‌شد و پرواضح است که برای رشته‌های ریاضی و علوم کامپیوتر وجود چنین نشریه‌ای ضروری به نظر می‌رسد. همچنین در سال‌های حضورم در «انجمن» همواره شاهد آن بودم که دانشجویان در زمینه‌ی مقالات توصیفی و ترجمه فعالیت‌های گسترده‌ای می‌کردند اما امکاناتی متمرکز برای نشر آن‌ها وجود نداشت که این نیاز هم اکنون توسط «مجله ریاضی شریف» در کنار وب‌سایت این نشریه به خوبی برآورده می‌شود. به تازگی «انجمن» توانسته امتیاز «مجله ریاضی شریف» را از آن خود کند و این موضوع از نظر من مزایایی دارد و همچنین وظایف بزرگی نیز بر دوش «انجمن» می‌گذارد.

یکی از پیامدهای خوب این اتفاق، حمایت دایمی «انجمن» از این نشریه است. از آن جا که اعضای «انجمن» هر سال به انتخاب دانشجویان دانشکده می‌رسند و هر دوره اعضای جوان و باانگیزه هم امکان حضور در فعالیت‌ها را پیدا می‌کنند، این حمایت می‌تواند همواره با کیفیت بالا ادامه یابد. پشتیبانی مالی و حقوقی «انجمن» نیز می‌تواند گره‌گشای مشکلات این نشریه باشد.

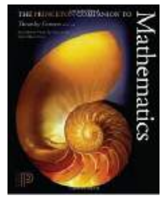
اشاره‌ای هم می‌کنم به وظایفی که بر دوش اعضای انجمن قرار دارد. با همت چند دانشجوی خوش‌ذوق و چند استاد، بار دیگر شاهد فعالیت

نشریه‌ای علمی و وزین هستیم که هم‌اکنون شماره‌ی چهارم آن در اختیار شما قرار دارد. می‌توان گفت «مجله ریاضی شریف» به نوعی کارنامه‌ی فعالیت‌های خودجوش علمی دانشجویان دانشکده‌ریاضی است و انجمن باید از همه‌ی ظرفیت‌های خود برای کمک به آن استفاده کند. در بسیاری از دانشکده‌ها و مراکز ریاضی دانشگاه‌های معتبر دنیا، نشریات بسیار معتبری دیده می‌شود که به خوبی بازتاب‌دهنده‌ی اخبار و فعالیت‌های علمی آن مراکز می‌باشند. ما نیز باید با رویکرد درست و توان بالا به پیش‌رفت و موفقیت «مجله ریاضی شریف» کمک کنیم و این فرصت به‌دست‌آمده را غنیمت شماریم.

شهاب ابراهیمی
دبیر سابق و عضو فعلی انجمن علمی و فوق برنامه‌ی دانشکده‌ی ریاضی دانشگاه صنعتی شریف

ریاضیات درباره چیست؟

ترجمه: دکتر کسری علیشاهی



مقدمه

این مقاله، ترجمه‌ای است از قسمت ابتدایی کتاب «همراه‌نامه‌ی ریاضی پرینستن (The Princeton Companion to Mathematics)» و بنابراین شاید بهتر باشد که نخست به معرفی این کتاب فوق‌العاده جالب بپردازیم. این کتاب مشتمل بر تعداد قابل توجهی مقاله‌ی کوتاه از نویسندگان متعددی درباره‌ی مفاهیم ریاضی، شاخه‌های ریاضی و قضایا و مسائل ریاضی و مطالب گوناگون دیگری است که تحت نظارت ریاضیدان نامدار «تیموتی گاورز» (Timothy Gowers) جمع‌آوری و تدوین شده و انتشارات دانشگاه پرینستن آن را در سال ۲۰۰۸ به چاپ رسانده است. آنگونه که در مقدمه‌ی کتاب بیان شده، هدف اصلی، ارائه هرچه جذاب‌تر و ملموس‌تر ایده‌هایی است که ریاضیدانان اکنون در ابتدای قرن بیست و یکم با آن درگیرند و تمرکز اصلی آن بر ریاضیات محض مدرن است، هرچند تأثیرات ریاضیات محض را بر ریاضیات کاربردی و فیزیک نظری نادیده نمی‌گیرد. سهل‌الوصول بودن و دربرداشتن مقالاتی در سطوح متفاوت از دشواری، باعث شده که مخاطبان همراه‌نامه طیف وسیعی را در بربگیرند، از کسانی که به تازگی یک درس ریاضی در سطح دانشگاهی را آغاز کرده‌اند و می‌خواهند به دلیل اهمیت مفاهیمی که اخیراً فراگرفته‌اند پی ببرند تا محققان حرفه‌ای که در پی آشنایی با شاخه‌های دیگر ریاضی به غیر از زمینه‌ی تخصصی خود هستند. در واقع ویراستاران امیدوار بوده‌اند هر خواننده‌ای با پیش‌زمینه‌ی مناسب در ریاضیات دبیرستانی، بتواند از بخش قابل ملاحظه‌ای از کتاب بهره بگیرد.

معنایی که ویراستاران از کلمه‌ی «همراه» (Companion) در عنوان کتاب در نظر داشته‌اند، به غایت جالب است و تفاوت میان همراه‌نامه و یک دایرةالمعارف ریاضی را اینگونه تبیین می‌کند: «کلمه‌ی همراه پرمعنی است.هرچند قطعاً هدف آن بوده که این کتاب به عنوان یک مرجع هم سودمند باشد، نباید زیاد از آن توقع داشت...این کتاب مانند یک مصاحب بشری است، با نقایصی در معلوماتش و دیدگاه‌هایی که لزوماً مورد اجماع همگان نیست.»

همراه‌نامه به هشت قسمت، هریک با موضوع کلی و هدفی متفاوت با دیگر قسمت‌ها تقسیم شده و این تنظیم موضوعی و نه الفبایی، دلیل دیگری است که به بیان پیشگفتار کتاب، بر تمایز این اثر از یک دایرةالمعارف صحه می‌گذارد. این مقدمه را با توضیح مختصری درباره‌ی این قسمت‌ها به پایان می‌بریم: قسمت I، «مقدمه»- که مقاله‌ای که ترجمه‌ی آن را در زیر می‌خوانید از آنجا انتخاب شده- مطالب و مفاهیم مقدماتی را دربردارد و دیدی کلی از ریاضیات ارائه می‌کند. قسمت II تحت عنوان «ریشه‌های ریاضی مدرن» طی هفت مقاله به جنبه‌های تاریخی مانند تغییرات ایجاد شده در طرز تفکر ریاضیدانان در طی زمان، روند توسعه‌ی دقت در آنالیز ریاضی و روند توسعه‌ی جبر مجرد می‌پردازد. قسمت III یا «مفاهیم ریاضی»، نود و نه مفهوم ریاضی را که در I به آنها اشاره نشده، با مقالات یک الی دو صفحه‌ای شرح می‌دهد. مقالات این قسمت با اجتناب از بیان تعاریف دقیق، این امکان را به خواننده می‌دهند که پی به معنا و دلیل اهمیت مفهوم ناآشنایی که چندین بار با آن برخورد کرده ببرد. قسمت IV، «شاخه‌های ریاضی» را می‌توان قلب کتاب نامید: توصیف بیست و شش شاخه‌ی ریاضی در مقالاتی طولانی‌تر از قسمت پیشین و با حدود پانزده صفحه، به قلم نویسندگانی که بر مبنای دو اولویت با اهمیت یکسان برگزیده شده‌اند: تخصص و توانایی نوشتن توصیفی. ویراستاران یکی از اهداف این قسمت را کمک به افرادی که در مرحله‌ی انتخاب شاخه‌ی تحقیقاتی خود هستند برشمرده‌اند. قسمت V، («قضایا و مسائل») مکمل III است و در مقالاتی کوتاه در رابطه با سی و پنج قضیه و مسأله‌ی باز ریاضی بحث می‌کند، قضایا و مسائلی که محک اصلی در انتخابشان اهمیت ریاضی آنها بوده و برخی دیگر نیز به دلیل سرگرم‌کننده و در دسترس بودن یا ارتباطی که با مطالب IV دارند در این میان آمده‌اند. قسمت VI همانند II تاریخی است و مشتمل بر زندگی‌نامه‌ی بسیار مختصر نود و شش ریاضیدان مشهور که افرادی از پانصد سال قبل از میلاد مسیح تا نیمه‌ی اول قرن بیستم را دربرمی‌گیرد. قسمت VII، («تأثیر ریاضیات») برخلاف شش قسمت پیشین که عمدتاً معطوف به ریاضیات محض و تاریخ آن بودند، تأثیر برونی عظیمی را که ریاضیات موجب شده (اعم از تأثیر کاربردی یا فکری) نشان می‌دهد. این قسمت دربردارنده‌ی مقالات طولانی‌تری است که ریاضیدانانی با علائق در رشته‌های دیگر یا متخصصانی در رشته‌های غیر از ریاضی که به میزان قابل توجهی ریاضی را به کار می‌گیرند به رشته‌ی تحریر درآورده‌اند و همان‌گونه که انتظار می‌رود در VII بیشتر از سایر قسمت‌های کتاب به ریاضی کاربردی پرداخته شده. بالاخره قسمت VIII («چشم‌انداز نهایی») شامل تأملاتی درباره‌ی طبیعت ریاضی و مباحثی عام مانند هنر حل مسأله است و مؤخره‌ی همراه‌نامه را تشکیل می‌دهد.

روشن است که دادن پاسخی قانع کننده به این پرسش که ریاضیات چیست؟ بسیار دشوار است. این کتاب قصد چنین کاری ندارد، بلکه در صدد است که به جای ارائه تعریفی از ریاضیات، با شرح تعداد زیادی از مهم‌ترین مفاهیم، قضایا و کاربردها تصور خوبی از چیستی ریاضیات منتقل کند. با این وجود برای این که همه این اطلاعات معنایی در بر داشته باشند، تلاش برای این که بتوانیم نوعی دسته‌بندی از ریاضیات ارائه دهیم مفید خواهد بود.

بدیهی‌ترین راه برای این منظور دسته‌بندی موضوعی ریاضیات است، و روی‌کرد این مقدمه کوتاه همین است. اما این تنها راه و حتی لزوماً بهترین راه نیست. یک روی‌کرد ممکن دیگر آن است که تلاش کنیم نوع پرسش‌هایی که ریاضی‌دانان علاقه‌مندند به آن‌ها بیندیشند را دسته‌بندی کنیم. این کار به چشم‌انداز متفاوت و مفیدی می‌انجامد. بسیار پیش می‌آید که دو حوزه ریاضی از نظر موضوع بسیار دور از هم به نظر می‌رسند، اما اگر به نوع مسائل مطرح در آن‌ها توجه کنیم شباهت بسیار بیش‌تری بین آن‌ها خواهیم یافت.

۱ جبر، هندسه، آنالیز

اگرچه هر دسته‌بندی موضوعی از ریاضیات باید به پشتوانه و دلیل کافی متکی باشد، اما دسته‌بندی نه چندان دقیقی وجود دارد که بی‌شک به عنوان اولین تقریب بسیار کارآمد است، یعنی تقسیم ریاضیات به جبر، هندسه و آنالیز. پس بیایید از همین‌جا شروع کنیم.

۱.۱ جبر در برابر هندسه

بیشتر افرادی که در دبیرستان با ریاضیات سر و کار داشته‌اند تصورشان از جبر آن نوع ریاضیاتی است که از جای‌گذاری حروف به جای اعداد حاصل می‌شود. جبر اغلب در تقابل با حساب قرار می‌گیرد که هدف آن مطالعه مستقیم خود اعداد است. بنابراین، مثلاً این سوال که مقدار ۷×۳ چند است؟ متعلق به حساب و این که اگر $x+y = ۱۰$ و $xy = ۲۱$، مقدار بزرگتر از بین x و y چند است؟ مربوط به جبر تلقی می‌شود. این تقابل در ریاضیات پیشرفته‌تر چندان روشن نیست به این دلیل ساده که در آن سطح خیلی به ندرت اعداد به تنهایی و بدون همراهی حروف ظاهر می‌شوند.

اما تقابل دیگری میان جبر و هندسه وجود دارد که در سطح پیشرفته اهمیت بسیار بیشتری دارد. هندسه، در سطح ریاضیات دبیرستانی، دانش مطالعه اشکالی مثل دایره، مثلث، مکعب، کره و زاویه به همراه مفاهیمی چون دوران، انعکاس، تقارن و مانند آن‌ها است. بنابراین اشیاء هندسی و فرآیندهایی که بر آن‌ها انجام می‌شود ماهیتی به مراتب بصری‌تر از معادلات جبری دارند.

این تقابل تا مرزهای تحقیق در ریاضیات نوین نیز ادامه می‌یابد. بخش‌هایی از ریاضیات درگیر انجام عملیاتی با نمادها بر مبنای قوانین مشخص‌اند: مثلاً اگر عمل یکسانی را بر عبارت‌های دو سمت یک برابری انجام دهیم برابری برقرار می‌ماند. این بخش‌ها عموماً جبری تلقی می‌شوند، در حالی که بخش‌های دیگر که به مفاهیمی می‌پردازند که قابل تجسم هستند غالباً با عنوان هندسی شناخته می‌شوند.

با این حال، چنین تمایزی این‌قدر هم ساده نیست. آیا یک مقاله تحقیقی در هندسه پر از تصویر است؟ قاعدتاً نه. در واقع روش‌هایی که برای حل مسایل هندسی به کار می‌روند تقریباً همیشه شامل مقدار زیادی محاسبات با نمادها هستند، اگرچه ممکن است برای یافتن و به‌کاربردن این روش‌ها قدرت بالای تجسم ضروری باشد و تصاویر عموماً در پس‌زمینه آن‌چه رخ می‌دهد قرار دارند. همین طور، آیا جبر صرفاً عملیات نمادین است؟ به هیچ وجه. بسیاری از اوقات حل یک مسأله جبری با یافتن راهی برای تجسم هندسی آن ممکن می‌شود.

به عنوان مثالی از تجسم یک مسأله جبری، ببینیم چطور می‌توان درستی این قاعده را که اگر a و b دو عدد صحیح مثبت باشند آن‌گاه $ab = ba$، تحقیق کرد. یک راه ممکن آن است که با آن به عنوان یک حقیقت صرفاً جبری برخورد کنیم (و مثلاً به کمک استقرا ثابتش کنیم)، اما روش ساده‌تر تصور یک جدول مستطیلی با a سطر و b ستون است. تعداد کل خانه‌های جدول اگر سطر به سطر شمرده شود a برابر b و اگر ستون به ستون بشمریم b برابر a خواهد بود. بنابراین $ab = ba$. برای قواعد پایه‌ای دیگر مثل $a(b+c) = ab + ac$ و $a(bc) = (ab)c$ نیز می‌توان توجیهاتی شبیه به این ارائه کرد.

از سوی دیگر، یک روش خوب برای حل بسیاری از مسایل هندسی تبدیل آن‌ها به جبر است. شناخته شده ترین مثال به کارگیری مختصات دکارتی است. مثلاً فرض کنید بخواهیم بدانیم که اگر دایره‌ای را اول نسبت به خط l که از مرکز آن می‌گذرد قرینه کنیم و سپس آن را ۴۰ درجه در خلاف جهت عقربه‌های ساعت دوران دهیم و در نهایت دوباره آن را نسبت به خط l قرینه کنیم نتیجه چه خواهد بود. یک راه استفاده از تجسم هندسی است: تصور کنید که دایره از قطعه نازکی از چوب ساخته شده باشد. می‌توانیم به جای قرینه کردن نسبت به خط l آن را (با کمک گرفتن از بعد سوم فضا) ۱۸۰ درجه حول l دوران دهیم. با این کار دایره سر و ته خواهد شد ولی این نکته، اگر از ضخامت دایره صرف نظر کنیم، اهمیتی ندارد. اکنون اگر هنگام دوران دایره به اندازه ۴۰ درجه در خلاف جهت عقربه‌های ساعت از پایین به آن نگاه کنید، آن‌چه خواهید دید دایره‌ای است که ۴۰ درجه در جهت عقربه‌های ساعت دوران می‌یابد. بنابراین اگر

دوباره دایره را با قرینه کردن نسبت به خط l به جای خود برگردانیم اثر نهایی دوران دایره به اندازه ۴۰ درجه در جهت عقربه‌های ساعت خواهد بود.

ریاضی‌دانان از نظر توانایی و علاقه برای دنبال کردن استدلال‌هایی از این جنس بسیار با هم متفاوتند. شما هم اگر نتوانید مراحل استدلال را به اندازه کافی خوب تجسم کنید تا نسبت به درستی آن قانع شوید، در این صورت ممکن است روشی جبری مبتنی بر جبر خطی و ماتریس‌ها را ترجیح دهید. در این روش نخست به دایره به چشم مجموعه همه دوتایی‌های (x, y) از اعداد نگاه می‌کنیم که $x^۲ + y^۲ \leq ۱$. اکنون هر دو تبدیل، قرینه کردن نسبت به خطی که از مرکز دایره می‌گذرد و دوران به اندازه زاویه θ، را می‌توان با ماتریس‌های ۲×۲ نمایش داد. قاعده جبری ضرب ماتریس‌ها با این ویژگی طراحی شده که اگر ماتریس A نمایش‌دهنده تبدیل R (مثلاً قرینه کردن) و ماتریس B نماینده تبدیل T باشد، در این صورت حاصل‌ضرب AB نشان‌دهنده تبدیلی است که از اعمال T و سپس R نتیجه می‌شود. بنابراین برای حل مسأله بالا می‌توان ماتریس‌های متناظر با تبدیل‌های مورد نظر را نوشت، آن‌ها را در هم ضرب کرد، و دید که تبدیل متناظر با ماتریس حاصل‌ضرب کدام است. از این راه مسأله هندسی به مسأله‌ای در جبر تبدیل و به روش جبری حل می‌شود.

بنابراین، در عین حال که می‌توان تمایز سودمندی میان جبر و هندسه قائل شد، نباید تصور کرد که مرز کاملاً مشخصی بین این دو تعریف شده است. در واقع حتی یکی از شاخه‌های اصلی ریاضیات هندسه جبری نامیده می‌شود. و همان‌طور که مثال‌های بالا نشان می‌دهند، اغلب می‌توان حکمی ریاضی را از جبر به هندسه و برعکس ترجمه کرد. به هر حال تفاوت روشنی میان شیوه‌های تفکر جبری و هندسی (یکی بیش‌تر نمادین و دیگری بیش‌تر تصویری) وجود دارد و این تفاوت می‌تواند تاثیر عمیقی بر انتخاب ریاضی‌دانان از موضوعی که در آن کار می‌کنند بگذارد.

۲.۱ جبر در برابر آنالیز

واژه آنالیز، که برای اشاره به شاخه‌ای از ریاضیات به کار می‌رود، در ریاضیات دبیرستانی نمود چندانی ندارد. اما واژه حسابان بسیار آشناتر است و مشتق و انتگرال مثال‌های خوبی از آن نوع ریاضیاتی هستند که تحت عنوان آنالیز و نه جبر یا هندسه رده‌بندی می‌شوند. دلیل این امر آن است که هر دوی این مفاهیم با فرآیندهای حدی سر و کار دارند. مثلاً مشتق تابع f در نقطه x حد دنباله شیب‌های وترهایی بر نمودار f است، و مساحت شکلی با مرز منحنی حد مساحت ناحیه‌هایی است که از مستطیل‌ها ساخته شده‌اند و شکل مورد نظر را از درون پر می‌کنند.

بنابراین به عنوان تقریبی اولیه می‌توان گفت که شاخه‌ای از ریاضیات که درگیر فرآیندهای حدی باشد متعلق به آنالیز است، در حالی که اگر در آن رسیدن به جواب در متناهی مرحله ممکن باشد به جبر تعلق دارد. اما در اینجا هم تقریب اولیه آن‌قدر خام است که ممکن است به دلیلی مشابه قبل گمراه‌کننده باشد. با نگاهی دقیق‌تر می‌توان دریافت که عموماً این شاخه‌های ریاضی نیستند که باید به جبر یا آنالیز رده‌بندی شوند بلکه روش‌ها و شیوه‌ها هستند.

با توجه به این که ما قادر نیستیم اثبات‌هایی به طول نامتناهی بنویسیم، پس چگونه امیدواریم بتوانیم چیزی در باره فرآیندهای حدی ثابت کنیم؟ برای پاسخ به این پرسش بیایید به اثبات این حکم ساده که مشتق $x^۳$ برابر $۳x^۲$ است نگاهی بیندازیم. استدلال متداول چنین است که شیب خط گذرنده از دو نقطه $(x, x^۳)$ و $((x+h), (x+h)^۳)$، یعنی

$$\frac{(x+h)^۳ - x^۳}{x+h-x}$$

برابر است با $۳x^۲ + ۳xh + h^۲$. وقتی x به صفر میل کند این شیب به $۳x^۲$ میل می‌کند، بنابراین می‌گوییم که شیب در x برابر $۳x^۲$ است. اما اگر بخواهیم کمی دقیق‌تر باشیم چطور؟ مثلاً اگر x خیلی بزرگ باشد، آیا واقعاً مجازیم از جمله $۳xh$ صرف نظر کنیم؟

برای آن‌که خود را کاملاً قانع کنیم، محاسبه کوچکی انجام می‌دهیم تا نشان دهیم که x هرچه باشد، برای h به اندازه کافی کوچک می‌توان خطای $۳xh + h^۲$ را به دل‌خواه کوچک کرد: عدد مثبت و کوچکی مثل ϵ، که نشان‌دهنده خطای قابل قبول ما است، در نظر بگیرید. اکنون اگر $h \leq \epsilon/۶x$، آن‌گاه $|۳xh|$ حداکثر برابر $\epsilon/۲$ است. اگر به علاوه بدانیم که $|h| \leq \sqrt{\epsilon/۲}$، آن‌گاه خواهیم داشت $h^۲ \leq \epsilon/۲$. بنابراین اگر $|h|$ از مینیمم دو مقدار $\epsilon/۶x$ و $\sqrt{\epsilon/۲}$ کوچک‌تر باشد، تفاوت $۳x^۲ + ۳xh + h^۲$ و $۳x^۲$ حداکثر برابر ϵ خواهد بود.

استدلال بالا دو خصلت آنالیزی دارد. اولاً با وجود آن که حکمی که می‌خواهیم ثابت کنیم درباره یک فرآیند حدی و بنابراین غیرمتناهی است، کاری که برای اثبات لازم بود انجام دهیم کاملاً متناهی است. دوم این که جوهر اثبات یافتن شرایط کافی برای برقراری یک نابرابری نسبتاً ساده است. (نابرابری $|۳xh + h^۲| \leq \epsilon$.)

بگذارید نکته آخر را با یک مثال دیگر توضیح دهیم. اثباتی از این که برای هر عدد حقیقی x، مقدار $x^۴ - x^۲ - ۶x + ۱۰$ مثبت است. یک آنالیزدان چنین استدلال خواهد کرد: اول توجه کنید که اگر $x \leq -۱$ آن‌گاه $x^۴ \geq x^۲$ و $۱۰ - ۶x \geq ۰$، پس حکم در این حالت قطعاً درست است. اگر $-۱ \leq x \leq ۱$ آن‌گاه $|x^۴ - x^۲ - ۶x|$ نمی‌تواند بیش‌تر از $x^۴ + x^۲ + ۶|x|$ باشد که حداکثر برابر ۸ است، پس

$x^4 - x^2 - 6x \geq -8$ و در نتیجه $x^4 - x^2 - 6x + 10 \geq 2$. اگر $1 \leq x \leq \frac{3}{2}$، آن‌گاه $x^4 \geq x^2$ و $6x \leq 9$، پس $x^4 - x^2 - 6x + 10 \geq 1$. اگر $\frac{3}{2} \leq x \leq 2$، آن‌گاه $x^2 \geq \frac{9}{4}$، پس $x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) \geq \frac{9}{4}.\frac{5}{4} > 2$. به علاوه $6x \leq 12$، پس $10 - 6x \geq -2$، بنابراین $x^4 - x^2 - 6x + 10 > 0$. در نهایت اگر $x \geq 2$، آن‌گاه $x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) \geq 3x^2 \geq 6x$، که از آن نتیجه می‌شود که $x^4 - x^2 - 6x + 10 \geq 10$.

استدلال بالا طولانی است، اما هر مرحله آن از اثبات یک نابرابری نسبتاً ساده تشکیل شده است. (و به همین دلیل خصلتی آنالیزی دارد.) در مقابل اثبات جبردان چنین است: کافی است توجه کنید که $x^4 - x^2 - 6x + 10$ برابر است با $(x^2 - 1)^2 + (x - 3)^2$ و بنابراین همواره مثبت است.

از این مثال ممکن است این‌طور به نظر برسد که هر کسی در انتخاب میان جبر و آنالیز باید جبر را انتخاب کند. به‌هرحال اثبات جبری بسیار کوتاه‌تر است و به روشنی نشان می‌دهد که چرا تابع مورد نظر همواره مثبت است. اما با وجود این‌که اثبات آنالیزی چندین مرحله دارد، همه آن مراحل ساده اند. از طرفی کوتاهی اثبات جبری گمراه کننده است، چون مشخص نیست که عبارت معادل برای $x^4 - x^2 - 6x + 10$ چگونه به دست آمده است. در حقیقت این که یک چندجمله‌ای چه موقع قابل نمایش به شکل مجموع مربعات چندجمله‌ای‌های دیگر است مسأله‌ای جالب و دشوار است (دست کم برای چندجمله‌ای‌های با بیش از یک متغیر).

رویکرد تلفیقی سومی نیز برای حل این مسأله وجود دارد و آن استفاده از حسابان برای تعیین نقاط مینیمم تابع $x^4 - x^2 - 6x + 10$ است. ایده عبارت است از محاسبه مشتق، $4x^3 - 2x - 6$ (فرآیندی جبری با توجیهی آنالیزی)، یافتن ریشه‌های آن (جبر) و بررسی این که مقدار $x^4 - x^2 - 6x + 10$ در ریشه‌های مشتق مثبت است. اما با وجود این‌که این روش خوبی برای حل مسائل فراوان است، به کار بردنش در این مورد کاملاً سرراست نیست چون $4x^3 - 2x - 6$ ریشه صحیح ندارد. اما می‌توان به کمک استدلالی آنالیزی بازه‌های کوچکی یافت که مینیمم حتماً درون یکی از آن‌ها رخ می‌دهد و از این طریق تعداد حالت‌هایی که باید بررسی شوند، به نسبت استدلال آنالیزی خالص، به مراتب کمتر خواهد شد.

همان طور که این مثال نشان می‌دهد، اگرچه آنالیز بر خلاف جبر اغلب درگیر فرآیندهای حدی است، اما یک تمایز مشخص‌تر آن است که جبردان‌ها دوست دارند با فرمول‌های دقیق کار کنند و آنالیزدانان از تخمین‌ها استفاده می‌کنند. در یک کلام، جبردان‌ها برابری‌ها را دوست دارند و آنالیزدان‌ها نابرابری‌ها را.

۲ شاخه‌های اصلی ریاضیات

اکنون که درباره تفاوت شیوه‌های تفکر جبری، هندسی و آنالیزی صحبت کردیم، برای ارایه یک دسته‌بندی موضوعی تقریبی از ریاضیات آماده‌ایم. فقط پیش از این کار توجه به یک نکته لازم است. واژه‌های جبر، هندسه و آنالیز همزمان هم به شاخه‌های مشخصی از ریاضیات اطلاق می‌شوند و هم به شیوه‌های عمومی تفکر که مرز میان آن‌ها از درون شاخه‌های بسیاری می‌گذرد. بنابراین معنادار (و صحیح) است که بگوییم بعضی شاخه‌های آنالیز ماهیتی جبری‌تر (یا هندسی‌تر) دارند. به همین طریق، تناقضی در این حقیقت نیست که توپولوژی جبری ماهیتی کاملاً جبری و هندسی دارد، هرچند اشیا مورد مطالعه آن، فضاهای توپولوژیک، بخشی از آنالیز هستند. تأکید ما در این بخش تقسیم‌بندی موضوعی است، اما مهم است که تمایزی که در قسمت قبل درباره آن صحبت شد را در ذهن داشته باشیم و آگاه باشیم که از جهتی بنیادی‌تر است.

۱.۲ جبر

واژه جبر، وقتی به عنوان شاخه‌ای از ریاضیات به کار می‌رود، معنایی خاص‌تر از انجام عملیات با نمادها و ترجیح برابری‌ها به نابرابری‌ها دارد. جبردانان به مطالعه دستگاه‌های عددی، چندجمله‌ای‌ها، و ساختارهای مجردتری مانند گروه‌ها، میدان‌ها، فضاهای برداری و حلقه‌ها علاقه‌مندند. به لحاظ تاریخی ساختارهای مجرد نخست به عنوان تعمیم‌هایی از مثال‌های ملموس پدیدار شدند. برای مثال، شباهت‌های مهمی میان مجموعه اعداد صحیح و مجموعه چندجمله‌ای‌های با ضرایب گویا وجود دارد، که دلیل آن به کمک این حقیقت که هر دو مجموعه مثال‌هایی از ساختارهای جبری به نام دامنه‌های اقلیدسی اند آشکار خواهد شد. اگر کسی شناخت خوبی از دامنه‌های اقلیدسی داشته باشد، می‌تواند این شناخت را در مورد اعداد صحیح و چندجمله‌ای‌ها به کار برد.

این نمونه تقابلی را نشان می‌دهد که در بسیاری از شاخه‌های ریاضی وجود دارد، یعنی تمایز میان احکام عمومی و مجرد و احکام خاص و ملموس. ممکن است یک جبردان به گروه‌ها بیندیشد تا مثلاً یک گروه تقارن خاص و نسبتاً پیچیده را بهتر بشناسد، در حالی که جبردانی دیگر به نظریه عمومی گروه‌ها به عنوان مطالعه بخشی از اشیای بنیادی ریاضیات علاقه‌مند باشد.

نمونه برجسته قضیه‌ای از نوع اول حل‌ناپذیری معادلات درجه پنج است (این که فرمولی برای ریشه‌های معادله درجه پنج بر حسب ضرایب آن وجود ندارد.) اثبات این قضیه از طریق تحلیل تقارن‌های

موجود در ریشه‌های چندجمله‌ای و شناخت گروه این تقارن‌ها انجام می‌شود. این مثال مشخص از گروه (یا رده‌ای از گروه‌ها) نقش مهمی در توسعه نظریه مجرد گروه‌ها ایفا کرده است.

مثالی خوب از قضیه‌ای از نوع دوم رده‌بندی گروه‌های ساده متناهی است، که اجزای اساسی سازنده گروه‌های متناهی را توصیف می‌کند.

ساختارهای جبری در سرتاسر ریاضیات حضور دارند، و کاربردهای جبر در سایر بخش‌های ریاضی مانند نظریه اعداد، هندسه و حتی ریاضی-فیزیک فراوانند.

۲.۲ نظریه اعداد

نظریه اعداد عمدتاً به بررسی ویژگی‌های اعداد صحیح مثبت می‌پردازد، و به همین دلیل هم‌پوشانی قابل توجهی با جبر دارد. اما با یک مثال ساده می‌توان تفاوت یک مسأله نوعی در جبر و یک مسأله نوعی در نظریه اعداد را نشان داد. معادله $13x - 7y = 1$ را در نظر بگیرید. یک جبردان ملاحظه می‌کند که این معادله یک خانواده یک پارامتری از جواب‌ها دارد: اگر $y = \lambda$ آن‌گاه $x = (1 + 7\lambda)/13$، بنابراین جواب عمومی عبارت است از $(x, y) = ((1 + 7\lambda)/13, \lambda)$. یک نظریه اعداد دان به جواب‌های صحیح علاقه‌مند است و بنابراین بررسی می‌کند که به ازای چه مقادیری از λ ، $7\lambda + 1$ مضربی از ۱۳ خواهد بود. (جواب این است که برای λهای به شکل $13m + 11$ به ازای عدد صحیح m.)

اما این توصیف حق مطلب را درباره نظریه اعداد، که اکنون به یک شاخه بسیار پیچیده تبدیل شده، ادا نمی‌کند. بسیاری از نظریه اعداد دانان مستقیماً به یافتن جواب‌های صحیح معادلات نمی‌پردازند، بلکه برای فهم بهتر ساختارهایی تلاش می‌کنند که در آغاز برای بررسی جواب معادلات به وجود آمدند اما به تدریج هویت مستقلی یافتند. در برخی موارد این فرآیند چندین بار رخ داده است و بنابراین عبارت نظریه اعداد تصویر بسیار گمراه‌کننده‌ای از آن‌چه یک متخصص نظریه اعداد انجام می‌دهد ارایه می‌کند. با این حال حتی مجردترین بخش‌های موضوع هم ممکن است نتایج ملموسی در بر داشته باشند. یک مثال قابل توجه اثبات مشهور اندرو وایلز از قضیه آخر فرما است.

در ارتباط با مباحث قبلی، جالب است که نظریه اعداد به دو زیرشاخه کمابیش مجزا، نظریه جبری اعداد و نظریه تحلیلی اعداد، تقسیم می‌شود. در یک توصیف ساده، مطالعه جواب‌های صحیح معادلات به نظریه جبری اعداد منجر می‌شود در حالی که ریشه‌های نظریه تحلیلی اعداد به مطالعه اعداد اول برمی‌گردد، اما البته تصویر واقعی از این پیچیده‌تر است.

۳.۲ هندسه

شیء اصلی مورد مطالعه در هندسه خمینه است. خمینه‌ها تعمیم اشکالی مانند سطح یک کره در ابعاد بالاتر هستند: یک بخش کوچک آن تخت به نظر می‌رسد اما کل خمینه ممکن است به طرز پیچیده‌ای در خود خمیده باشد. بیش‌تر کسانی که خود را هندسه‌دان می‌نامند به نحوی مشغول مطالعه خمینه‌ها هستند. بعضی به خمینه‌های خاصی توجه دارند و گروهی به نظریه عمومی خمینه‌ها علاقه‌مندند.

اکنون می‌توانیم دسته‌بندی خود را بر مبنای پاسخ به این پرسش که چه وقت دو خمینه اساساً متفاوت تلقی می‌شوند توسعه دهیم. توپولوژی‌دان دو شیء را که بتوان آن‌ها را به طور پیوسته به هم تبدیل کرد، یکسان می‌گیرد. این یعنی فاصله‌ها در توپولوژی اهمیتی ندارند، زیرا می‌توان با کشیدن‌های پیوسته آن‌ها را تغییر داد. برای متخصص توپولوژی دیفرانسیل تبدیل‌های هموار (یعنی به اندازه کافی مشتق‌پذیر) اهمیت دارند و این منجر به رده‌بندی ظریف‌تری از خمینه‌ها و مسایلی متفاوت می‌شود. در انتهای هندسی‌تر طیف، ریاضی‌دانانی قرار دارند که به ماهیت فواصل بین نقاط خمینه (مفهومی که برای توپولوژی‌دان معنایی ندارد) و ساختارهای کمکی مربوط بر خمینه مانند متریک و انحنا علاقه‌مندند.

۴.۲ هندسه جبری

هندسه جبری، همان طور که از نامش پیدا است، جایگاه روشنی در تقسیم‌بندی بالا ندارد. هندسه جبری دانان هم به مطالعه خمینه‌ها می‌پردازند، اما با این تفاوت مهم که خمینه‌های مورد توجه آن‌ها با چندجمله‌ای‌ها تعریف می‌شوند.(یک مثال ساده سطح کره است، که می‌تواند به شکل مجموعه همه (x, y, z) هایی تعریف شود که $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.) این یعنی هندسه جبری جبری است چون درباره چندجمله‌ای‌ها است و در عین حال هندسی است زیرا مجموعه جواب‌های یک چندجمله‌ای چندمتغیره یک شیء هندسی است.

بخش مهمی از هندسه جبری مطالعه تکینگی‌ها است. مجموعه جواب‌های یک دستگاه از چندجمله‌ای‌ها اغلب، همه جا به استثنای تعداد کمی نقطه تکینگی، شبیه به یک خمینه است. مثلاً معادله $x^2 = y^2 + z^2$ یک مخروط است که راس آن در مبدا قرار گرفته است. اگر به یک همسایگی به قدر کافی کوچک از نقطه x بر روی مخروط نگاه کنید، اگر x نقطه $(0, 0, 0)$ نباشد، همسایگی شبیه به یک صفحه تخت خواهد بود. اما اگر x برابر $(0, 0, 0)$ باشد، هرچقدر هم که همسایگی را کوچک انتخاب کنیم، همچنان راس یک مخروط را خواهیم دید. (این یعنی مخروط واقعاً یک خمینه نیست بلکه یک خمینه با تکینگی است.)

تعامل میان جبر و هندسه بخشی از جذابیت هندسه جبری است. ارتباط با شاخه‌های دیگر ریاضی نیز انگیزه بیش‌تری برای مطالعه این موضوع ایجاد می‌کند. به طور خاص ارتباط نزدیکی با نظریه اعداد و عجیب‌تر از آن پیوندهای مهمی میان هندسه جبری و ریاضی-فیزیک موجود است.

۵.۲ آنالیز

آنالیز جلوه‌های متنوعی دارد. یکی از مباحث اساسی آن مطالعه معادلات دیفرانسیل پاره‌ای است. بسیاری از فرآیندهای فیزیکی، مثلاً حرکت در میدان گرانش، به کمک معادلات دیفرانسیل پاره‌ای توصیف می‌شوند. اما این معادلات در ریاضیات محض، به ویژه در هندسه، نیز ظاهر می‌شوند. بنابراین مطالعه آن‌ها به یک شاخه وسیع ریاضی با زیرشاخه‌ها و ارتباطات فراوان با بسیاری زمینه‌های دیگر تبدیل شده است.

آنالیز هم مثل جبر، یک وجه مجرد دارد. به ویژه بعضی ساختارهای مجرد مانند فضاهای باناخ، فضاهای هیلبرت، C^*-جبرها و جبرهای فون نویمان از اشیای مرکزی مورد مطالعه‌اند. این چهار ساختار همه فضاهای برداری با بعد نامتناهی و دو مثال آخر به علاوه جبر هستند، یعنی اعضای آن را می‌توان در هم ضرب کرد. چون این ساختارها نامتناهی‌بعد هستند، مطالعه آن‌ها نیازمند استدلال‌های حدی است، و به همین دلیل این موضوع به آنالیز تعلق دارد. از طرفی ساختار جبری C^*-جبرها و جبرهای فون نویمان سبب می‌شود که در مطالعه آن‌ها از ابزارهای جبری به شکل اساسی استفاده شود. همان طور که از واژه فضا برمی‌آید، هندسه هم در این‌جا نقش مهمی ایفا می‌کند.

یکی دیگر از شاخه‌های مهم آنالیز سیستم‌های دینامیکی است که هدف آن بررسی این موضوع است که اگر فرآیند ساده‌ای را بارها و بارها تکرار کنیم چه رخ می‌دهد. مثلاً اگر عدد مختلطی مثل z_0 را در نظر بگیریم و قرار دهیم $z_1 = z_0^2 + 2$ و سپس $z_2 = z_1^2 + 2$ و همین طور ادامه دهیم، رفتار حدی دنباله $z_0, z_1, z_2, \cdots$ چه خواهد بود؟ آیا به بی‌نهایت می‌گریزد یا در ناحیه کران‌داری از صفحه باقی خواهد ماند؟ جواب این سوال به طرز پیچیده‌ای به نقطه شروع، z_0، وابسته است. این که نحوه این وابستگی دقیقاً چگونه است یک سوال در سیستم‌های دینامیکی است.

گاهی فرآیندی که باید تکرار شود یک فرآیند بی‌نهایت کوچک است. مثلاً اگر مکان، سرعت و جرم همه سیاره‌های منظومه شمسی (و همین طور خورشید) را در یک لحظه از زمان بدانیم، قاعده ساده‌ای وجود دارد که به کمک آن می‌توانیم تغییر این مکان‌ها و سرعت‌ها را یک لحظه بعد محاسبه کنیم. پس از گذر این لحظه مکان‌ها و سرعت‌ها تغییر کرده‌اند اما قاعده اصلی همان باقی می‌ماند، بنابراین کل فرآیند را می‌توان به شکل نتیجه بی‌نهایت بار تکرار یک فرآیند بی‌نهایت کوچک در نظر گرفت. روش درست صورت‌بندی این موضوع استفاده از معادلات دیفرانسیل است و بنابراین بخش عمده‌ای از سیستم‌های دینامیکی به رفتار درازمدت جواب‌های این معادلات می‌پردازد.

۶.۲ منطق

واژه منطق گاهی به اختصار به همه آن شاخه‌هایی از ریاضیات اطلاق می‌شود که به سوالات بنیادی درباره خود ریاضیات می‌پردازند. شاخه‌هایی از قبیل نظریه مجموعه‌ها، نظریه رسته‌ها، نظریه مدل‌ها و منطق به معنای خاص که به قواعد استنتاج می‌پردازد. از جمله موفقیت‌های نظریه مجموعه‌ها می‌توان به قضایای ناتمامیت گودل و اثبات کوهن از استقلال فرضیه پیوستار اشاره کرد. به ویژه قضایای گودل تاثیر قابل توجهی بر ادراک فلسفی ما از ریاضیات داشته‌اند، اگرچه اکنون هم که مشخص شده است که همه گزاره‌های ریاضی لزوماً قابل اثبات یا رد نیستند، اکثر ریاضی‌دانان به شیوه گذشته خود به کار ادامه می‌دهند، چون بیشتر گزاره‌هایی که با آن سر و کار دارند تصمیم‌پذیرند. اما داستان نظریه مجموعه‌ها متفاوت است. از زمان گودل و کوهن، گزاره‌های تصمیم‌ناپذیر فراوانی کشف شده‌اند، و تعداد زیادی اصول موضوع جدید پیشنهاد شده‌اند که آن‌ها را تصمیم‌پذیر می‌کنند. بنابراین اکنون تصمیم‌پذیری به دلایل ریاضی و نه فلسفی مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

نظریه رسته‌ها موضوع دیگری است که با مطالعه فرآیندهای ریاضی آغاز و سپس به شاخه مستقلی بدل شد. تفاوت نظریه رسته‌ها با نظریه مجموعه‌ها در این است که تمرکزش بیش از آن که بر خود اشیاء ریاضی باشد بر آن چیزی است که با آن اشیاء انجام می‌شود به ویژه نگاشت‌هایی که آن‌ها را به هم تبدیل می‌کند.

یک مدل برای مجموعه‌ای از اصول، یک ساختار ریاضی است که آن اصول، اگر به شکل مناسبی تعبیر شوند، در آن درست باشند. مثلاً هر مثال مشخص از گروه مدلی برای اصول نظریه گروه‌ها است. متخصصین نظریه مجموعه‌ها مدل‌های مختلف برای اصول نظریه مجموعه‌ها را مطالعه می‌کنند و این گامی اساسی در اثبات قضایای مشهوری است که نام بردیم، اما مفهوم مدل کاربرهای وسیعی دارد و به کشف‌های مهمی در حوزه‌های دیگر غیر از نظریه مجموعه‌ها نیز منجر شده است.

۷.۲ ترکیبیات

برای تعریف ترکیبیات راه‌های متنوعی می‌توان در پیش گرفت، که اگرچه هیچ کدام به تنهایی چندان رضایت‌بخش نیستند اما در کنار هم تصویری از موضوع ارایه می‌دهند. اولین تعریف این است که ترکیبیات در باره شمارش اشیاء است. برای مثال این سوال که به چند راه می‌توان یک جدول مربعی را با صفرها و یک‌ها پر کرد طوری که در هر سطر و ستون حداکثر دو یک قرار بگیرند؟ چون مربوط به شمارش است پس به معنایی ساده ترکیبیاتی است.

ترکیبیات را گاهی ریاضیات گسسته نیز می‌نامند چون به مطالعه ساختارهای گسسته می‌پردازد. به بیان ساده یک شیء گسسته است اگر از نقاطی مجزا از هم تشکیل شده باشد و پیوسته است اگر بتوان از هر نقطه آن بدون پرش‌های ناگهانی به نقطه دیگر حرکت کرد. (شبکه صحیح $\mathbb{Z}^۲$، تشکیل شده از همه نقاط صفحه با مختصات صحیح، مثال خوبی از یک ساختار گسسته و سطح یک کره نمونه خوبی از یک ساختار پیوسته است.) ترکیبیات پیوند نزدیکی با علوم کامپیوتر نظری دارد (که با ساختاری با ماهیت گسسته یعنی دنباله‌های صفر و یک سر و کار دارد)، و گاهی در مقابل آنالیز قرار می‌گیرد، اگرچه ارتباطاتی هم میان این دو وجود دارد.

سومین نگاه آن است که ترکیبیات به ساختارهای ریاضی می‌پردازد که قیدهای کمی دارند. به کمک این ایده می‌توان توضیح داد که چرا نظریه اعداد، با این که ساختاری مشخصاً گسسته یعنی اعداد صحیح مثبت را مطالعه می‌کند، به عنوان شاخه‌ای از ترکیبیات در نظر گرفته نمی‌شود.

برای توضیح بهتر این نکته آخر، به دو مسأله ظاهراً مشابه زیر، درباره اعداد صحیح مثبت توجه کنید.

- آیا عدد صحیح مثبتی وجود دارد که دست کم به هزار روش مختلف قابل نمایش به صورت مجموع دو مربع کامل باشد؟
- اگر $a_۱, a_۲, a_۳, \cdots$ دنباله‌ای از اعداد صحیح مثبت باشد که هر a_n بین $n^۲$ و $(n+۱)^۲$ قرار داشته باشد، آیا همیشه عدد صحیح مثبتی وجود دارد که دست کم به هزار روش مختلف قابل نمایش به صورت مجموع دو عدد این دنباله باشد؟

مسأله اول نظریه اعدادی محسوب می‌شود، چون به یک دنباله بسیار خاص یعنی دنباله اعداد مربع کامل مربوط است، و انتظار می‌رود که بتوان با استفاده از ویژگی‌های این دنباله جواب سوال را، که در این مورد مثبت است، پیدا کرد.

مسأله دوم درباره دنباله‌ای با ساختار به مراتب کمتر است. همه آن‌چه که در مورد a_n می‌دانیم اندازه تقریبی آن است (این که کمابیش نزدیک به $n^۲$ است) اما از ویژگی‌های جزئی‌تر آن چیزی نمی‌دانیم، مثلاً این‌که آیا اول یا مکعب کامل یا توانی از ۲ است. به همین دلیل این مسأله به ترکیبیات تعلق دارد. پاسخ آن هنوز مشخص نیست. جواب اگر مثبت باشد نشان خواهد داد که چهره نظریه اعدادی مسأله اول به معنایی انحرافی بوده است و آن‌چه واقعاً اهمیت دارد نرخ رشد دنباله اعداد مربع کامل است.

۸.۲ علوم کامپیوتر نظری

مسأله علوم کامپیوتر نظری به طور عمومی کارایی محاسبه، یعنی میزان منابع لازم، مثل زمان و حافظه کامپیوتر، برای انجام اعمال محاسباتی است. مدل‌های ریاضی موجود برای محاسبه این امکان را فراهم می‌کنند که بتوان مسایل مربوط به کارایی محاسبه را بدون توجه به جزئیات چگونگی پیاده شدن الگوریتم‌ها مطالعه کرد. بنابراین علوم کامپیوتر نظری حقیقتاً شاخه‌ای از ریاضیات محض است. می‌توان تصور کرد که کسی متخصص برجسته علوم کامپیوتر نظری ولی در عین حال از برنامه‌نویسی برای کامپیوتر ناتوان باشد. اما این شاخه کاربردهای قابل توجهی نیز، به ویژه در رمزنگاری، داشته است.

۹.۲ احتمال

پدیده‌های بسیاری، از زیست‌شناسی و اقتصاد تا علوم کامپیوتر و فیزیک، وجود دارند که چنان پیچیده‌اند که بهتر است به جای تلاش برای فهم آن‌ها با جزئیات کامل به گزاره‌های احتمالاتی درباره‌شان بسنده کنیم. مثلاً اگر بخواهیم نحوه شیوع یک بیماری را تحلیل کنیم، امیدی نیست که بتوانیم همه اطلاعات مرتبط (از قبیل این که چه کسی با چه کسی در تماس خواهد بود) را در نظر بگیریم اما می‌توانیم مدلی ریاضی بسازیم و آن را تحلیل کنیم. چنین مدل‌هایی رفتارهای جالب و غیر منتظره‌ای نشان می‌دهند که مستقیماً به واقعیت مرتبط است. برای مثال ممکن است یک احتمال بحرانی p با این ویژگی وجود داشته باشد: اگر احتمال آلوده شدن در تماسی از یک نوع از p بیش‌تر باشد، فراگیر شدن بیماری کاملاً ممکن است اما در غیر این صورت می‌توان تقریباً با اطمینان گفت که بیماری ریشه‌کن خواهد شد. به تفاوتی قاطع در رفتار از این دست گذر فاز می‌گویند.

طراحی یک مدل ریاضی مناسب گاهی ممکن است به طرز عجیبی دشوار باشد. مثلاً به نظر می‌رسد ذرات در برخی محیط‌های فیزیکی به صورت کاملاً تصادفی حرکت می‌کنند. آیا می‌توان به یک مسیر پیوسته تصادفی معنا داد؟ پاسخ این سوال مثبت و نتیجه این کار نظریه زیبای حرکت براونی است، اما مراحل کار، به دلیل پیچیدگی مسیرهای ممکن، بسیار پیچیده است.

۱۰.۲ ریاضی فیزیک

رابطه ریاضیات و فیزیک در طول چند قرن به شکل عمیقی متحول شده است. تا قرن هجدهم مرز مشخصی میان این دو وجود نداشت و بسیاری از ریاضی‌دانان مشهور، دست کم در زمان‌هایی از دوره فعالیت خود فیزیک‌دان هم بوده‌اند. در طول قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم این وضعیت به تدریج تغییر کرد، تا آن که در نیمه قرن بیستم دو رشته به طور کامل از هم جدا شده بودند. سپس تا پایان قرن بیستم ریاضی‌دانان دریافتند که ایده‌هایی که فیزیک‌دانان کشف کرده بودند اهمیت ریاضی فوق‌العاده‌ای دارند.

هنوز تفاوت فرهنگی عمیقی میان دو رشته وجود دارد: ریاضی‌دانان علاقه بسیار بیش‌تری به اثبات‌های دقیق دارند، در حالی که برای فیزیک‌دانان، که از ریاضیات به عنوان ابزار استفاده می‌کنند، یک توجیه قانع کننده برای درستی یک گزاره ریاضی، حتی اگر واقعاً اثبات نباشد، کفایت می‌کند. در نتیجه فیزیک‌دانان که با محدودیت کمتری عمل می‌کنند، اغلب بسیار پیش از ریاضی‌دانان پدیده‌های ریاضی جذاب را کشف می‌کنند.

یافتن اثبات‌های دقیق برای این کشفیات اغلب بسیار دشوار است. این کار بسیار بیش از یک تمرین فضل فروشانه جهت تأیید گزاره‌هایی است که هیچ فیزیک‌دانانی در درستی‌شان شک ندارد. در واقع این تلاش اغلب به کشفیات ریاضی جدیدی منجر می‌شود. مثال‌های زیادی از این تعامل نشان می‌دهد که چطور ریاضیات و فیزیک موجب غنای یکدیگر شده‌اند.

هندسه جبری چیست؟

دکتر امیر جعفری

هندسه‌ی جبری این شهرت را دارد که رشته‌ایست پیچیده، محرمانه و بسیار مجرد که طرفدارانش به طور سری در حال نقشه‌ریزی برای تصرف بقیه‌ی ریاضیات هستند و به نوعی این نکته آخر درست است.[1]

۱ مقدمه

هندسه جبری به عنوان تلفیقی از هندسه و جبر با معرفی دستگاه مختصات توسط دکارت و فرما در قرن هفدهم به طور مشخص به وجود آمد. استفاده از اعداد برای بیان خواص هندسی اشیاء که ما آن را امروزه امری کاملا طبیعی و بدیهی می‌گیریم، در واقع آن‌چنان بدیهی نیز نمی‌باشد. هرمان وایل ریاضی‌دان بزرگ آلمانی گفته است:

"معرفی عدد به عنوان مختصات یک عمل خشونت‌آمیز است."

اقلیدس در کتاب اصول خود وقتی خواص هندسی دایره را بررسی می‌کرد و یا تلاش می‌نمود تا اعداد گویای x و y با $x^2+y^2=1$ را پیدا کند، از این که این دو مساله به هم مربوطند بی‌اطلاع بود.

نوشتن دایره به صورت معادله‌ی $x^2+y^2=1$ مزایایی نیز دارد. مثلا دایره‌ی معمولی به مرکز مبدا و شعاع واحد، مجموعه جواب‌های معادله‌ی $x^2+y^2=1$ برای x و y حقیقی است. ولی به سادگی می‌توان در مورد جواب‌های معادله در اعداد گویا، یا یک میدان دلخواه و حتی در یک حلقه‌ی دلخواه مطالعه کرد و احتمالا شهود هندسی می‌تواند به بررسی این مسائل جبری کمک کند. با توجه به این‌که معادله‌ی $x^2+y^2=1$ ضرایب گویا دارد، نقاط دایره‌ی واحد برای $x,y\in\mathbb{R}$ مجهز به عمل گروه گالوای $Gal(\mathbb{R}/Q)$ خواهد بود: اگر $\sigma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ یک یکریختی میدان‌ها باشد، اگر (x,y) در معادله صدق کند آن‌گاه $(\sigma x,\sigma y)$ نیز صدق می‌کند.

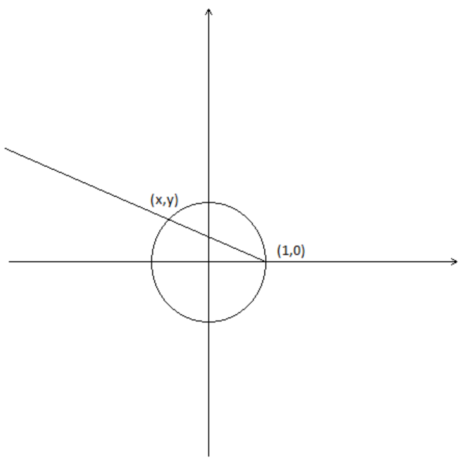
۲ پرمایش گویا

محاسبه‌ی همه‌ی نقاط گویای روی دایره‌ی $x^2+y^2=1$ به یونان باستان و دیوفانتوس باز می‌گردد. ایده‌ی او برای محاسبه این نقاط با استفاده از دستگاه مختصات به سادگی قابل بیان است. یک جواب بدیهی این معادله نقطه‌ی $(1,0)$ است. حال اگر (x,y) یک نقطه‌ی گویای دیگر باشد، شیب خط واصل بین این دو نقطه $\frac{y}{x-1}$ عددی گویا مانند t است، پس اگر به جای y در معادله $t(x-1)$ قرار داده شود:

$$x^2+t^2(x^2-2x+1)=1$$

$$(1+t^2)x^2-2t^2x+t^2-1=0$$

یک جواب این معادله $x=1$ است که متعلق به نقطه‌ی $(1,0)$ است، چون ضرب ریشه‌ها $\frac{t^2-1}{t^2+1}$ است، پس ریشه‌ی دیگر $x=\frac{t^2-1}{t^2+1}$ است و $y=t(x-1)=\frac{-2t}{t^2+1}$. پس $(\frac{t^2-1}{t^2+1},\frac{-2t}{t^2+1})$ همه‌ی نقاط گویای روی دایره را به جز $(1,0)$ به ما می‌دهد.



این روش را می‌توان برای محاسبه‌ی تمام نقاط گویای روی خم $f(x,y)=0$ که f یک چندجمله‌ای درجه‌ی ۲ و با ضرایب گویا است، به کار برد. تنها نکته یافتن حداقل یک نقطه با مختصات گویا روی این خم است که لزوما وجود ندارد (مثلا $x^2+y^2=-1$ را در نظر بگیرید. مثال کمی مشکل‌تر $x^2+y^2=3$).

خط واصل بین نقطه‌ی گویای (x_0,y_0) و نقطه‌ی گویای دلخواه دیگر مانند (x,y) دارای شیب گویای $t=\frac{y-y_0}{x-x_0}$ است. با جایگذاری $y=t(x-x_0)+y_0$ در معادله $f(x,y)=0$ به یک معادله درجه ۲ برحسب x و ضرایب برحسب t می‌رسیم. یکی از ریشه‌ها x_0، عددی گویا است و چون حاصل‌ضرب ریشه‌ها برحسب عبارت گویایی از t قابل بیان است، ریشه‌ی دیگر نیز عبارتی گویا برحسب t می‌شود، یعنی $x=\phi(t)$ که ϕ خارج‌قسمت دو چندجمله‌ای است و مشابها $y=\psi(t)$ به دست می‌آید. با این روش تمام نقاط گویای روی $f(x,y)=0$ به جز نقطه‌ی (x_0,y_0) به دست می‌آید.

اگر $\mathbb{A}^1$ را خط یک بعدی (آفین) و X را جواب‌های معادله‌ی

[1] دیوید مامفورد

$f(x,y)=0$ در فضای دوبعدی $\mathbb{A}^2$ بگیریم، با این روش دو تابع:

$$F:\mathbb{A}^1\to X$$

$$t\mapsto(\phi(t),\psi(t))$$

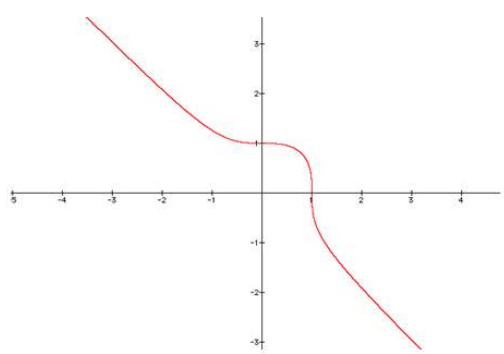
و

$$G:X\to\mathbb{A}^1$$

$$(x,y)\mapsto\frac{y-y_0}{x-x_0}$$

با استفاده از توابع گویا (خارج‌قسمت دو چندجمله‌ای) تعریف کرده‌ایم که روی همه‌ی نقاط به جز یک تعداد متناهی از نقاط تعریف شده‌اند. به طور فنی می‌گوییم X با $\mathbb{A}^1$ به طور دوگویا هم‌ارز[2] است.

اگر جواب‌ها را در یک میدان بسته‌ی جبری، مثلا $\mathbb{C}$ در نظر بگیریم، شرط وجود حداقل یک جواب برای معادله‌ی $f(x,y)=0$ زائد خواهد بود و در واقع ثابت کرده‌ایم هر معادله‌ی درجه ۲ به طور دوگویا با $\mathbb{A}^1$ روی اعداد مختلط هم‌ارز است. ولی این حکم برای معادلات درجه بالاتر درست نیست. مثلا نشان می‌دهیم معادله‌ی $x^3+y^3=1$ (خم فرمایی) به طور دوگویا با $\mathbb{A}^1$ هم‌ارز نیست.



اگر $x^3+y^3=1$ با $\mathbb{A}^1$ به طور دوگویا هم‌ارز باشد، چندجمله‌ای‌های $a(t)$، $b(t)$ و $c(t)$ که دوبه‌دو نسبت به هم اولند و غیرثابت هستند یافت می‌شوند که $a(t)^3+b(t)^3=c(t)^3$. با مشتق‌گیری به دست می‌آید:

$$3a^2(t)a'(t)+3b^2(t)b'(t)=3c^2(t)c'(t)$$

بنابراین $a^2(t)=\frac{c^2(bc'-b'c)}{a'b-ab'}$. بدون کاسته شدن از کلیت می‌توان فرض کرد $\deg a\geq\deg b\geq\deg c$ که با $a^2|bc'-b'c$ در تناقض است. همین استدلال برای $x^n+y^n=1$ به شرط آن‌که $n\geq 3$ باشد، نیز کار می‌کند.

[2]birational equivalency

۳ قضیه بزو

این قضیه در حالت ساده می‌گوید:

> اگر $f(x,y)$ و $g(x,y)$ دوچندجمله‌ای از درجات n و m باشند که عامل مشترکی ندارند، آن‌گاه تعداد نقاط تلاقی $f(x,y)=0$ و $g(x,y)=0$ حداکثر $m.n$ است.

ضرایب و جواب‌ها در یک میدان دلخواه K در نظر گرفته می‌شود (برای سادگی فرض می‌کنیم K از مشخصه‌ی صفر است). در حالتی که $m=n=1$، این قضیه بیان‌گر این حقیقت ساده‌ی هندسی است، که دو خط راست همدیگر را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کنند، مگر آن‌که بر هم منطبق باشند، است. در حالت تباهیده که f حاصل‌ضرب n عامل درجه‌ی ۱ و g حاصل‌ضرب m عامل درجه ۱ باشد، نقاط تلاقی از برخورد یکی از n خط در f با یکی از m خط در g به دست می‌آیند و بنابراین حداکثر mn نقطه‌ی تلاقی وجود خواهد داشت.

اگر بخواهیم صورت دقیق‌تر قضیه‌ی بزو را بیان کنیم، نیاز به چند نکته داریم. اولا باید جواب‌ها را در فضایی بررسی کنیم که هر دو خط راست یا دقیقا در یک نقطه تلاقی داشته باشند و یا منطبق باشند. به بیان دیگر باید برای هر راستای خطوط موازی یک نقطه در بی‌نهایت به صفحه اضافه کنیم. این صفحه‌ی تعمیم یافته را صفحه‌ی تصویری یا $\mathbb{P}^2_K$ می‌نامند. نقاط این فضا، خطوط گذرا از مبدا در K^3 هستند. به طور دقیق‌تر نقاط این فضا کلاس‌های هم‌ارزی سه‌تایی‌های (x,y,z) هستند که هرسه همزمان صفر نباشند و:

$$(x,y,z)\sim(x',y',z')$$

$$\iff \exists\lambda\in K-\{0\}:x=\lambda x',y=\lambda y',z=\lambda z'$$

این کلاس‌های هم‌ارزی را به $[x:y:z]$ نشان می‌دهیم. اگر $z\neq 0$ آن‌گاه این نقاط را می‌توان با نقاط صفحه $(\frac{x}{z},\frac{y}{z})$ یکی کرد. اگر $z=0$ آن‌گاه نقاط $[x:y:0]$ همان نقاط بی‌نهایت برای هر راستای خطوط موازی خواهند بود. هر نقطه‌ی $[a:b:0]$ راستای موازی خطوط $ax+by=c$ را مشخص می‌کند. مشابها، می‌توان فضای تصویری n بعدی $\mathbb{P}^n$ را معرفی کرد و صفرهای مشترک چندجمله‌ای‌های همگن $f_i(x_0,x_1,\dots,x_n)$ را در $\mathbb{P}^n$ بررسی کرد. این مجموعه‌ها را واریته‌ی تصویری می‌نامند.

نکته‌ی دیگری که باید در بیان صورت دقیق قضیه‌ی بزو لحاظ کرد، این است: در حالتی که تلاقی f از درجه‌ی n با یک خط مدنظرمان باشد، باید یک معادله‌ی درجه‌ی n با یک متغیر را حل کنیم. این معادله دقیقا n جواب خواهد داشت اگر:

۱. میدان زمینه بسته‌ی جبری باشد مثلا $\mathbb{C}$.

۲. جواب‌ها را با احتساب تکرر آن‌ها بشماریم.

بنابراین صورت دقیق قضیه‌ی بزو با تغییر مفهوم تکرر از یک متغیر به دو متغیر قابل بیان خواهد بود:

قضیه ۱. *اگر $f(x,y,z)$ و $g(x,y,z)$ دو چندجمله‌ای همگن از درجات n و m باشند که عامل مشترکی نداشته باشند، آن‌گاه تعداد جواب‌های دستگاه $f=0, g=0$ در $\mathbb{P}^2_K$ (K: یک میدان بسته‌ی جبری) با احتساب تکرر دقیقا برابر $n.m$ خواهد بود.*

توضیح مختصری در مورد چگونگی شمردن تکرر برخورد دو خم می‌دهیم: فرض کنید $f(x,y,z)$ و $g(x,y,z)$ چندجمله‌ای‌های همگنی از درجات به ترتیب n و m باشند که هیچ عامل مشترکی ندارند. می‌خواهیم تکرر جواب $[a:b:c]\in\mathbb{P}^2_K$ از دستگاه $f=g=0$ را معرفی کنیم. با یک تغییر مختصات خطی در $\mathbb{P}^2_K$ در صورت لزوم، می‌توان فرض کرد که تمامی جواب‌های از این دست شرط $a\neq 0$ را برآورده می‌کنند. با در نظر گرفتن $f(x,y,z)$ و $g(x,y,z)$ به عنوان چندجمله‌ای‌هایی که از z و با ضرایب در $K[x,y]$، مبین[3] آن‌ها یک چندجمله‌ای همگن از درجه‌ی mn مانند $r(x,y)\in K[x,y]$ خواهد بود که متحد با صفر نیست، چرا که در غیر این صورت $f(x,y,z)$ و $g(x,y,z)$ در $K[x,y,z]$ عامل مشترک خواهند داشت. حال چندجمله‌ای $r_*(T)\in K[T]$ از درجه‌ی nm موجود است به قسمی که: $r(x,y)=x^{mn}r_*(\frac{y}{x})$. تکرر $[a:b:c]$ در تقاطع $f=0$ و $g=0$ را برابر تکرر ریشه‌ی $\frac{b}{a}$ از $r_*(T)$ می‌گیریم (توجه کنید که $a\neq 0$ بود و چون $f(a,b,c)=g(a,b,c)=0$، برای مبین f و g داریم $r(a,b)=0$ و از آن‌جا $r_*(\frac{b}{a})=0$.) و اکنون قضیه‌ی بزو به این حکم تقلیل می‌یابد که چندجمله‌ای درجه‌ی nm، $r_*(T)$ با ضرایب در میدان بسته‌ی جبری K، با حساب تکرر nm ریشه دارد که این هم بدیهی است.

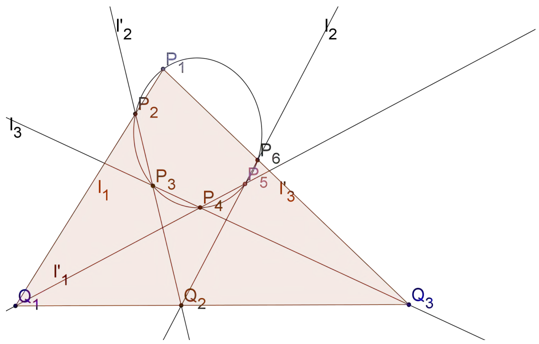
اکنون، قبل از آن‌که به اثبات قضیه‌ی بزو بپردازیم، دو کاربرد از آن را بیان می‌کنیم.

قضیه ۲. **(قضیه پاسکال)** *فرض کنید $P_1,P_2,\ldots,P_6$ نقاطی روی دایره (به ترتیب) باشند و Q_i نقطه‌ی تلاقی P_iP_{i+1} و $P_{i+3}P_{i+4}$ (با جایگشت دوری) باشد. آن‌گاه Q_1، Q_2 و Q_3 روی یک خط راست واقعند.*

l_1، l_2 و l_3 را خطوط P_1P_2، P_3P_4 و P_5P_6 و مشابها l'_1، l'_2 و l'_3 را خطوط مقابل P_4P_5، P_2P_3 و P_1P_6 بنامید. برای هر λ معادله‌ی درجه۳:

$$(*)l_1l_2l_3+\lambda l'_1l'_2l'_3$$

[3] resultant



از نقاط $P_1,\ldots,P_6$ و Q_1,Q_2,Q_3 می‌گذرد. نقطه‌ی هفتم P_7 را روی دایره متمایز از ۶ نقطه‌ی اول انتخاب کنید و λ را طوری انتخاب کنید که از این نقطه‌ی ۷ام بگذرد. در این صورت معادله‌ی دایره (یک معادله درجه ۲) و معادله‌ی درجه ۳ $(*)$ در هفت نقطه اشتراک دارند و بنابر قضیه‌ی بزو باید عامل مشترکی داشته باشند. بنابراین معادله‌ی $(*)$ به صورت حاصل‌ضربی از معادله‌ی دایره و یک معادله‌ی درجه یک (یک خط) می‌باشد. چون نقاط Q_1,Q_2,Q_3 روی دایره نیستند، پس همگی در این معادله درجه یک صدق می‌کنند و بنابراین روی یک خط راست هستند.

۴ شرکت‌پذیری جمع در یک خم بیضوی

منظور از یک خم بیضوی، معادله‌ای به شکل زیر است:

$$y^2=x^3+ax+b$$

که a و b در میدان زمینه‌ی K قرار دارند و خم ناتکین است. این معادل با این است که معادله‌ی $x^3+ax+b=0$ ریشه‌ی مکرر نداشته باشد و یا معادلا $4a^3+27b^2$ ناصفر باشد. بهتر است این خم را در فضای تصویری $\mathbb{P}^2(K)$ در نظر بگیریم که در واقع در این صورت یک نقطه در بی‌نهایت به این خم اضافه می‌شود و معادله‌ی آن به طور همگن شده به صورت زیر در می‌آید:

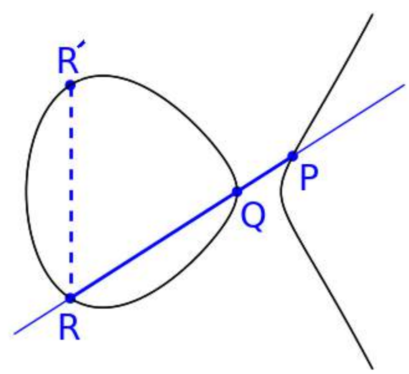
$$y^2z=x^3+axz^2+bz^3 \tag{1}$$

فضای تصویری $\mathbb{P}^n$ کلاس هم‌ارزی $n+1$تایی‌های مرتب $(x_0,x_1,\ldots,x_n)$ است که همگی با هم صفر نیستند. دو نقطه‌ی $(x_0,x_1,\ldots,x_n)$ و $(y_0,y_1,\ldots,y_n)$ هم‌ارز هستند هرگاه مضربی از یکدیگر باشند. بنابراین هر چندجمله‌ای همگن و یا یک خانواده از چندجمله‌ای‌های همگن از $n+1$ متغیر می‌تواند یک زیرمجموعه متشکل از صفرهای مشترک آن‌ها از $\mathbb{P}^n$ تعریف کند که به این گونه زیرمجموعه‌ها، واریته‌های تصویری می‌گوییم. $\mathbb{P}^n$ اجتماع زیرمجموعه‌هایی که هر کدام با فضای آفین یکریختند می‌باشد. به

طور دقیق‌تر اگر $x_i \neq 0$، آن‌گاه می‌توان بر x_i تقسیم کرد و نقطه‌ای از $\mathbb{A}^n$ یافت.

اگر P و Q دو نقطه از خم بیضوی ۱ باشند، آن‌گاه خط واصل بین P و Q این خم را دقیقا در یک نقطه‌ی دیگر R قطع می‌کند. دلیل این امر این است که اگر معادله‌ی پارامتری خط واصل بین P و Q را در معادله جایگزین کنیم، یک معادله درجه ۳ برحسب پارامتر به دست می‌آید که دو جواب آن در K است. پس جواب سوم آن نیز در K خواهد بود. اگر R' را قرینه R نسبت به محور xها بگیرید (در واقع R' نقطه‌ی تلاقی خط واصل بین R و نقطه‌ی بی‌نهایت O با خم بیضوی است) تعریف می‌کنیم:

$$P \oplus Q = R'$$



به سادگی می‌توان تحقیق کرد که این یک عمل جابه‌جایی است که دارای عضو خنثی O است و $R \oplus R' = O$. تنها اصل نابدیهی در گروه‌ها برای این عمل شرکت‌پذیری آن است یعنی:

$$(P \oplus Q) \oplus T = P \oplus (Q \oplus T)$$

این حکم به سادگی از لم زیر که خود نتیجه‌ای از قضیه‌ی بزو است، نتیجه می‌شود:

لم ۳. *اگر ۸ نقطه در $\mathbb{P}^2$ داده شده باشند که هیچ چهارتایی روی یک خط راست و هیچ هفت‌تایی روی یک خم مخروطی (درجه ۲) قرار نداشته باشند آن‌گاه می‌توان یک نقطه‌ی نهمی یافت که هر خم بیضوی (درجه ۳) که از این ۸ نقطه می‌گذرد، از این نقطه‌ی نهم نیز بگذرد.*

طرحی از اثبات: یک معادله درجه ۳ همگن مانند $F(x_0, x_1, x_2)$ از ۱۰ ضریب تشکیل شده است. بنابراین اینکه این خم از ۸ نقطه بگذرد هنوز دو درجه آزادی روی F می‌گذارد، یعنی می‌توان دو خم مکعبی F_1 و F_2 یافت به قسمی که همه‌ی خم‌های دیگر از این دست به شکل $\alpha F_1 + \beta F_2$ باشند. حال بنابر قضیه‌ی بزو F_1 و F_2 یکدیگر را در ۹ نقطه قطع می‌کنند که ۸ نقطه‌ی آن از قبل داده شده است و این نقطه‌ی آخر جواب مساله است.

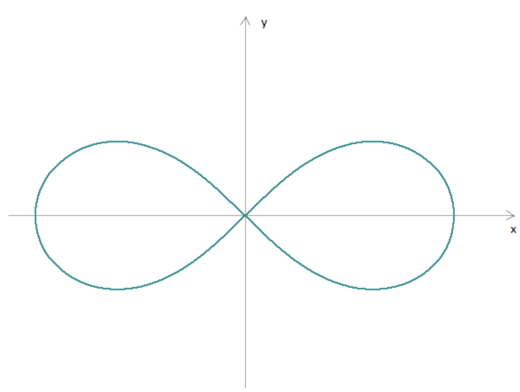
۵ انتگرال‌های جبری و رویه‌های ریمانی

شاید به نظر عجیب بیاید ولی یکی دیگر از منابع الهام برای هندسه جبری، حساب دیفرانسیل و انتگرال بوده است. از آغاز تعریف انتگرال توسط نیوتن و لایب‌نیتز، محاسبه‌ی انتگرال‌های توابع به طور صریح یکی از مشغله‌های ریاضیدانان بوده است. اگر

$$f(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$$

یک تابع گویا از t باشد (یعنی P و Q دو چندجمله‌ای باشند) آن‌گاه ریاضیدانان قرن ۱۷ و اوایل قرن ۱۸ می‌دانستند چگونه $\int f(t)\mathrm{d}t$ را با استفاده از روش تفکیک کسرها برحسب چندجمله‌ای‌ها و توابع لگاریتمی محاسبه کنند. بنابراین اگر x و y در معادله‌ای درجه ۲ صدق کنند، با روشی که در آغاز این مقاله به آن اشاره شد، چون می‌توان x و y را برحسب یک پارامتر گویا از t نوشت، پس انتگرال‌های از نوع $\int f(x,y)\mathrm{d}x$ قابل محاسبه خواهند بود. بررسی خواص انتگرال‌هایی از این جنس ولی برای وقتی که رابطه‌ی بین x و y از درجه بیشتر از ۲ است به خاطر محاسباتی از قبل، محیط بیضی و دیگر خم‌ها (مانند لمنیسکات) توسط ریاضیدانانی از قبیل برنولی، فاگنانو و اویلر، لاگرانژ، لژاندر و در نهایت آبل بررسی شد، که آبل در واقع جوابی کامل و جامع برای این مساله یافت.

یاکوب برنولی در سال ۱۶۹۴ به بررسی محاسبه محیط لمنیسکات -خمی که توسط معادله‌ی $(x^2 + y^2) = x^2 - y^2$ داده می‌شود- پرداخت. این خم نمودار زیر را دارد:



یک محاسبه‌ی ساده برای محاسبه‌ی این محیط به محاسبه‌ی انتگرالی به شکل

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}}$$

منجر می‌شود. در سال ۱۷۱۸، فاگنانو موفق شد که فرمول زیر را

برای انتگرال ثابت کند:

$$2\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}} = \int_0^{\frac{2x\sqrt{1-x^4}}{1+x^4}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}}$$

اویلر با معادله این اثر فاگنانو موفق به تعمیم این فرمول شد. این اثر اویلر در ۱۷۶۸ چاپ شد:

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}} + \int_0^y \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}} = \int_0^{g(x,y)} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}}$$

که $g(x,y)$ به طور صریح به صورت

$$g(x,y) = \frac{x\sqrt{1-y^4}+y\sqrt{1-x^4}}{1+x^2y^2}$$

قابل محاسبه است. شاید جالب باشد که ارتباط این فرمول با جمع نقاط در یک خم بیضوی مطرح شود. معادله‌ی $y^2 = 1-x^4$ هرچند به شکل یک معادله مکعبی نیست ولی با یک تبدیل متغیر می‌تواند به آن تبدیل می‌شود: (راهنمایی: بگیرید $X = \frac{1}{x-1}$ و $Y = \frac{y}{(x-1)^2}$) بنابراین معادله‌ی $y^2 = 1-x^4$ یک خم بیضوی است که می‌توان نقاط آن‌را به یک گروه آبلی تبدیل کرد. ۱-فرم دیفرانسیل $\frac{\mathrm{d}x}{y}$ (که همان $\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}}$ است) تحت عمل این گروه ناوردا است. (چرا؟)

حال می‌توان محاسبه کرد که:

$$(x,\sqrt{1-x^4}) \oplus (y,\sqrt{1-y^4}) = (g(x,y),\sqrt{1-g(x,y)^4})$$

پس:

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{y} + \int_0^y \frac{\mathrm{d}x}{y} = \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{y} + \int_x^{x\oplus y} \frac{\mathrm{d}x}{y} = \int_0^{g(x,y)} \frac{\mathrm{d}x}{y}$$

توجه کنید که این فرمول‌ها (یعنی فرمول فاگتانو و اویلر) مشابه فرمول‌های مثلثاتی:

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}$$

$$\sin(\theta_1+\theta_2) = \sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_2\cos\theta_1 = \sin\theta_1\sqrt{1-\sin^2\theta_2} + \sin\theta_2\sqrt{1-\sin^2\theta_2}$$

است چرا که اگر $x = \sin\theta$ آن‌گاه $\theta = \arcsin x = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$ پس فرمول‌های بالا تبدیل می‌شوند به

$$2\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{2x\sqrt{1-x^2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} + \int_0^y \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$$

بنابراین طبیعی است که به جای انتگرال‌هایی از نوع $\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}}$ وارون آن‌ها بررسی شود. (sin تابعی بهتر از arcsin است حداقل sin تابعی متناوب است!)

در واقع گاوس در دفترچه‌ی خود فرمولی مبنی بر محاسبه‌ی دوره‌ی تناوب وارون تابع $\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}}$ دارد. او ثابت کرد اگر $sl(x)$ این تابع باشد (sl برای سینوس لمنیسکاتی) آن‌گاه

$$sl(x+\omega) = sl(x+i\omega) = sl(x)$$

که $\omega = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}}$ (توجه کنید که $2\pi = 4\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$ دوره تناوب sin است.)

آبل جوان از ۱۸۲۶ تا ۱۸۲۹ تحقیقاتی بسیار عمیق درباره‌ی انتگرال‌هایی از نوع فوق که امروزه به آن‌ها انتگرال‌های آبلی می‌گوییم انجام داد. متاسفانه این اثر که در ۱۸۲۶ به آکادمی فرانسه فرستاده شده بود به علت بی‌توجهی ریاضیدانان آن زمان، سال‌ها بعد از مرگ آبل در سال ۱۸۴۱ به چاپ رسید. ژاکوبی در نامه‌ای به لژاندر به تاریخ ۱۹ مارس ۱۸۲۹ می‌نویسد:

" چه اکتشاف بزرگی، تعمیم آبل از انتگرال اویلر! هرگز من چیزی به این زیبایی ندیده‌ام! اما چگونه است که این کشف که به احتمال زیاد بزرگترین کشف در ریاضیات این قرن است و به آکادمی شما سال‌ها قبل فرستاده شده است، از دید شما و همکارانتان دور مانده است؟ "

بگذارید قبل از این که فرمول آبل را بیان کنیم به مثالی از آن بپردازیم.

اگر بخواهیم فرمول‌هایی مانند اویلر و فاگتانو برای انتگرال‌های مشابهی مانند $\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^6}}$ بیابیم، می‌توان ثابت کرد در حالت کلی نمی‌توان انتظار داشت که:

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^6}} + \int_0^y \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^6}} = \int_0^{g(x,y)} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^6}}$$

اما چیزی که آبل ثابت کرد، این بود که در حد یک تعداد عامل مقدماتی (یعنی توابعی گویا، جبری و یا لگاریتمی) هر جمع متناهی

$$\int_0^{x_1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^6}} + \cdots + \int_0^{x_m} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^6}}$$

را می‌توان به صورت جمع دو انتگرال $\int_0^{g_1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^6}} + \int_0^{g_2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^6}}$ که g_1 و g_2 توابعی جبری از $x_1,\ldots,x_m$ هستند، نوشت. حال می‌توان فرمول کلی را بیان کرد.

قضیه ۴. (قضیه آبل) *برای انتگرال* $\int f(x,y)\mathrm{d}x$ *که* x *و* y *در یک رابطه‌ی جبری* $P(x,y) = 0$ *صدق کند، می‌توان عدد صحیح* g *که تنها به* P *بستگی دارد را یافت که هر انتگرال به فرم*

$$\int_0^{x_1} f(x,y)\mathrm{d}x + \cdots + \int_0^{x_m} f(x,y)\mathrm{d}x$$

را می‌توان به شکل حداکثر g *انتگرال (البته دوباره در حد یک تعداد عامل مقدماتی)*

$$\int_0^{z_1} f(x,y)\mathrm{d}x + \cdots + \int_0^{z_g} f(x,y)\mathrm{d}x$$

نوشت که z_iها توابعی جبری از $x_1, \ldots, x_m$ هستند.

بعدها ریمان عدد g را به صورت گونای خم جبری (یا همان رویه‌ی ریمانی) که معادله $P(x,y)=0$ تعریف می‌کند، تعبیر کرد. در واقع اگر این معادله را در $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ (البته با اغماض! چرا که ممکن است در متناهی نقطه تکینگی داشته باشد) در نظر بگیریم، شکلی مانند زیر خواهد بود:

که تعداد سوراخ‌ها، همان گونا است!

نتایجی در نظریه‌ی اعداد تحلیلی

محمد علی کرمی

مقدمه

یکی از شاخه‌های ریاضیات، نظریه‌ی تحلیلی اعداد[1] است که در آن به کمک روش‌ها و ایده‌های آنالیز ریاضی به مسائل نظریه اعداد فکر می‌کنند. نظریه‌ی تحلیلی اعداد زمینه‌ای بسیار غنی در تحقیقات نظریه اعداد است و مسائل حل نشده‌ی زیادی در آن باقی‌مانده است که مهم‌ترین و معروف‌ترین آن‌ها حدس ریمان[2] درباره‌ی تابع زتا[3] (ζ) است.

در این بخش از ریاضیات به موارد زیادی از توابع، انتگرال‌ها، حدها و سری‌ها برخورد می‌کنیم که به نحوی به اعداد طبیعی یا صحیح و یا اعداد اول مربوط می‌شوند و رابطه‌های ریاضی جالبی پدید می‌آورند.

در این نوشتار سعی بر این داریم که شما را با ساده‌ترین قضیه‌های نظریه‌ی تحلیلی اعداد آشنا کنیم.

- اولین و ساده‌ترین مثال، بررسی رفتار تابع $f_\alpha(n) = \{n\alpha\}$ است. این مثال هم‌چنین از ساده‌ترین نمونه‌های سیستم‌های دینامیکی است.

فرض کنید می‌خواهیم بدانیم برای عدد حقیقی α، مقدار $\{n\alpha\}$ چگونه روی بازه‌ی $[0,1)$ تغییر می‌کند و رفتار آن چگونه است. ($\{x\}$ همان جزء اعشاری x است، مثلا $\{3/14\} = 0/14$، همواره $0 \leq \{x\} < 1$) دقت کنید اگر α صحیح باشد، $\{n\alpha\} = 0$ و اگر $\alpha = \frac{p}{q}$ عددی گویا باشد $\{n\alpha\}$ فقط متناهی مقدار ممکن است به خود بگیرد که عبارتند از $\{0, \frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \ldots, \frac{q-1}{q}\}$. بنابراین اگر α گویا باشد مجموعه‌ی مقادیر

$$\{\{n\alpha\} : n \in \mathbb{N}\}$$

[1] Analytic Number Theory
[2] Riemann Hypothesis
[3] Zeta Function

متناهی است و روی دایره‌ی واحد (متناظر با $[0,1)$) n کمان به طول مساوی را مشخص می‌کنند.

اما در حالتی که α گنگ باشد چطور؟

در این حالت نشان می‌دهیم مجموعه‌ی مقادیر $\{n\alpha\}$ نامتناهی است. در واقع امکان ندارد m و nای طبیعی پیدا شوند که $m \neq n$ و $\{n\alpha\} = \{m\alpha\}$. زیرا در غیر این صورت

$$m\alpha - \lfloor m\alpha \rfloor = \{m\alpha\} = \{n\alpha\} = n\alpha - \lfloor n\alpha \rfloor$$

($\lfloor x \rfloor$ یعنی جزء صحیح x، همان بخش صحیح گرد شده‌ی عدد است. مثلا $\lfloor 3/14 \rfloor = 3$ و $\lfloor -0/9 \rfloor = -1$) بنابراین $\alpha = \frac{\lfloor m\alpha \rfloor - \lfloor n\alpha \rfloor}{m-n} \in \mathbb{Q}$ که با گنگ بودن α در تناقض است. پس $\{n\alpha\}$ همواره مقدار جدید می‌دهد و در نتیجه نامتناهی مقدار می‌پذیرد. حال نشان می‌دهیم این مقادیر در بازه‌ی $[0,1)$ چگال‌اند.

فرض کنید $\epsilon > 0$ دلخواه باشد و N را عددی طبیعی و به قدری بزرگ بگیرید که $\frac{1}{N} < \epsilon$. در این صورت دیدیم که اعداد $\{\alpha\}, \{2\alpha\}, \ldots, \{(N+1)\alpha\}$ همگی متمایزند و در بازه‌ی $[0,1)$ قرار دارند. می‌توان $[0,1)$ را به N بخش مساوی $[0, \frac{1}{N}), \ldots, [\frac{N-1}{N}, 1)$ افراز کرد و طبق اصل لانه کبوتری دوتا از اعداد $\{i\alpha\}$ در یک بازه قرار می‌گیرند. پس $1 \leq i < j \leq N+1$ و $0 \leq t \leq N-1$ای یافت می‌شود که

$$\{i\alpha\}, \{j\alpha\} \in [\frac{t}{N}, \frac{t+1}{N})$$

بنابراین

$$|\ \{i\alpha\} - \{j\alpha\}\ | < \frac{1}{N}$$
$$\Rightarrow 0 \leq |\ (i-j)\alpha - (\lfloor i\alpha \rfloor - \lfloor j\alpha \rfloor)\ | < \frac{1}{N} < 1$$

رابطه‌ی بالا نشان می‌دهد عدد حقیقی $(i-j)\alpha$ بسیار نزدیک یک عدد صحیح به نام $\lfloor j\alpha \rfloor - \lfloor i\alpha \rfloor$ است و به عبارت بهتر فاصله‌اش با آن از $\frac{1}{N}$ کمتر است. بنابراین جزء اعشاری $(i-j)\alpha$ یا $(j-i)\alpha$ (فرق چندانی نمی‌کند) یا بسیار نزدیک صفر است یا بسیار نزدیک ۱. به عبارت بهتر

$$0 \leq \{(j-i)\alpha\} < \frac{1}{N} \quad \text{یا} \quad 1 - \frac{1}{N} < \{(j-i)\alpha\} < 1$$

قرار دهید $k = j - i$. در این صورت k عددی طبیعی است که $\{k\alpha\}$ در محدوده‌ی $[0, \epsilon) \cup (1-\epsilon, 1)$ است. حالا به سادگی می‌توان دید که نقاط $k\alpha, 2k\alpha, 3k\alpha, \ldots$ روی دایره‌ی فرضی جزء اعشاری نقاطی ایجاد می‌کنند که فاصله‌ی دو نقطه‌ی متوالی

از ϵ کمتر است. (دلیل آن نامساوی $\{x+y\} \leq \{x\} + \{y\}$ است.)

به این ترتیب با شروع از صفر اگر گام‌هایی به طول $k\alpha$ برداریم و فقط توجه خود را به جزء اعشاری قدم‌های خود معطوف کنیم میزان جابه‌جایی در هر گام از $\frac{1}{N}$ (حالا یا ساعت‌گرد یا پادساعت‌گرد، بسته به این که $\{k\alpha\}$ نزدیک ۱ باشد یا نزدیک صفر) کمتر است. پس هر نقطه از $[0,1)$ در ϵ-همسایگی خود نقاطی به صورت $\{m \times k\alpha\}$ را می‌بینند، پس $\{n\alpha\}$ در بازه‌ی $[0,1)$ چگال است.

این حقیقت که $\{\{n\alpha\}\}_{n=1}^{\infty}$ چگال است، کاربردهایی در تقریب زدن اعداد گنگ با اعداد گویا دارد.

- بررسی رفتار دنباله‌ی $\{\frac{\phi(n)}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ که در آن ϕ تابع فی اویلر[۴] است.

یکی از توابع مورد استفاده در نظریه‌ی اعداد، تابع فی اویلر است که $\phi(n)$ برابر با تعداد اعداد متعلق به $\{1,\ldots,n\}$ است که نسبت به n اول‌اند.

به کمک اصل شمول و عدم شمول[۵] در ترکیبیات ثابت می‌شود که اگر $n = p_1^{\alpha_1} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k}$ تجزیه‌ی n به عوامل اول باشد، آن‌گاه:

$$\begin{aligned}\phi(n) =& (p_1 - 1) \times \cdots \times (p_k - 1) \\ & \times p_1^{\alpha_1 - 1} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k - 1} \\ & = n(1 - \frac{1}{p_1}) \times \cdots \times (1 - \frac{1}{p_k})\end{aligned}$$

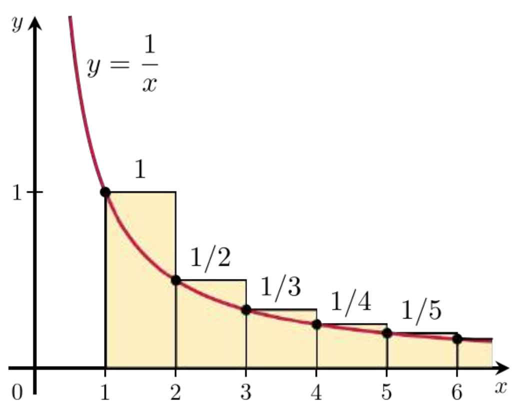
بنابراین $\frac{\phi(n)}{n} = \prod_{p|n \text{ و } p \text{ اول}} (1 - \frac{1}{p})$. یکی از حقایق جالب درباره‌ی دنباله‌ی $\{\frac{\phi(n)}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ این است که این دنباله نیز در $[0,1]$ چگال است! برای اثبات این موضوع، به یک حقیقت دیگر در نظریه‌ی اعداد و آنالیز نیاز داریم. ابتدا مقدمه‌ای در این باب بیان می‌کنیم و سپس در انتهای نوشتار به اثبات چگال بودن $\frac{\phi(n)}{n}$ برمی‌گردیم.

- سری‌های خاص در نظریه اعداد

شاید ساده‌ترین سری نظریه اعدادی قابل بررسی، $\sum \frac{1}{n}$ یا سری همساز[۶] باشد. این حقیقت معروفی است که سری موردنظر واگراست. واگرایی را می‌توان به چند روش تحقیق کرد. یک روش، دسته‌بندی جمله‌های سری به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}) \\ &+ (\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}) + \cdots \\ &\geq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{8} + 8 \times \frac{1}{16} + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots\end{aligned}$$

روش دیگر، مقایسه‌ی سری با انتگرال واگرای $\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ است. در واقع طبق شکل



$$\begin{aligned}&\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \\ &\geq \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x} + \cdots \\ &= \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \log x \mid_1^{\infty} = \infty\end{aligned}$$

سری همساز حالت خاص تابع زتای ریمان، $\zeta(s)$ برای حالت $s = 1$ است. تابع زتا، $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ حتی برای sهای مختلط هم تعریف می‌شود و خواص تابع زتا و مکان صفرهای این تابع ارتباطی عمیق با چگونگی توزیع اعداد اول در بین اعداد طبیعی دارد. در حالتی که s حقیقی باشد، به کمک همان روش انتگرال می‌توان نشان داد که برای $s > 1$، $\zeta(s)$ همگراست و برای $s \leq 1$ واگراست.

اکنون می‌خواهیم یک زیرسری از سری همساز را بررسی کنیم. فرض کنید تنها اعداد اول را در نظر بگیریم. آیا $\sum_{p \text{ اول}} \frac{1}{p}$ همگرا است؟ پاسخ دادن به این سوال چندان ساده نیست زیرا توزیع اعداد اول در بین اعداد طبیعی تا حد زیادی ناشناخته است و نمی‌توان

[۴] Euler's Totient Function
[۵] Inclusion-Exclusion Principle
[۶] Harmonic Series

با روش‌های متداول مانند آزمون مقایسه‌ای، آزمون ریشه، آزمون نسبت، آزمون انتگرال و یا محاسبه‌ی مستقیم، $\sum_{p \text{ اول}} \frac{۱}{p}$ را به دست آورد. اما می‌توان ثابت کرد که $\sum_{p \text{ اول}} \frac{۱}{p} = \infty$. در واقع ثابت شده است که

$$\sum_{p\le n \text{ و } p \text{ اول}} \frac{۱}{p} \sim \log\log(n) \Rightarrow \sum_{p \text{ اول}}\frac{۱}{p}=\infty$$

در حالی که به سادگی (با بررسی انتگرال $۱/x$) می‌توان دید که

$$\sum_{k\le n}\frac{۱}{k}\sim \log n$$

یعنی $\sum_{p \text{ اول}} \frac{۱}{p}$ خیلی کندتر از سری همساز به ∞ میل می‌کند.

در این‌جا دو اثبات برای $\sum_{p\text{ اول}}\frac{۱}{p}=\infty$ می‌آوریم. اثبات اول آنالیزی است و به خواص تابع لگاریتمی برمی‌گردد و هم‌چنین از قضیه‌ی اساسی حساب (وجود تجزیه‌ی یکتا) بهره می‌گیرد. این اثبات از اویلر است. توجه کنید که به کمک قضایای تقریب تیلور[۷] می‌توان نشان داد که ثابت $C>۰$ وجود دارد که برای هر عدد اول p:

$$\frac{۱}{p} > -C\log(۱-\frac{۱}{p})$$

بنابراین

$$\sum_{p \text{ اول}}\frac{۱}{p} > C\log\prod_{p\text{ اول}}\frac{۱}{۱-\frac{۱}{p}}$$

اما

$$\frac{۱}{۱-\frac{۱}{p}} = ۱+\frac{۱}{p}+\frac{۱}{p^۲}+\cdots$$

(زیرا $۰ < \frac{۱}{p} < ۱$ در شعاع همگرایی سری $\frac{۱}{۱-x} = ۱+x+x^۲+\cdots$ قرار دارد.)

حال توجه کنید

$$\begin{aligned}
&\prod_{p\text{ اول}}\frac{۱}{۱-\frac{۱}{p}}\\
&=\prod_{p\text{ اول}}(۱+\frac{۱}{p}+\frac{۱}{p^۲}+\cdots)\\
&=\sum_{\alpha_{i_۱},\ldots,\alpha_{i_k}\ge ۱ \text{ و } p_{i_۱},\ldots,p_{i_k} \text{ اول و متمایز}} \frac{۱}{p_{i_۱}^{\alpha_{i_۱}}\times\cdots\times p_{i_k}^{\alpha_{i_k}}}\\
&=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n}=\infty
\end{aligned}$$

دقت کنید اگر حاصل‌ضرب بالا را بسط دهیم و به صورت مجموع درآوریم، طبق قضیه‌ی اساسی حساب[۸] برای هر عدد طبیعی n، یک و دقیقا یک جمله در حاصل‌جمع وجود دارد که با $\frac{۱}{n}$ برابر است. بنابراین داریم:

$$\sum_{p\text{ اول}}\frac{۱}{p} > C\log\prod_{p\text{ اول}}\frac{۱}{۱-\frac{۱}{p}} = C\log\infty=\infty$$

اثبات دوم، اثباتی از طریق شمارش و ترکیبیات است که توسط پال اردوش، ریاضی‌دان برجسته‌ی مجارستانی ارائه شده است. پال اردوش[۹] در زمینه‌های ترکیبیات، نظریه گراف، نظریه اعداد، آنالیز، نظریه تقریب، نظریه مجموعه‌ها و نظریه احتمال کارهای زیادی انجام داد و بیشترین مقالات ریاضی را در بین تمام ریاضی‌دانان تاریخ منتشر کرد. او به طور خاص مسئله حل کن قهاری بوده است.

فرض کنید $\sum_{p\text{ اول}}\frac{۱}{p} < \infty$ همگرا باشد. در این صورت عدد طبیعی k وجود دارد که $\sum_{i=k+۱}^{\infty}\frac{۱}{p_i} < \frac{۱}{۲}$ که در آن p_i، i-امین عدد اول است. اعداد اول واقع در $\{p_۱,\ldots,p_k\}$ اعداد اول کوچک و سایر اعداد را که در $\{p_{k+۱},\ldots\}$ واقعند، اعداد اول بزرگ باشند.

یک عدد طبیعی دلخواه N در نظر بگیرید و فرض کنید N_b تعداد اعداد طبیعی $n \le N$ باشد که بر لااقل یک عدد اول بزرگ بخش‌پذیرند. N_s را نیز تعداد اعداد طبیعی $n\le N$ بگیرید که تمام عوامل اول آن‌ها جزو اعداد اول کوچک‌اند. توجه کنید که $N_b+N_s=N$.

برای تخمین N_b، دقت کنید که $\lfloor \frac{N}{p_i}\rfloor$ برابر با تعداد اعدادی از $\{۱,۲,\ldots,N\}$ است که بر p_i بخش‌پذیرند. پس N_b حداکثر برابر است با

$$N_b \le \sum_{i=k+۱}^{\infty} \lfloor\frac{N}{p_i}\rfloor \le N(\sum_{i=k+۱}^{\infty}\frac{۱}{p_i}) < \frac{N}{۲}$$

برای تخمین N_s چنین عمل کنید: هر عدد طبیعی $n \le N$ با عوامل اول کوچک را به صورت $n = a_n b_n^۲$ بنویسید که a_n خالی از مربع[۱۰] است. این کار ممکن است زیرا اگر بگیرید:

$$n = p_۱^{\alpha_۱}\times\cdots\times p_k^{\alpha_k}$$

$$a_n = p_۱^{\alpha \mod ۲}\times\cdots\times p_k^{\alpha \mod ۲}$$

$$b_n = p_۱^{\lfloor \frac{\alpha_۱}{۲}\rfloor}\times\cdots\times p_k^{\lfloor \frac{\alpha_k}{۲}\rfloor}$$

[۷] Taylor's Approximation Theorems
[۸] Fundamental Theorem of Arithmatics
[۹] Paul Erdos
[۱۰] Square-Free

(به وضوح a_n خالی از مربع است یعنی بر هیچ عدد مربع کاملی غیر از یک بخش‌پذیر نیست.)

حالا تعداد اعداد به شکل $a_n b_n^2$ حداکثر چقدر است؟ اولا $a_n = p_1^{\epsilon_1} \times \cdots \times p_k^{\epsilon_k}$ که $\epsilon_i \in \{0,1\}$ و هر ϵ_i دو حالت دارد پس a_n حداکثر 2^k حالت دارد. حالا توجه کنید $1 \le b_n^2 \le N$، بنابراین $1 \le b_n \le \sqrt{N}$ و از آن‌جا که عددی صحیح است پس حداکثر $\lfloor \sqrt{N} \rfloor$ حالت دارد و در نتیجه

$$N_s \le 2^k \sqrt{N}$$

بنابراین

$$N = N_b + N_s < \frac{N}{2} + 2^k \sqrt{N}$$

به سادگی می‌توان دید که با بزرگ گرفتن N نابرابری بالا به تناقض منجر می‌شود: مثلا قرار دهید $N = 2^{2k+2}$.

احتمالا احساس کردید که اثبات بالا واقعا هوشمندانه و ابتکاری است! به ویژه ایده‌ی نمایش یک عدد به صورت ضرب یک مربع کامل در یک عدد خالی از مربع.

کمی هم راجع به اثبات اویلر توضیح دهیم. به راستی که رابطه‌ی

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \prod_{p \text{ اول}} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\right) \qquad (1)$$

و حالت کلی تر آن

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ اول}} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}\right)$$

یکی از زیباترین تساوی‌های ریاضیات است. این رابطه پلی بین نظریه اعداد و آنالیز است. در یک طرف یک سری داریم که ما را به یاد انتگرال تابع $\frac{1}{x}$ می‌اندازد و در طرف دیگر یک حاصل‌ضرب مربوط به اعداد اول و این دو عبارت به زیبایی به کمک قضیه اساسی حساب به یکدیگر مربوط می‌شوند. در واقع اتحاد (1) به سادگی اثبات می‌کند که تعداد اعداد اول نامتناهی است زیرا سمت چپ واگراست، پس سمت راست نیز بی‌نهایت است و این ممکن نیست مگر اینکه تعداد عوامل حاصل‌ضرب نامتناهی باشد.

حکم قوی‌تری درباره‌ی سری $\sum_{p \text{ اول}} \frac{1}{p}$ درست است. می‌توان ثابت کرد که $\sum_{p,p\le n \text{ اول}} \frac{1}{p} > \log\log n - C$ که C عددی ثابت و مستقل از n است.

برای اثبات، فرض کنید n یک عدد طبیعی دلخواه باشد. همان‌طور که در اثبات دوم اشاره شد، هر عدد طبیعی $1 \le i \le n$ به روشی یکتا (اثبات یکتایی چندان سخت نیست) به صورت ضرب یک عدد خالی از مربع و یک مربع کامل قابل نمایش است. بنابراین:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \le \prod_{p,p\le n \text{ اول}} \left(1+\frac{1}{p}\right) \times \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)$$

زیرا در سمت راست تمام عبارت‌های به صورت $\frac{1}{p_1^{\alpha_1} \times \cdots \times p_t^{\alpha_t} \times k^2}$ ظاهر می‌شوند که در آن $1 \le k \le n$، $p_1, \ldots, p_t$ تمام اعداد اول کوچک‌تر یا مساوی n هستند و $\alpha_1, \ldots, \alpha_t \in \{0,1\}$. این عبارت‌ها تمامی اعداد $\frac{1}{i}$ را ($1 \le i \le n$) می‌دهند، پس نابرابری درست است.

اکنون توجه کنید بنابر قضیه‌ی معروفی سری $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ همگراست و در واقع

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

$\frac{\pi^2}{6}$ را به اختصار با D نشان می‌دهیم. سپس با گرفتن $\log$ از دو طرف به دست می‌آوریم:

$$\log\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right) \le \sum_{p\le n} \log\left(1+\frac{1}{p}\right) + \log D$$

حالا توجه کنید که نامساوی $1 + x \le e^x$، ($x > 0$) نتیجه می‌دهد (از دو طرف $\log$ بگیرید)

$$\log\left(1+\frac{1}{p}\right) \le \frac{1}{p}$$

و در ضمن از طریق تخمین انتگرال تابع $\frac{1}{x}$ می‌توان نشان داد:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} > \int_{1}^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \log(n+1)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \log\log(n+1) &< \log\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right) \\ &\le \log D + \sum_{p,p\le n \text{ اول}} \log\left(1+\frac{1}{p}\right) \\ &\le \log D + \sum_{p,p\le n \text{ اول}} \frac{1}{p} \end{aligned}$$

بنابراین

$$\sum_{p\le n} \frac{1}{p} \ge \log\log(n+1) - \log\frac{\pi^2}{6}$$

حالا بدیهی است که سری $\sum_{p \text{ اول}} \frac{1}{p}$ واگراست زیرا $\log\log n \to \infty$ وقتی $n \to \infty$.

حالا که با حقیقت $\sum_{p \text{ اول}} \frac{1}{p} = \infty$ آشنا شدیم، به بررسی دنباله‌ی $\{\frac{\phi(n)}{n} = \prod_{p,p|n \text{ اول}} (1-\frac{1}{p})\}_{n=1}^{\infty}$ برمی‌گردیم.

می‌خواهیم ثابت کنیم $\{\frac{\phi(n)}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ در $[0,1]$ چگال است. توجه کنید:

$$\log \prod_{p \text{ اول}} (1-\frac{1}{p}) = \sum_{p \text{ اول}} \log(1-\frac{1}{p}) \le -\sum_{p \text{ اول}} \frac{1}{p} = -\infty$$

(طبق نامساوی $1-x \le e^{-x}$ داریم $\log(1-\frac{1}{p}) \le -\frac{1}{p}$)

بنابراین $\prod_{p \text{ اول}}(1-\frac{1}{p}) = 0$. (چون این حاصل‌ضرب یا صفر است و یا مثبت است و حتما همگراست، چون نزولی و همواره نامنفی است.) این نتیجه می‌دهد که برای هر N، $\prod_{p \ge N \text{ و } p \text{ اول}}(1-\frac{1}{p}) = 0$. در غیر این‌صورت اگر به ازای یک N، $\prod_{p \ge N \text{ و } p \text{ اول}}(1-\frac{1}{p}) > \epsilon$، و $p_1,\dots,p_t$ اعداد اول کوچک‌تر از N باشند،

$$0 = \prod_{p}(1-\frac{1}{p}) = \prod_{i=1}^{t}(1-\frac{1}{p_i}) \times \prod_{p \ge N \text{ و } p \text{ اول}}(1-\frac{1}{p}) > \epsilon \prod_{i=1}^{t}(1-\frac{1}{p_i}) > 0$$

حالا $\epsilon > 0$ دلخواهی در نظر بگیرید و $x \in [0,1]$ را دلخواه بگیرید.

از آن‌جا که تعداد اعداد اول نامتناهی است، N را می‌توان چنان بزرگ گرفت که برای هر عدد اول $p \ge N$، $1-\frac{1}{p} > 1-\epsilon$.

حالا $N \le q_1 < q_2 < q_3 < \cdots$ را دنباله‌ی تمامی اعداد اول بزرگتر یا مساوی N بگیرید و دنباله‌ی $a_i = \prod_{j=1}^{i}(1-\frac{1}{q_j})$ را در نظر بگیرید. واضح است که $0 < a_i < 1$ و a_iها نزولی اکیداند و در ضمن

$$\lim_{i\to\infty} a_i = \prod_{j=1}^{\infty}(1-\frac{1}{q_j}) = \prod_{q \ge N \text{ و } q \text{ اول}}(1-\frac{1}{q}) = 0$$

هم‌چنین

$$|1-a_1| = |\frac{1}{q_1}| < \epsilon$$

و برای هر i،

$$|a_i - a_{i+1}| = |a_i(1-\frac{a_{i+1}}{a_i})| = |a_i(1-(1-\frac{1}{q_{i+1}}))| \le \epsilon$$

و از آن‌جا که حد a_iها صفر است، tای وجود دارد که $|a_t| < \epsilon$. بنابراین اگر $a_1,\dots,a_t$ را روی بازه‌ی $[0,1]$ علامت بزنیم، فاصله‌ی a_1 با ۱ بسیار اندک (کمتر از ϵ) است و فاصله‌ی a_t با صفر نیز بسیار اندک (کمتر از ϵ) است و در ضمن برای هر i، فاصله‌ی a_i و a_{i+1} بسیار اندک (کمتر از ϵ) است.

حال $[0,a_t], [a_t,a_{t-1}], \dots, [a_2,a_1], [a_1,1]$ بنابر بالا بازه‌هایی به طول کمتر از ϵ هستند که کل بازه‌ی $[0,1]$ را می‌پوشانند. پس یکی از a_jها در ϵ-همسایگی $x \in [0,1]$ می‌افتد. اما a_j چیزی نیست جز عددی به صورت

$$a_j = \prod_{i=1}^{j}(1-\frac{1}{q_i})$$

که q_iها اعداد اول متمایزند. بنابراین اگر قرار دهید

$$n = q_1 \times \cdots \times q_s$$

داریم

$$\frac{\phi(n)}{n} = a_j$$

پس $\{\frac{\phi(n)}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ مقادیری به دلخواه نزدیک x می‌گیرد یعنی $\{\frac{\phi(n)}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ در $[0,1]$ چگال است.

سوال جالب: آیا توزیع $\{\frac{\phi(n)}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ در $[0,1]$ یکنواخت است؟ اصلا توزیع $\{\frac{\phi(n)}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ در $[0,1]$ چیست؟ به عبارت دقیق‌تر آیا یک تابع چگالی احتمال مانند P روی $[0,1]$ وجود دارد که برای هر بازه‌ی $(\alpha,\beta) \subset [0,1]$،

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\#\{n : \frac{\phi(n)}{n} \in (\alpha,\beta) \text{ و } 1 \le n \le m\}}{m} = \int_{\alpha}^{\beta} P(u)\mathrm{d}u$$

(در این‌جا $\#A$ همان تعداد اعضای مجموعه‌ی A است.)

اگر پاسخ این سوال را پیدا کردید می‌توانید راه‌حل خود را یا تنها ایده‌ی خود را با ما در میان بگذارید.

(mathsimpleideas@gmail.com)

مراجع

[1] Martin Aigner, Gunter M. Ziegler, Proofs from the Book, Springer

[2] P. Erdos, Uber die Reihe $\sum_{p \text{ prime}} \frac{1}{p}$, Mathematica, Zutphen B7 (1938),1-2

[3] L. Euler, Introduction in Analysisin Infinitorum, Tomas Primus, Lausanne 1748, Opera Omnia, Ser. 1, Vol 90.

[4] Wikipedia, Divergence of the sum of the reciprocals of the Prime Numbers

محک‌هایی برای مسطح بودن گراف

علی قصاب

اگر به گراف به عنوان شرح اتصالات بین نقاط خاص نگاه کنیم، خواهیم دید که گراف موجودیت خود را از صفحه‌ای که در آن نشانده می‌شود، نمی‌گیرد. با این همه، بنا به سنت رایج، که از شهود بشری نشأت می‌گیرد، متداول است که به گراف شکلی نسبت دهیم، که دست بر قضا معمولاً در صفحه رسم می‌شود. آنچه در همان ابتدا خودنمایی می‌کند این است که لزومی ندارد اتصالات، که به «یال»ها مشهورند، در همان جایی که گراف اراده کرده است، برخورد کنند. به راحتی می‌توان به گراف‌های چموشی دست یافت که هر طور در صفحه رسم شوند، یال هایشان با هم در محلی به جز رئوس برخورد کنند. اختصاص واژه‌ی راحت در اینجا کمی بحث بر انگیز است، زیرا شاید به راحتی(!) زمانی را به یاد آورید که تصور می‌کرده اید که عموماً همه‌ی گراف‌ها مسطح هستند؛ و نشان به آن نشان که ممکن است تلاش عبثی در نوجوانی برای حل مسأله‌ی بنام سه خانه- سه چاه کرده باشید![1]

تعریف ۱. *گرافی را که بتوان آن را در صفحه طوری رسم کرد که محل برخورد یال ها، در رئوس مرتبطشان باشند، را مسطح می گویند. به فرایند مسطح کردن، نشاندن[2] در صفحه می‌گویند.*

در سیر تاریخی، یکی از ابتدایی‌ترین یافته‌ها چنین بوده است:

گزاره ۲. *$K_{۳,۳}$ و $K_۵$ نامسطح هستند.*

ایده‌ی اثبات. به طور کلاسیک، اکنون نویسندگان از یکی از سه روش زیر کمک می‌گیرند:

الف)) سناریوی یکم: از قضیه‌ی خم جردن (: هر خم ساده‌ی بسته‌ی C در صفحه، صفحه را به سه مجموعه‌ی همبند مسیری «رو»، «درون» و «بیرون» خم افراز می‌کند،) کمک گرفته می‌شود. در این روش برای مثال برای تسطیح ناپذیری $K_۵$ ، ابتدا نشاندن مسطح $K_۴$ به همراه چهار ناحیه‌ای که در صفحه ایجاد می‌کند، معرفی می‌شوند. سپس از قضیه خم جردن کمک گرفته می‌شود تا نشان دهند مکانی برای اختصاص رأس پنجم در هیچ یک از این چهار ناحیه نیست.

ب) سناریوی دوم: با به کار بردن قضیه‌ی خم جردن، رابطه‌ی اویلر(: برای هر گراف مسطحِ نشانده شده در صفحه با n رأس و q یال، که در صفحه f تا وجه(ناحیه) ایجاد می‌کند، داریم $n - q + f = ۲$) اثبات می‌شود. سپس با کمک این رابطه و روابط جانبی مثلاً $۲f = ۳q$، در یک سیر برهان خلف، تناقض فرض تسطیح‌پذیری $K_۵$ آشکار می‌شود.

ج) سناریوی سوم: از خواص بنیادین توپولوژی صفحه، صورت خام و خاصی از رابطه‌ی اویلر نتیجه می‌شود، و از این صورت، مستقلاً هم قضیه‌ی جردن و هم رابطه‌ی اویلر اثبات می‌شود؛ و دنباله‌ی کار چنان می‌شود که در «ب» شرح داده شد.[3]

مسأله‌ی تعیین محکی برای تسطیح‌پذیری گراف از دیرباز و تقریباً مقارن با شکل گیری علقه‌ی نظریه‌ی گراف، مطرح بوده و شده است. از نخستین تلاش‌های کارآمد می‌توان به قضیه‌ی مستطاب کوراتفسکی اشاره کرد. جالب اینجاست که در سیر تاریخی، این نخستین محک مکشوف، یکی از کارآمدترین نتایج به دست آمده تاکنون است.

تعریف ۳. *می‌گوییم گراف G زیرتقسیم گراف H است اگر که با افزودن تعدادی رأس روی یال‌های H بتوان به از G رسید.*

به آسانی به دست می‌آید که: اگر زیرگرافی از گراف دارای زیرتقسیمی از $K_{۳,۳}$ و $K_۵$ باشد، مسطح نیست.

این گزاره، از آن گزاره‌هایی است که به تعبیر وست (West) «TONCAS[4]» است.

قضیه ۴. (کوراتفسکی). *یک گراف مسطح است اگر و تنها اگر هیچ زیرگرافی از آن زیرتقسیم $K_{۳,۳}$ و $K_۵$ نباشد.*

کوراتفسکی در ۱۹۳۰ پرده از کشفش برداشت، و طبق سنت نه چندان غریب ریاضی در همان سال فرینک(Frink) و اسمیت(Smith) هم، مستقلاً، به این کشف نائل شدند، تا صدقی دوباره باشد بر گفته‌ی بویویی پدر در توصیه به بویویی پسر.[5]

[1] تصور دکتر بهزاد بر این است که این مسأله منتسب به شیخ بهایی است. اثبات این مدعای تاریخی، که با جایزه پاسخ داده می‌شود، نقطه و نطفه‌ی شروع نظریه‌ی گراف را یکصد سال به عقب باز خواهد گرداند.

[2] «embedding» و نه !«imbedding»

[3] این دیدگاه، در کتاب Graphs on Surfaces نوشته‌ی Mohar و Thomassen مطرح شده است. این مقاله، (بی اندازه) از داده‌ها و دیدگاه این کتاب بهره برده است.

[4] The Obvious Necessary Condition is Also Sufficient!

[5] چیزهای بسیاری هستند با یک مبدا تاریخی که در یک زمان در چندین مکان ظاهر می‌شوند، درست مثل گل‌های بنفشه که در بهار در همه جا می‌رویند.

پس از طی یک دوره‌ی بیش از بیست ساله نخستین آسان‌-برهان[۶]های این قضیه ظاهر شد. شرح مختصر برهان حاضر به یمن تلاش توماسن(Thomassen) در ۱۹۸۰ مهیا شده است.

تعریف ۵. *در گراف G یال $e = uv$ را در نظر می‌گیریم. با حذف این یال و سپس روی هم قرار دادن دو رأس u و v، به گراف G/e دست می‌یابیم. با تکرار این فرایند و همچنین فرایند حذف یال‌هایی از گرافG ، به کهاد(minor)ای از گراف G دست می‌یابیم.*

تعریف ۶. *گرافی دارای حداقل $n+1$ راس که با حذف هر $n-1$ رأس دلخواه همبند باقی می‌ماند را n- همبند می‌گوییم.*

لم ۷. (توماسن). *هر گراف ۳- همبند G با بیش از چهار رأس دارای یالی چون e است که گراف G/e ۳- همبند باقی می‌ماند.*

اثبات زیبا و البته مصور این لم در کتاب آموزشی متداول گشته‌ی باندی-مورتی (جدید) موجود است

یک طرف قضیه‌ی کوراتفسکی که اثبات شد، و درباره‌ی طرف دیگر به خلاصه-برهان زیر اشاره می‌کنیم.

۱. ابتدا فرض می‌کنیم که گراف G ۳-همبند است. اکنون از استقرا کمک می‌گیریم و توجه داریم که بررسی صحت ادعا برای گراف‌های چهار و پنج رأسی به طریق مستقیم، آسان است.

۱.۱. برای حالت‌های با بیش از پنج رأس، از لم توماسن به وجود یال e آگاه می‌شویم که G/e ۳-همبند است.

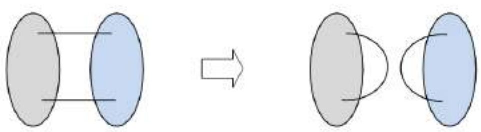
۱.۱.۱. اگر G/e نامسطح باشد، با اعمال فرض استقرا و یافتن زیرتقسیم $K_{3,3}$ و K_5، می‌توان زیرتقسیم‌های مشابهی در G ساخت.

۱.۱.۲. درغیر این صورت، رأس حاصل از انقباض یال e (از گراف G) را z (در گراف G/e) می‌نامیم. گراف $(G/e) - z$ ۲-همبند است. پس هر وجهش یک دور C است، و لاجرم z در یک وجه آن همچون f واقع می‌شود.

۱.۲. باقی برهان در تکاپوی این باید باشیم که با گسترش رأس z به یال e در وجه f، یکی از زیرتقسیم‌های موردنظر $K_{3,3}$ یا K_5 بیابیم.

۲. جاده‌ی فرعی:[با دقت در ساختار برهان به مطلب گرانبهای دیگری در حاشیه دست می‌یابیم: **قضیه.تات(Tutte).استین(Stein).** هر گراف ۳-همبند مسطح دارای نشاندنی محدب[۷] درصفحه است.]

۳. برای تکمیل برهان کافی است دقت کنیم که اگر گرافی ۲-همبند باشد، می‌توان با حذف برش‌های یالی منتسب به ۲-همبندی مذکور، مسأله‌ی تسطیح‌پذیری گراف را به تسطیح‌پذیری گراف‌های ۳-همبند محول کرد. (رجوع شود به شکل)



نتیجه‌ی جانبی دیگری که از بطن برهان اخیر سرباز می‌کند را می‌توان در اثر مستقل وگنر(Wagner) و فری(Fáry) دید.

قضیه. (وگنر.۱۹۳۶. فری. ۱۹۴۸). هر گراف مسطح نشاندن مسطح یال-مستقیم (یعنی نشاندن با یال‌هایی به شکل پاره خط) دارد.

در تداوم داستان اکتشاف قضیه‌ی کوراتفسکی، ماجرای[۸] کشف قضیه‌ی وگنر، در ۱۹۳۷، جالب به نظر می‌رسد.

قضیه ۸. (وگنر). *یک گراف مسطح است اگر و تنها اگر نه $K_{3,3}$ و نه K_5 را به عنوان کهاد نداشته باشد.*

اثبات. . اگر گراف G نامسطح باشد، بنا به قضیه‌ی کوراتفسکی دارای زیرتقسیمی از $K_{3,3}$ یا K_5 است. با انقباض همه‌ی یال‌های زیادی این زیرتقسیم نوعی، به کهادی از $K_{3,3}$ یا K_5 در گراف می‌رسیم. از طرف دیگر، اگر گراف H مسطح باشد، واضح است که هر دو گراف $H-e$ و H/e مسطح می‌شوند. پس هر کهاد گراف مسطح، مسطح می‌شود. □

در ۱۹۵۸، تات وارد صحنه شد، و از قضیه‌ای رونمایی کرد که از نگاه دیگری به محک تسطیح‌پذیری حکایت می‌کرد. تات مفهومی را به نام «پل[۹]» معرفی کرد.

تعریف ۹. *فرض کنید که H زیرگرافی از گراف G باشد. به دو نوع زیرگراف G، H- پل می‌گویند:*

[۶] اثبات قضیه‌ی کوراتفسکی در فرهنگ متداول، به غلط، سخت به نظر می‌رسد. برای مثال به یاد دارم که شنیده ام دانشجوی دوره‌ی دکترایی از دانشکده، در امتحان جامعش عمده‌ی کتاب باندی-مورتی (قدیم) را حاضر کرده بود، به جز اثبات این قضیه را.

[۷] منظور از نشاندن محدب درصفحه، نشاندنی است که درون همه‌ی وجوه، به جز وجه بیرونی، و همچنین درون مکمل وجه بیرونی محدب باشند.

[۸] خیلی مبهم به یاد دارم که جایی خوانده ام که وگنر در هنگام تدریس قضیه‌ی کوراتفسکی به این نتیجه رسید. با این همه، هر چه جستجو کردم منبع خاطره‌ام را نیافتم.

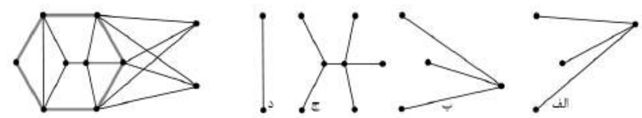
[۹] bridge

الف) هر یک از مؤلفه‌های همبندی $G-V(H)$، همچون K، به همراه برش یالی $E(H,K)$

ب) هر یالی خارج از H که دو سرش در H باشند.

تعریف ۱۰. *به رئوس مشترک یک H-پل و H، «رئوس پیوست[۱۰]» آن H-پل می‌گوییم.*

برای مثال برای گراف داده شده‌ی زیر، با زیر گراف دوری مشخص شده (دور شش‌تایی)، چهار پل وجود دارد.



تعریف ۱۱. *اگر C یک دور در گراف G باشد، می‌گوییم دو C-پل «هم پوشان[۱۱]» هستند اگر حداقل یکی از دو شرط زیر صادق باشند.*

الف) *حداقل سه تا رأس پیوست مشترک داشته باشند.*

ب) *رئوس متمایز a,b,c,d با حفظ ترتیب روی دور C یافت شوند که یکی در میان رئوس پیوست هر یک از این دو C-پل باشند. (در این حالت به طور خاص می‌گوییم «هم‌پوشان کج[۱۲]» هستند.)*

در مثال پیشین، «الف» و «ب»، «الف» و «ج»، و همچنین «ب» و «ج» هم‌پوشان هستند. از این سه جفت، تنها دو جفت اخیر هم‌پوشان کجند.

با بیش از کمی رندی، دسته‌های $K_{۳,۳}$ پشت پرده‌ی حالت «الف» دیده می‌شود، و دسته‌های $K_۵$، در حالت «ب».

با این مفاهیم، در دوره‌ی زمانی قریب ۳۵ سال، قضیه‌ی زیبای زیر به دست آمد:

قضیه ۱۲. (تات ۱۹۵۸ .توماسن ۱۹۸۰ .ویلیامسن (Williamson) ۱۹۹۳). *شرایط زیر معادلند:*

الف) *G نامسطح است.*

ب) *G حاوی دوری چون C است که اگر به هر یک از C-پل هایش یک رأس نظیر کنیم و هر دو C-پلی که هم‌پوشان هستند را با یالی مرتبط کنیم، گراف حاصل[۱۳] دوبخشی نمی‌شود.*

ج) *G حاوی دوری چون C است که اگر به هر یک از C-پل هایش یک رأس نظیر کنیم و هر دو C-پلی که هم‌پوشان کج هستند را با یالی مرتبط کنیم، گراف حاصل دوبخشی نمی‌شود.*

د) *G حاوی دوری چون C است که سه تا C-پل دارد که دو به دو هم‌پوشان کج هستند.*

درباره‌ی برهان باید گفت که به وضوح داریم: «د»←«ج»←«ب»←«الف». برهان (نا)متعارف «الف»←«د» از استقرایی هوشمندانه روی حداقل تعداد یال‌هایی است که باید از یک گراف کنده شوند، تا به زیرتقسیمی از $K_{۳,۳}$ یا $K_۵$ دست یابیم، بهره‌مند می‌گیرد؛ و یک بار خواندش می‌ارزد!

سه محک نخست نشأت گرفته از ادله‌ی متداول در نظریه‌ی گراف است، حال آنکه در جبهه‌ی اکتشاف محک‌های تسطیح ناپذیری از همان ابتدا (و به عبارت دقیق تر پس از هفت سال) پای جبر هم به میان آمده است.

تعریف ۱۳. *گراف G را درنظر می‌گیریم. به فضای تولید شده با همه‌ی زیرگراف‌های اویلری (زیرگراف‌های فراگیری که در آن درجه‌ی هر راس زوج است)، با عمل تفاضل متقارن، «فضای دوری» G می‌گوییم. می‌گوییم که G یک ۲-پایه دارد اگر که گردایه‌ای از گراف‌های زوج G موجود باشد که هر یال گراف دقیقاً در دوتای آنها ظاهر شود.*

قضیه ۱۴. (مک لین(MacLane)). *گراف ۲-همبند G مسطح است اگر و تنها اگر یک ۲-پایه داشته باشد.*

نکته‌ی حائز اهمیت، برهان متداول یک طرف قضیه این است که با درنظر گرفتن دورهای دو گراف خاص $K_{۳,۳}$ و $K_۵$، صدق این دو را در محک قضیه اثبات می‌کنیم. سپس به وضوح خواهیم دید که هر زیرتقسیم این دو گراف در محک داده شده صدق می‌کنند. در ادامه نشان می‌دهیم که اگر گرافی ۲-پایه داشته باشد، با حذف یال از آن گراف حاصل نیز ۲-پایه خواهد داشت. باقی سناریوی اثبات، فراخواندن قضیه‌ی کوراتفسکی است که نامسطح بودن آن را معادل داشتن زیرتقسیمی از $K_{۳,۳}$ یا $K_۵$ می‌داند. طرف دیگر حکم با نشاندن در صفحه و با به کارگیری فرمول اویلر قابل اثبات است.

در بازگویش تاریخ کشف محک‌های تسطیح می‌توان به قضایای (نه چندان مهمی) همچون قضیه‌ی فورنیر (Fournier) اشاره کرد.

قضیه ۱۵. (فورنیر). *یک گراف نامسطح است اگر و تنها اگر حاوی سه دور با یال مشترک e باشد، به طوری که هیچ یالی در یکی از دورها، یال واصل بین دو رأس غیرمتوالی در دورهای دیگر نباشد. و*

[۱۰] Vertices of attachment
[۱۱] overlap
[۱۲] Skew-overlap
[۱۳] این گراف را با $O(G,C)$ نشان می‌دهند.

اگر یکی از این دورها، همچون C، را منقبض کنیم، تصویر دو دور دیگر در یک بلوک[14] G/C ظاهر شوند.

در برهان یابی برای صحت این قضیه، فقط با کمی مداقه، نیز نقش قضیه‌ی کوراتفسکی ظاهر می‌شود.

گاهی محکی با ظاهری پیچیده رونمایی شده است که که در باطن آن اوراد کوراتفسکی خوانده می‌شود. اوج این تمثیل را می‌توان در قضیه‌ی کولین دو وردیر (Colin de Verdière) دید؛ که از تابعی عجیب به نام μ کمک گرفته می‌شود. درپیچیدگی این قضیه همین بس که حتی برای آشنایی با تعریف μ باید شکیبایی داشت!

تعریف ۱۶. *اگر G گرافی همبند با رئوس $v_1, \dots, v_n$ باشد، همه‌ی ماتریس‌های متقارن همچون M_{nn} را چنین در نظر می‌گیریم که:*

الف) *اگر $i \neq j$ و v_i همسایه‌ی v_j باشد، در این صورت $m_{ij} < 0$.*

ب) *اگر $i \neq j$ و v_i همسایه‌ی v_j نباشد، در این صورت $m_{ij} = 0$.*

ج) *M دقیقاً یک مقدار ویژه‌ی منفی (با تکرر ۱) داشته باشد.*

د) *ماتریس متقارن ناصفری همچون $X_{n\times n}$ یافت نشود به طوری که $MX = 0$ و $x_{ij} = 0$ هرجایی که $i = j$ یا $v_iv_j \in E(G)$.*

اکنون $\mu(G)$ را بزرگترین رتبه‌ی فضای پوچی بین همه‌ی Mها می‌گیریم.

کولین دو وردیر با ایده‌هایی از هندسه‌ی دیفرانسیل ثابت کرد که اگر H کهاد گراف G باشد، آنگاه $\mu(H) \leq \mu(G)$. سپس محاسبه کرد که $\mu(K_{3,3}) = \mu(K_5) = 4$.

اکنون تنها یک فراخوانی قضیه‌ی کوراتفسکی نیاز است:

قضیه ۱۷. (کولین دو وردیر. ۱۹۹۰). *گراف همبند G مسطح است اگر و فقط اگر $\mu(G) \leq 3$.*

در امتدادی ظاهراً متفاوت از خط سیر تفکر کوراتفسکی‌وار، ویتنی(Whitney) با دیدی متفاوت حرکت می‌کرد. ویتنی از ایده‌ی دوگان هندسی گراف کمک گرفت و نوعی دوگان ظاهراً متفاوت ارائه کرد.

تعریف ۱۸. *گراف (چندگانه‌ی) G را در نظر بگیرید. می‌گوییم که گراف (چندگانه‌ی) H دوگان ترکیبیاتی G است اگر که تابع یک به یک $\phi : E(G) \to E(H)$ وجود داشته باشد، به طوری که تصویر هر دور G تحت این تابع برش مینیمالی در H شود.*

[14] زیرگراف ۲-همبند ماکسیمال

قضیه ۱۹. (ویتنی). *یک گراف ۲-همبند (چندگانه) مسطح است اگر و تنها اگر دوگان ترکیبیاتی داشته باشد.*

قضیه‌ی ویتنی سه سال پس از قضیه‌ی کوراتفسکی رونمایی شد و در آن زمان (و حتی تا سی سال بعد) ردی از قضیه‌ی کوراتفسکی در آن دیده نمی‌شد. با این همه در ۱۹۷۱، پرسنس (Parsons) نشان داد که محک‌های مبتنی بر دوگان‌سازی[15] قابل تحویل به قضیه‌ی کوراتفسکی هستند.

[... تا اینجا انتظار بر این می‌رود که خواننده گمان برده باشد که پرده‌ی آخر این مقاله به اینجا ختم می‌شود که همه‌ی محک‌های تسطیح‌پذیری واگویه‌ای درشت یا ظریف از قضیه‌ی بنام کوراتفسکی هستند.]

پرده آخر اشاره به تلاش ریاضی‌دان گمنامی ($\neq$ بنام،) به نام اشنیدر(Schnyder) دارد که به نتیجه‌ای غریب دست یافت.[16]

تعریف. فرض کنید که $P = (X, <)$ یک ترتیب جزئی(با تعریف خاص و دارای ویژگی‌های تراگذری، پادتقارنی و نابازتابی[17]) باشد. چنین ترتیبی را خطی می‌گوییم اگر هر دو عضوی با هم قابل مقایسه باشند.

در ۱۹۴۱، داشنیک(Dushnik) و میلر(Miller) بُعد یک رابطه‌ی ترتیب $P = (X, <)$ را به صورت کمترین تعداد ترتیب‌های خطی که از اشتراکشان بتوان $<$ را ساخت، تعریف کردند.این بعد را با $\dim P$ نشان می‌دهیم. کار حیرت آوری که اشنیدر کرد این بود که X را مجموعه‌ای با اعضای یال‌ها و رئوس گراف G گرفت و از رابطه‌ی ترتیب جزئی مضحکی[18] کمک گرفت: «اگر رأس v سر یال e باشد، داریم: $v <_G e$».

قضیه ۲۰. (اشنیدر. ۱۹۸۹). *گراف G مسطح است اگر و فقط اگر $\dim P_G \leq 3$. به علاوه، برای هر نمایش ۳-بعدی این رابطه با ترتیب‌های خطی، به صورت $<_1, <_2, <_3$ ، به طوری که $<_G = <_1 \cap <_2 \cap <_3$ ، یک نشاندن مسطح یال- مستقیم G با دستور زیر وجود دارد:*

$$V(G) \to \mathbb{R}^2, v \mapsto (v_1, v_2)$$

به طوری که $u <_1 v$ و $u <_2 v$ اگر و تنها اگر $u_1 < v_1$ و $u_2 < v_2$.

[15] محک ویتنی آبستن چندین محک تسطیح‌پذیری دیگر نیز بوده است؛ همچون محک جَگِر(Jaeger) و یا محک روزنشیهل (Rosenstiehl).

[16] همین قدر بدانید که این ریاضی‌دان تا کنون دو مقاله نوشته است؛ یکی در ۱۹۸۹ با سایتشن(citation) ۴۸!! درباره‌ی سایتشن دیگری که در سال ۱۹۹۵ نگاشته است چه حدسی می‌زنید؟

[17] transitive, asymmetric and irreflexive

[18] اگر بر تخصیص واژه‌ی «مضحک» تردیدی دارید، سعی کنید تا صدق رابطه‌ی ترتیب جزئی بودن $<_G$ را بررسی کنید!

صرفاً جهت خالی نبودن پایان این عریضه، برهان یک طرف قضیه را شرح می‌دهیم.

(برهان خلف) فرض می‌کنیم که $\dim P_G \leq 3$، ولی G مسطح نباشد و بنابراین می‌توان $<_G = <_1 \cap <_2 \cap <_3$ را به کار بست. برای هر $v \in V(G)$ و $i = 1, 2$، قرار می‌دهیم: $v_i = 2^{t_i}$ که t_i مرتبه‌ی v نسبت به $<_i$ است. هم‌چنین قرار می‌دهیم: $f(v) = (v_1, v_2)$. اکنون کافی است که نشان دهیم f را می‌توان به نشاندن مسطح یال-مستقیم G گسترش داد؛ یعنی اگر uv و $u'v'$ دو یال نامتقاطع G باشند، $\overline{f(u)f(v)} \cap \overline{f(u')f(v')} = \emptyset$ [۱۹]. اگر دست بر قضا $\overline{f(u)f(v)}$ بخشی از $\overline{f(v)f(w)}$ شود، آن‌گاه یا u از درجه‌ی یک است، و یا u به هر دو راس v و w متصل است. در این حالت(ها) کافی است $f(u)$ را کمی جابه‌جا کنیم! پس فرض می‌کنیم که دو پاره خط $\overline{f(u)f(v)}$ و $\overline{f(u')f(v')}$ در یک نقطه همدیگر را قطع می‌کنند.

u را بزرگترین نسبت به $<_1$ در بین $\{u, v, u', v'\}$ می‌گیریم. چون $<_G = <_1 \cap <_2 \cap <_3$ و $<_1$، $<_2$ و $<_3$، هر سه روی X_G خطی هستند، پس برای انتخابی مناسب و نه لزوماً متمایز از $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ داریم:

$$uv <_k v', uv <_j u', u'v' <_i v$$

چون $uv <_k u$ و $uv <_j u$، و با توجه به ویژگی $<_1$-ماکزیمم نسبی بودن u، درمی‌یابیم که $j, k \neq 1$. با در نظر گرفتن

$$\overline{f(u)f(v)} \cap \overline{f(u')f(v')} \neq \emptyset$$

سخت نیست که استدلال کنیم که $i \neq 1$ (زیرا در غیر این صورت $v <_1 u'$ به $v <_1 v'$). هم‌چنین می‌توان نشان داد که $i \neq j, k$. بنابراین تنها دو حالت قابل بحث باقی می‌ماند:

الف) $i = 3$ و $j, k = 2$.

به راحتی عدم وقوع این حالت اثبات می‌شود.

ب) $i = 2$ و $j, k = 3$.

در این حالت داریم $v <_2 u'v'$. این امر موجب وقوع $v_2 < v'_2$ و $v_2 < u'_2$ می‌شود. اکنون از رابطه‌ی

$$\overline{f(u)f(v)} \cap \overline{f(u')f(v')} \neq \emptyset$$

به درستی $v <_2 u$ می‌رسیم.

بیایید تا اینجا را این طور خلاصه کنیم:

$$v'_1 < u_1, u'_1 < u_1, v'_2 < v_2, u'_2 < v_2, u_2 < v_2, v_1 < u_1$$

چون دو یال همدیگر را قطع می‌کنند، یکی از $f(u')$ و یا $f(v')$ باید در مثلث به رئوس $f(u)$، $f(v)$ و (u_1, v_2) بیفتد. مثلاً فرض کنیم که $f(u')$ بیفتد. در این صورت از شهود مقدماتی هندسی درمی‌یابیم که: $u_1 < u'_1 < \frac{u_1}{2}$ یا $v_2 < u'_2 < \frac{v_2}{2}$؛ که هر دو منجر به تناقض با تعریف f می‌شوند.

مسأله (ای از روی کنجکاوی). تا اینجا که یک طرف ادعا ثابت شد، اثری از قضیه‌ی کوراتفسکی دیده نشد! آیا پشت پرده‌ی اثبات طرف دیگر، این قضیه ظاهر می‌شود؟ چه «بله» و چه «خیر»، اگر متواضعانه‌تر پرسیده شود «آیا اثباتی بر مبنای قضیه‌ی کوراتفسکی برای همین طرف قضیه‌ی اشنیدرِ که ثابت شد، می‌توان یافت»؟!

صرف نظر از سیر تاریخی مرور شده، بحث نشاندن گراف‌های مسطح هنوز مسائل سترگی دارد که چندان تکان نخورده اند. از این نمونه با اشاره به یک حدس، این بحث (ِ پایان ناپذیر!) را خاتمه می‌دهیم.

حدس. هربرث(Harborth). آیا هر گراف مسطح دارای نشاندن مسطح یال-مستقیمی است که هر یالش طول صحیح داشته باشد؟

[۱۹] در اینجا منظور از $\overline{AB}$ ، پاره خط واصل بین دو نقطه‌ی A و B است.

مراجع

[1] D. Archdeacon, C. P. Bonnington, C. H. C. Little, Cycles, cocycles and diagonals: A characterization of planar graphs, in "Planar Graphs", Ed. W. T. Trotter, DIM ACS Series Vol. 9, Amer. Math. Soc, Providence, R. I.,1993, pp. 1-3.

[2] D. Archdeacon, J. Širáň, Characterizing planarity using theta graphs, J. Graph Theory 27 (1998) 17-20.

[3] Y. Colin de Verdière, Sur un nouvel invariant des graphes et un critère de planarité, J. Combin. Theory Ser B 50 (1990) 11-21.

[4] B. Dushnik, E. W. Miller, Partially ordered sets, Amer. J. Math 63 (1941)600-610.

[5] I. Fáry, On straight representations of planar graphs, Acta Sci. Math. Szeged 11 (1948) 229-233.

[6] projective plane, Graph Theory (1994)

[7] J. C. Fournier, Une relation de separation entre cocircuits d'un matroide, J. Combin. Theory Ser. B 16 (1974) 181-190.

[8] H. de Fraysseix, P. Rosenstiehl, A depth-first-search characterization of planarity, Ann. Discrete Math. 13 (1982) 75-80.

[9] H. de Fraysseix, P. Rosenstiehl, A characterization of planar graphs by Tremaux orders, Combinatorica 5 (1985) 127-135.

[10] O. Frink, P. A. Smith, Abstract 179, Bull. Amer. Math. Soc. 36 (1930) 214.

[11] D. A. Holton, C. H. C. Little, A new characterization of planar graphs, Bull. Amer. Math. Soc. 83 (1977) 137-138.

[12] F. Jaeger, Interval matroids and graphs, Discrete Math. 27 (1979) 331-336.

[13] K. Kuratowski, Sur le probleme des courbes gauches en topologie, Fund. Math. 15 (1930) 271-283.

[14] B. Mohar, C. Thomassen, Graphs on Surfaces, The John Hopjins University Press (2001)

[15] S. MacLane, A combinatorial condition for planar graphs, Fund. Math. 28 (1937) 22-32.

[16] T. D. Parsons, On planar graphs, Amer. Math. Monthly 78 (1971) 176-178.

[17] P. Rosenstiehl, Caractérisation des graphes planaires par une diagonal algébrique, Corp. Rend. Acad. Sci. Paris Ser. A 283 (1976) 417-419.

[18] S. K. Stein, Convex maps, Proc. Amer. Math. Soc. 2 (1951) 464-466.

[19] W. Schnyder, Planar graphs and poset dimension, Order 5 (1989) 323-343. Theory (1997)

[20] C. Thomassen, Planarity and duality of finite and infinite graphs, J. Combin. Theory Ser. B 29 (1980) 244-271.

[21] W. T. Tutte, Matroids and graphs, Trans. Amer. Math. Soc. 88 (1958) 144-174.

[22] W. T. Tutte, Convex representations of graphs, Proc. London Math. Soc. 10 (1960) 304-320.

[23] K. Wagner, Bemerkungen zum Vierfarbenproblem, Jber. Deutsch. math. Verein. 46 (1936) 26-32.

[24] K. Wagner, Uber eine Eigenschaft der ebenen Komplexe, Math. Ann. 114 (1937) 570-590.

[25] D. West, Introduction to Graph Theory, second edition,(2002)

[26] H. Whitney, Planar graphs, Fund. Math. 21 (1933) 73-84.

[27] S. G. Williamson, Canonical forms for cycles in bridge graphs, Linear Multilin. Algebra 34 (1993) 301-341.

آنالیز روی خمینه‌ها (قسمت اول)

احمدرضا حاج سعیدی صادق

چکیده

عملگرهای فردهلم[۱]، به‌دلیل ارتباطی که میان آنالیز، توپولوژی و جبر ایجاد می کنند، زمینه مطالعاتی گسترده هستند. همچنین این عملگرها در مطالعه معادلات انتگرالی[۲] و معادلات دیفرانسیل نیز به نحوی ظهور پیدا می‌کنند.اما عمیق‌ترین و جذاب‌ترین ویژگی این عملگرها، اندیس[۳] این عملگرهاست. همان طور که ثابت خواهیم کرد، اندیس عملگرها به طور موضعی ثابت‌اند و این خود، ما را به سمت مطالعه توپولوژی فضای عملگرهای فردهلم سوق می‌دهد. خواهیم دید که فضای عملگرهای فردهلم، برحسب اندیس به مولفه‌های همبندی مسیری افراز می‌شود و هر دو عملگر با اندیس یکسان، در یک مولفه قرار می‌گیرند. در این مقاله صرفا به معرفی عملگرهای فردهلم و مقدماتی از آنالیز تابعی می‌پردازیم. در مقالات بعدی به کاربردهای این عملگرها در شاخه‌های دیگر می‌پردازیم.

در اینجا ما با فضای هیلبرت مختلط جدایی پذیر H سر و کار داریم؛ دلیل این فرض، وجود یک دنباله یکامتعامد کامل[۴](پایه شادر[۵]) است که همانند پایه برای فضاهای برداری متناهی‌البعد عمل می‌کنند. ازخواننده انتظار می‌رود با مفاهیم ابتدایی آنالیز تابعی در حد تعریف آشنا باشد تا در مطالعه این مطالب با ابهام روبرو نشود.

تعریف ۱. *عملگر $F \in B(H)$ ($B(H)$ فضای عملگرهای کراندار است) را عملگر فردهلم می‌نامیم اگر $Ker(F)$ و $Coker(F) = H/Im(F)$ هر دو متناهی‌البعد باشند. در این صورت اندیس این عملگر را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:*

$$Index(F) := dim(Ker(F)) - dim(Coker(F))$$

دقت کنیم که اگر H متناهی‌البعد باشد، آنگاه هر عملگری فردهلم با اندیس صفر است؛ این امر از رابطه $H/Ker(F) = Im(F)$ نتیجه می‌شود.

مثال ۲. *فرض کنید $e_1, e_2, \cdots$ یک دنباله یکامتعامد کامل(پایه شادر) برای H باشد. در این صورت عملگر های*

$$shift^+ : H \to H$$

$$e_i \mapsto e_{i+1}$$

و

$$shift^- : H \to H$$

$$e_i \mapsto e_{i-1}$$

هر دو این عملگرها فردهلم هستند. همچنین هر توانی از این دو عملگرها نیز فردهلم هستند و

$$Index((shift^+)^n) = -n, Index((shift^-)^n) = n$$

منظور ما از f^n ، $f \circ f \circ \cdots \circ f$ است.

قضیه ۳. *تصویر عملگر فردهلم $F : H \to H$ زیرفضایی بسته از H است.*

اثبات. فرض کنیم $v_1 + Im(F), v_2 + Im(F), \cdots, v_m + Im(F)$ تشکیل یک پایه برای $Coker(F)$ بدهند. در این صورت نگاشت

$$F' : H \oplus span\{v_1, \cdots, v_m\} \to H$$

$$(u, v) \to F(u) + v$$

عملگری کراندار و پوشاست. پس بنابر قضیه نگاشت باز[۶]، این عملگر باز است. از آنجا که $H \oplus span\{v_1, \cdots, v_m\} \setminus H \oplus \{0\}$ در $H \oplus span\{v_1, \cdots, v_m\}$ باز است،تصویر آن تحت نگاشت F' یعنی $H \setminus Im(F)$ باز است و لذا $Im(F)$ بسته است. □

تعریف ۴. *برای هر عملگر کراندار $T \in B(H, H')$ عملگر الحاقی[۷] یکتا $T^* \in B(H', H)$ موجود است که برای هر $x \in H, y \in H'$*

[۴] Complete Orthogonal Sequence
[۵] Schauder basis
[۶] Open Mapping Principle
[۷] Adjoint Operator

$$< T(x), y >=< x, T^*(y) >$$

همچنین برای هر دو عملگر کراندار T و S رابطه‌های زیر را داریم:

$$T^{**} = T \text{ ،} (aT+bS)^* = \bar{a}T^* + \bar{b}S^* \text{ ،} (TS)^* = S^*T^*$$
$$||T^*T|| = ||T^*||||T|| = ||T||^2$$

از آنجا که خواص عملگر الحاقی در تعریف گنجانده شده است، اثبات وجود و خواص را به خواننده واگذار می‌کنیم. از این پس فضای عملگرهای فردهلم روی فضای هیلبرت H را با $\mathcal{F}$ نمایش می‌دهیم. همچنین $\mathcal{F}$ را همراه با توپولوژی القایی از نرم عملگری روی $B(H)$، در نظر می‌گیریم.

مثال ۵. *برای عملگرهای معرفی شده در مثال اول داریم:* $shift^{+^*} = shift^-$

قضیه ۶. *برای $F \in B(H)$ اگر $Im(F)$ زیرفضایی بسته از H باشد(مثلا اگر $F \in \mathcal{F}$) روابط زیر برقرار است:*

$$Im(F) = Ker(F^*)^\perp \text{ و } Coker(F) \simeq Ker(F^*)$$

اثبات. برای هر $F(v) \in Im(F)$ و $w \in Ker(F^*)$ داریم

$$< F(v), w >=< v, F^*(w) >= 0$$

پس

$$F(v) \in Ker(F^*)^\perp$$

بنابراین $Im(F) \subseteq Ker(F^*)^\perp$ به طرز مشابه اگر $u \in Im(F)^\perp$ و $u' \in H$ پس

$$0 =< u, F(u') >=< F^*(u), u' >$$

در نتیجه $u \in Ker(F^*)$ به عبارتی $Im(F)^\perp \subseteq Ker(F^*)$ یا معادلا $Ker(F^*)^\perp \subseteq Im(F)^{\perp\perp} = Im(F)$ پس

$$Im(F) = Ker(F^*)^\perp$$

در اینجا از این نکته بهره گرفتیم که برای هر زیر فضای خطی بسته مثل A رابطه $A^{\perp\perp} = A$ برقرار است. برای دیدن حکم دوم، از بسته بودن $Im(F)$ می توان H را به صورت جمع مستقیم $Im(F)$ و مکمل متعامدش نوشت. پس $Coker(F) = H/Im(F)$ یکریخت است با $Im(F)^\perp = Ker(F^*)$. □

در اینجا لمی سودمند را بیان می‌کنیم ولی از اثبات آن به دلیل دور بودن از فضای کلی مطلب، چشم پوشی می‌کنیم؛ البته اثبات آن تمرینی مناسب برای خواننده است.

لم ۷. *فرض کنیم $H_1, H_2, \cdots$ دنباله ای از فضاهای هیلبرت جدایی پذیر باشند. اکنون اگر دنباله*

$$H_1 \xrightarrow{T_1} H_2 \xrightarrow{T_2} H_3 \xrightarrow{T_3} \cdots$$

از عملگرهای کراندار، دقیق باشد؛ آنگاه دنباله

$$H_1 \xleftarrow{T_1^*} H_2 \xleftarrow{T_2^*} H_3 \xleftarrow{T_3^*} \cdots$$

نیز دقیق است.

اکنون می‌توان نتیجه گرفت: اگر $F \in \mathcal{F}$ آنگاه $F^* \in \mathcal{F}$. می‌توان دنباله دقیق زیر را در نظر گرفت:

$$0 \longrightarrow Ker(F) \xrightarrow{i} H \xrightarrow{F} H \xrightarrow{p} Coker(F) \longrightarrow 0$$

که i و p نگاشت شمول و خارج قسمتی هستند. در این صورت طبق لم اخیر، دنباله زیر نیز دقیق است:

$$0 \longrightarrow Coker(F) \xrightarrow{p^*} H \xrightarrow{F^*} H \xrightarrow{i^*} Ker(F) \longrightarrow 0$$

پس خواهیم داشت:

$$dimKer(F^*) = dimCoker(F) \text{ و}$$
$$dimCoker(F^*) = dimKer(F)$$

در نتیجه F^* فردهلم است و بعلاوه

$$Index(F^*) = dimKer(F^*) - dimCoker(F^*) =$$
$$dimCoker(F) - dimKer(F) = -Index(F)$$

قضیه ۸. *برای یک عملگر کراندار $F : H \to H$ که $Im(F)$ زیرفضایی بسته از H باشد (مثلا وقتی که F فردهلم است) روابط $Ker(F^*F) = Ker(F)$ و $Im(F^*F) = Im(F^*)$ برقرارند.*

اثبات. برای تساوی $Ker(F^*F) = KerF$، شمول $Ker(F^*F) \supseteq KerF$ واضح است. فرض کنیم $v \in Ker(F^*F)$ پس: $0 =< v, F^*F(v) >=< F(v), F(v) >$ که نتیجه می‌دهد $v \in Ker(F)$ پس $Ker(F^*F) \subseteq KerF$ و تساوی اول ثابت شد. دقت کنیم که در اثبات این تساوی از بسته بودن $Im(F)$ استفاده نکردیم. برای رابطه دوم، $Im(F^*F) \subseteq Im(F^*)$ واضح است. فرض کنیم $v = F^*(u) \in Im(F^*)$ بنابر قضیه ۶ می‌توان نوشت $u = u_1 + u_2$ به طوری که $u_1 = F(w) \in Im(F) = Ker(F^*)^\perp$ و $u_2 \in Ker(F^*)$ پس داریم $v = F^*(u_1 + u_2) = F^*F(w) \in Im(F^*F)$ بنابراین شمول $Im(F^*F) \supseteq Im(F^*)$ نیز برقرار است و اثبات تمام است. □

تعریف ۹. عملگر $F \in B(H)$ *را از رتبه متناهی*[۸] *می نامیم اگر* $dim(Im(F)) < \infty$.

قضیه ۱۰. *اگر عملگر* $F \in B(H)$ *از رتبه متناهی باشد،* F^* *نیز از رتبه متناهی است.*

اثبات. فرض کنیم $e_۱$، $\cdots$ و e_n یک پایه یکامتعامد برای $Ker(F)^\perp$ باشد و برای $۱ \le i \le n$ قرار می دهیم $f_i = F(e_i)$. پس

$$F(z) = \sum_{i=۱}^{n} f_i < z, e_i >$$

اکنون به راحتی می‌توان دید که $F^*(z) = \sum_{i=۱}^{n} e_i < z, f_i >$. □

عملگرهای از رتبه متناهی، شاید به طور مستقیم در نتایج اصلی این مقاله ظاهر نشوند. اما این عملگرها ما را به معرفی عملگرهایی که به آن ها فشرده[۹] می گوییم، بسیار نزدیک می کنند! به عبارتی دیگر فضای عملگرهای فشرده بستار فضای عملگرهای از رتبه متناهی است.

قضیه ۱۱. *اگر* $K \in B(H)$ *عملگری از رتبه متناهی باشد، آن گاه* $I + K$ *عملگری فردهلم است و اندیس آن صفر است. (*I *نگاشت همانی* H *است.)*

قبل از اثبات این قضیه، قضیه ای معروف به نام "لم مار"[۱۰] را بیان می کنیم؛ البته به اثبات آن به دلیل طولانی بودن، نمی‌پردازیم:

قضیه ۱۲. *فرض کنید* A، B، $\cdots$ *و* C' *فضاهایی برداری روی یک میدان باشند و* F، F' *و* F'' *توابعی خطی باشند به طوری که نمودار زیر جابجایی باشد و دنباله های افقی دقیق باشند:*

$$\begin{tikzcd}
۰ \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d, "F"] & B' \arrow[r] \arrow[d, "F'"] & C' \arrow[r] \arrow[d, "F''"] & ۰ \\
۰ \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & ۰
\end{tikzcd}$$

لم مار

در این صورت دنباله دقیق زیر وجود دارد:

$$۰ \longrightarrow Ker(F) \longrightarrow Ker(F') \longrightarrow Ker(F'') \xrightarrow{\delta}$$
$$Coker(F) \longrightarrow Coker(F') \longrightarrow Coker(F'') \longrightarrow ۰$$

اثبات. **(قضیه ۱۱):** در نمودار فوق فرض کنیم

$$A = A' = Im(K) \text{، } B = B' = H \text{ و } C = C' = H/Im(K)$$

و همچنین فرض کنیم $F = (I+K) \mid Im(K)$، $F' = I + K$ و عملگر F'' عملر القایی $I + K$ روی $H/Im(K)$ باشد؛ البته دقت کنیم که این سه عملگر، خوش تعریف می‌باشند. عملگرهای سطری، در هر دو سطر از چپ به راست، عملگرهای شمول و خارج قسمتی است. در این صورت این نمودار حاصل جابجایی است؛ اما F روی فضایی متناهی البعد تعریف شده است پس اندیس آن صفر است، همچنین F'' همان عملگر همانی $H/Im(K)$ است. پس فردهلم است و اندیس صفر دارد؛ همچنین $Ker(F'') = ۰$ و $Coker(F'') = ۰$ پس بنا بر لم مار و دنباله دقیق متناظر و نوشتن رابطه دنباله بعدهای آن(جمع متناوب بعد فضاها در دنباله‌ی دقیقی که لم مار بدست می‌دهد صفر است.) می‌توان نتیجه گرفت که $Ker(F')$ و $Coker(F')$ متناهی البعدند و

$$Index(I + K) = Index(F) + Index(F'') = ۰$$

□

تعریف ۱۳. عملگر $K \in B(H)$ *را فشرده می‌نامیم اگر تصویر گوی باز واحد (یا هر زیر مجموعه کراندار) تحت این عملگر بستار فشرده داشته باشد. به طور معادل یک عملگر فشرده است اگر تصویر هر دنباله کراندار تحت آن، یک زیر دنباله همگرا داشته باشد. فضای عملگرهای فشرده را با* $\mathcal{K}$ *نمایش می‌دهیم.*

با فرض نامتناهی البعد بودن H، نتیجه فوری ای که می‌توان گرفت این است که $\mathcal{K}$ ایده آلی دوطرفه، نابدیهی و سره از $B(H)$ است. البته باید ساختار جبری که از جمع و ترکیب عملگرها، به وجود می‌آید را در نظر بگیریم. اول از همه دقت کنیم که $\mathcal{K}$ شامل تمام عملگرهای از رتبه متناهی است ولی عملگر همانی را دارا نیست (چون گوی واحد در فضای نامتناهی البعد، فشرده نیست). به وضوح برای هر $T \in B(H)$ و $K \in \mathcal{K}$ عملگرهای $K \circ T$ و $T \circ K$ فشرده اند. اگر K و K' دو عملگر فشرده باشند به سادگی از تعریف دوم عملگر فشرده، فشردگی $K + K'$ نتیجه می‌شود.

قضیه ۱۴. $\mathcal{K}$ *بستار فضای عملگرهای از رتبه متناهی است.*

اثبات. فرض کنیم عملگر کراندار K در بستار $\mathcal{K}$ واقع باشد. فرض کنیم $\epsilon > ۰$ دلخواه باشد. $K' \in \mathcal{K}$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $||K - K'|| < \epsilon/۳$. فرض کنیم D گوی بسته واحد باشد. از فشردگی K' می‌توان متناهی گوی به شعاع $\epsilon/۳$ به مرکزهای $K'(u_۱)$، $\cdots$ و $K'(u_m)$ ($u_i \in D$ برای $۱ \le i \le m$) یافت که پوششی برای $K'(D)$ باشد. اکنون برای هر $u \in D$ می‌توان $u_i \in \{u_۱, \cdots, u_m\}$ یافت به طوری که $| K'u - K'u_i | < \epsilon/۳$. پس

[۸] Finite Rank Operator
[۹] Compact Operator
[۱۰] Snake Lemma

$$| Ku - Ku_i |<| Ku - K'u | + | K'u - K'u_i | + | K'u_i - Ku_i |< ||K - K'|| + \epsilon/3 + ||K - K'|| < \epsilon$$

پس می توان $K(D)$ را با گوی‌های به شعاع ϵ حول $K(u_1)$، $\cdots$ و $K(u_m)$ پوشاند و در نتیجه K هم فشرده است.

اکنون نشان می‌دهیم هر عملگر فشرده، حد دنباله ای از عملگرهای از رتبه متناهی است. فرض کنیم $K \in \mathcal{K}$. فرض کنیم e_1، e_2، $\cdots$ یک پایه یکامتعامد برای فضای هیلبرت H باشد. فرض کنیم $P_n : H \to span\{e_1, \cdots, e_n\}$ عملگر تصویر متعامد باشد. نشان می‌دهیم که دنباله $\{P_n(K)\}_{n=1}^{\infty}$ از عملگرهای از رتبه متناهی به K میل می‌کند. از فشردگی K، می توان $K(D)$ را با متناهی گوی به شعاع، ϵ به مرکزهای $K(u_1)$، $\cdots$ و $K(u_m)$ پوشاند. از آن جا که $\{P_n(K)\}_{n=1}^{\infty}$ نقطه به نقطه به K میل می‌کنند، می‌توان برای n به اندازه کافی بزرگ و برای $1 \le i \le m$ فرض کرد $| P_n(K)(u_i) - K(u_i) |< \epsilon$. دقت کنیم که $||P_n|| = 1$؛ برای هر $u \in D$ می‌توان u_i ای یافت که $| K(u) - K(u_i) |< \epsilon$ بنابراین داریم

$$| K(u) - P_n(K)(u) |\le| K(u) - K(u_i) | + | K(u_i) - P_n(K)(u_i) | + | P_n(K)(u_i) - P_n(K)(u) |< \epsilon + \epsilon + | K(u_i) - K(u) |< 3\epsilon$$

و اثبات اکنون کامل است. □

قضیه ۱۵. *$\mathcal{K}$ تحت الحاق بسته است.*

اثبات. فرض کنیم $K \in \mathcal{K}$ پس دنباله‌ای از عملگرهای از رتبه متناهی مثل $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ موجود است که به K میل می‌کند. مطابق قضیه ۱۰، $\{T_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ نیز دنباله ای از عملگرهای از رتبه متناهی است. بنابراین

$$||T_n^* - K^*|| = ||(T_n - K)^*|| = ||T_n - K|| \to 0$$

پس قضیه قبل نتیجه می‌دهد $K^* \in \mathcal{K}$. □

لم ۱۶. *اگر K عملگری فشرده باشد، آنگاه $I + K$ عملگری فردهلم با اندیس صفر است.*

اثبات. بنابر قضیه ۱۴ می‌توان عملگری از رتبه متناهی مثل F یافت که $||K - F|| < 1$ بنابر قضیه‌ای مقدماتی در آنالیز تابعی $Q = I - (F - K)$ وارون‌پذیر است. پس داریم:

$$I + K = Q(Q^{-1} + Q^{-1}K) = Q(Q^{-1} + Q^{-1}Q - Q^{-1} + Q^{-1}F) = Q(I + Q^{-1}F)$$

یک عملگر وارون‌پذیر با ترکیب شدن با یک عملگر کراندار، بعد Ker و $Coker$ آن را تغییر نمی‌دهد. اما $I + (I - (F - K))^{-1}F$ مطابق قضیه ۱۱ فردهلم و با اندیس صفر است. از طرفی هم $Q = I - (F - K)$ وارون‌پذیر است، پس $I + K$ فردهلم با اندیس صفر است. □

همچون لم قبل، در بقیه قضایا هم از حکم زیر بهره می‌گیریم: اگر برای عملگر کراندار Q داشته باشیم $||Q|| < 1$ آنگاه عملگر $I + Q$ وارون‌پذیر است؛ در واقع وارون آن $\sum_{n=0}^{\infty}(-Q)^n$ است.

از این پس قرار می‌دهیم $\mathcal{B} = B(H)$ و فرض می‌کنیم H نامتناهی البعد است. فضای $\mathcal{B}/\mathcal{K}$ و نگاشت خارج قسمتی $\pi : \mathcal{B} \to \mathcal{B}/\mathcal{K}$ را در نظر می‌گیریم. روی این فضا، نرم

$$||\pi(T)|| = inf\{||T - K|| \mid K \in \mathcal{K}\}$$

را می‌گذاریم. از بسته بودن $\mathcal{K}$ خوش‌تعریفی نرم، به دست می‌آید. اول از همه داریم $||\pi(I)|| \le ||I|| = 1$. ازطرفی برای عملگر فشرده K، $||I+K|| \ge 1$ زیرا در غیر این صورت $K = I-(I-K)$ وارون‌پذیر است و نمی‌تواند فشرده باشد. اگر K_1 و K_2 فشرده باشند و T_1 و T_2 دو عملگر کراندار باشند، $K_1 \circ T_2 + T_1 \circ K_2 - K_1 \circ K_2$ نیز فشرده است. پس

$$inf||T_1T_2 - K|| \le ||T_1T_2 - (K_1 \circ T_2 + T_1 \circ K_2 - K_1 \circ K_2)|| = ||(T_1 - K_1)(T_2 - K_2)||$$

که اینفیموم روی تمام Kهای فشرده است. در نتیجه

$$inf||T_1T_2 - K|| \le inf||(T_1 - K_1)||.||(T_2 - K_2)||$$

که اینفیموم دومی روی تمام K_1 و K_2 های فشرده گرفته شده است. پس $||\pi(T_1)\pi(T_2)|| \le ||\pi(T_1)||||\pi(T_2)||$ [11] از این پس فضای عناصر وارون‌پذیر $\mathcal{B}/\mathcal{K}$ و $\mathcal{B}$ را به ترتیب با $(\mathcal{B}/\mathcal{K})^\times$ و $\mathcal{B}^\times$ نمایش می‌دهیم. اکنون یکی از مهم‌ترین قضیه‌های مورد نظرمان را بیان می‌کنیم:

قضیه ۱۷. $\mathcal{F} = \pi^{-1}(\mathcal{B}/\mathcal{K})^\times$.

اثبات. از قضیه ۸ می‌دانیم برای هر $F \in \mathcal{F}$

$Ker(F^*F) = Ker(F)$، $Im(F^*F) = Im(F^*)$، $Ker(FF^*) = Ker(F^*)$ و $Im(FF^*) = Im(F)$

پس اگر دو نگاشت از رتبه متناهی

$P : H \to Ker(F)$ و $Q : H \to Ker(F^*)$

[11] با توجه به این‌که $\mathcal{K}$ یک ایده‌آل دوطرفه $\mathcal{B}$ بود، $\mathcal{B}/\mathcal{K}$ یک جبر است و این‌جا در واقع نشان دادیم که $\mathcal{B}/\mathcal{K}$ یک جبر باناخ است.

نگاشت‌های تصویر متعامد باشند، آنگاه $FF^* + Q$ و $F^*F + P$ هر دو یک به یک و پوشا و در نتیجه وارون‌پذیرند. پس $\pi(F)\pi(F^*) = \pi(FF^* +$ و $\pi(F^*)\pi(F) = \pi(F^*F + P)$ وارون‌پذیرند؛ بنابراین $\pi(F)$ و $\pi(F^*)$ نیز وارون‌پذیر هستند و $\mathcal{F} \subseteq \pi^{-1}(\mathcal{B}/\mathcal{K})^\times$. اکنون فرض کنیم، برای $F \in \mathcal{B}$؛ $\pi(F)$ عنصری وارون‌پذیر از $(\mathcal{B}/\mathcal{K})^\times$ باشد. پس به ازای $F' \in \mathcal{B}$، $FF', F'F \in \pi(I)$ پس هر دو این دو عملگر اخیر، فردهلم و با اندیس صفرند. اما

$$Im(FF') \subseteq Im(F)$$

و

$$Ker(F) \subseteq Ker(F'F)$$

پس F نیز فردهلم است و $\mathcal{F} \supseteq \pi^{-1}(\mathcal{B}/\mathcal{K})^\times$. □

قضیه ۱۷ را می‌توان به این صورت نیز بیان کرد: عملگر $F \in \mathcal{B}$ فردهلم است اگر و فقط اگر عملگر $F' \in \mathcal{B}$ و عملگرهای فشرده K_1 و K_2 موجود باشند که $FF' = I + K_1$ و $F'F = I + K_2$. همچنین به عملگر F' که خود فردهلم است، شبه‌وارون[۱۲] F می‌گوییم و بنابر لم ۱۶ داریم: $Index(F') = -Index(F)$. به علاوه یک شبه وارون با اضافه شدن یک عملگر فشرده به آن، شبه‌وارون می ماند.

قضیه ۱۸. *$\mathcal{F}$ در $\mathcal{B}$ باز است. همچنین*

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{F} \subseteq \mathcal{F} \text{ و } \mathcal{F} + \mathcal{K} = \mathcal{F}$$

اثبات. برای باز بودن $\mathcal{F}$ طبق قضیه قبل کافی است نشان دهیم که $(\mathcal{B}/\mathcal{K})^\times$ در $\mathcal{B}/\mathcal{K}$ باز است. فرض کنیم $a \in (\mathcal{B}/\mathcal{K})^\times$ و $||h|| < ||a^{-1}||^{-1}$. پس $1 > ||ha^{-1}||$ و بنابر آنچه در قبل گفتیم، $1 + ha^{-1}$ وارون‌پذیر است. چون $a + h = (1 + ha^{-1})a$، $a + h$ نیز وارون‌پذیر است و $(\mathcal{B}/\mathcal{K})^\times$ در $\mathcal{B}/\mathcal{K}$ باز است. فرض کنیم که $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ و $K \in \mathcal{K}$، از آنجا که $\pi(F_1 + K) = \pi(F_1)$ و $\pi(F_1 \circ F_2) = \pi(F_1)\pi(F_2)$ دو رابطه بعدی نتیجه می‌شوند. □

دقت کنید که برای $F \in \mathcal{F}$ و $K \in \mathcal{K}$، چون هر شبه‌وارون F' از F برای $F + K$ هم شبه‌وارون است، پس داریم

$$Index(F + K) = -Index(F') = Index(F)$$

قضیه ۱۹. *نگاشت $Index : \mathcal{F} \to \mathbb{Z}$ پوشا و به طور موضعی ثابت است.*

[۱۲] Quasi-Inverse

اثبات. برای پوشا بودن، کافی است عملگرهای فردهلم زیر را در نظر بگیریم: $shift^{+n}$ و $shift^{-n}$ (از مثال ۲ استفاده می‌کنیم).

برای این که نشان دهیم $Index$ به طور موضعی ثابت است، $F \in \mathcal{F}$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که $G \in \mathcal{F}$ شبه‌وارون آن باشد و $GF = I + K$. مانند استدلال فوق با فرض $T \in \mathcal{B}$ و $||T|| < ||G||^{-1}$، خواهیم داشت: $F + T \in \mathcal{F}$ و $I + GT \in \mathcal{B}^\times$. از طرفی

$$(I + GT)^{-1}G(F + T) = (I + GT)^{-1}(I + K + GT) =$$
$$I + (I + GT)^{-1}K$$

پس $(I + GT)^{-1}G$ شبه‌وارون $F + T$ است و در نتیجه

$$Index(F + T) = -Index(G) = Index(F)$$

□

لم ۲۰. *$\mathcal{B}^\times$ در $\mathcal{B}$ باز است.*

اثبات. با فرض $U \in \mathcal{B}^\times$ و $T \in \mathcal{B}$ اگر $||T|| < ||U^{-1}||^{-1}$ آنگاه $I + U^{-1}T$ وارون‌پذیر است. می‌توان نوشت:

$$U + T = U(I + U^{-1}T)$$

پس $U + T$ وارون‌پذیر است. □

قضیه ۲۱. *$\mathcal{B}^\times$ همبند مسیری است.*

این قضیه حالت خاصی از یک قضیه کلی‌تر است و در این مقاله آن را اثبات نمی‌کنیم؛ ولی در سری مقالات بعدی به طور مفصل به آن می‌پردازیم.

قضیه ۲۲. *برای هر $n \in \mathbb{Z}$، $\mathcal{F}_n = \{F \in \mathcal{F} \mid Index(F) = n\}$ همبند مسیری است.*

اثبات. برای $n > 0$ تعریف می‌کنیم:

$$shift^n : \mathcal{F}_0 \to \mathcal{F}_n$$
$$F \mapsto (shift^-)^n \circ F$$

که پوشا (پوشا بودن از وارون راست داشتن $shift^-$ نتیجه می‌شود) و پیوسته است (و لذا همبندی مسیری $\mathcal{F}_0$ حکم مشابهی را برای F_n نتیجه می‌دهد). همچنین عملگر الحاق، یک یکسانی $* : F_n \to F_{-n}$ را به ما می‌دهد. . پس تنها کافی است نشان دهیم $\mathcal{F}_0$ همبند مسیری است. از آنجا که $\mathcal{B}^\times \subset \mathcal{F}_0$ بنابر قضیه ۲۱ کافی است هر عنصر $\mathcal{F}_0$ را با مسیری به $\mathcal{B}^\times$ وصل کنیم. فرض کنیم $F \in \mathcal{F}_0$؛ چون $dim(Ker(F)) = dim(Im(F)^\perp)$، عملگر وارون‌پذیر $\phi : Ker(F) \to Im(F)^\perp$ وجود دارد. نگاشت کراندار

$$\Phi = \{ \begin{array}{ll} \phi & \text{on } Ker(F) \\ \circ & \text{on } (Ker(F))^{\perp} \end{array}$$

را در نظر می‌گیریم. برای هر $t \in [\circ, \text{۱}]$، عملگر $F + t\Phi$ وارون‌پذیر است، چرا که نمایش ماتریسی زیر را دارد:

$$\begin{pmatrix} t\phi & \circ \\ \circ & F|_{(Ker(F))^{\perp}} \end{pmatrix}$$

$\square$

پس توانستیم نشان دهیم، $\mathcal{F}$ در $\mathcal{B}$ باز است و تحت الحاق، ترکیب و جمع با عملگرهای فشرده، بسته است. همچنین اندیس این عملگرها موضعا ثابتند؛ درنتیجه اندیس در هر مولفه همبندی $\mathcal{F}$ مسیری ثابت است. بنابر قضیه آخر برای هر عدد صحیح، یک و دقیقا یک مولفه همبندی مسیری با اندیس مورد نظر موجود است. در مقالات بعدی این مباحث را ادامه می‌دهیم و نظریه اندیس را گسترده‌تر مطرح می‌کنیم.

مراجع

[1] David Bleecker, Bernhelm Booth-Bavnbek, Index Theory, 2012.

[2] Martin Shechter, Principles of Functional Analysis, American Mathematical Society, 2002.

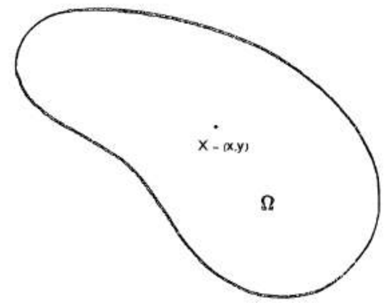
[3] Allen Hatcher, Algebraic Topology, Cambridge University Press, 2001.

بازسازی شکل اجسام از روی صدایی که تولید می‌کنند

عرفان صلواتی

۱ مدل‌سازی ارتعاش یک سطح

سطحی را در نظر بگیرید که از یک جنسِ کاملاً انعطاف‌پذیر و الاستیک ساخته شده باشد و لبه‌ی آن بسته شده باشد. (مثل یک طبل) اگر این سطح با وسیله‌ای به ارتعاش درآید، این ارتعاش را چگونه



می‌توان توصیف کرد؟

بیایید قاعده‌ی سطح را یک شکلِ دو بعدی و کران‌دار Ω در نظر بگیریم و ارتفاع سطح را با تابعِ u نشان دهیم. طبیعتاً u باید تابعی از نقطه‌ی $X=(x,y)$ و زمان t باشد. یعنی $u=u(t,x,y)$. اگر نیروهای وارد بر یک عنصر سطح کوچک را در نظر بگیریم و قوانین مکانیک نیوتونی را بنویسیم، معادله‌ی زیر موسوم به معادله‌ی موج استخراج می‌شود:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\Delta u$$

که در آن c^2 ثابتی است که از روی چگالی و کشش سطح محاسبه می‌شود و $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ عملگر لاپلاس در دو بعد است. ثابت بودنِ لبه‌ی سطح با این شرط مرزی توصیف می‌شود،

$$u(t,X)=0 \qquad X\in\partial\Omega$$

معادله‌ی موج بسیاری از پدیده‌های طبیعی از جمله امواج صوتی و امواج الکترومغناطیسی و تلاطم سیالات را مدل می‌کند و مطالعه‌ی آن به چند قرن پیش باز می‌گردد و ریاضی‌دانان معروفی چون اویلر، لاگرانژ و دیگران روی آن کار کرده‌اند. در ادامه برای سادگی فرض می‌کنیم $c^2=1$.

یک روش بسیار کارا در حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای از جمله معادله‌ی موج، روش جداسازی است. اساس این روش در نظر گرفتنِ جواب‌هایی است که به شکل حاصل‌ضرب تابعی از t و تابعی از X هستند.

اگر $u(X)$ جوابی از معادله‌ی زیر باشد،

$$\Delta u(X)+\lambda u(X)=0 \qquad (1)$$

$$u(X)=0 \qquad X\in\partial\Omega$$

آنگاه برای $\omega=\sqrt{\lambda}$، $\cos(\omega t)u(X)$ و $\sin(\omega t)u(X)$ جواب‌هایی از معادله‌ی موج خواهند بود. این جواب‌ها را به اصطلاح موج‌های ایستا و ω های متناظر آن‌ها را فرکانس‌های اصلی گویند. این حقیقت شناخته شده‌ایست که هر جوابی از معادله‌ی موج ترکیبِ خطی (بی‌نهایت تا از) موج‌های ایستا است. با توجه به این حقیقت می‌توان با شنیدن صدایی که از ارتعاشِ یک سطح به گوش می‌رسد به فرکانس‌های اصلیِ آن دست یافت.

uهای ناصفری که در معادله‌ی بالا صدق می‌کنند را توابع ویژه و λ های متناظر آن‌ها را مقادیر ویژه و مجموعه‌ی آن‌ها را طیفِ عملگر لاپلاس گویند. ثابت می‌شود که طیف، یک دنباله‌ی

$$0<\lambda_1\leq\lambda_2\leq\cdots\to\infty$$

تشکیل می‌دهد و توابع ویژه‌ی متناظر آن‌ها که با $\phi_n(X)$ نشان داده می‌شوند توابعی هموار هستند و یک پایه‌ی متعامد یکه برای $L^2(\Omega)$ (فضای توابع مربع انتگرال‌پذیر با ضرب داخلیِ $\langle f,g\rangle=\int_\Omega f(X)g(X)dX$) تشکیل می‌دهند.

بنابراین هدف اصلیِ مقاله را می‌توان به این صورت بیان کرد که چگونه می‌توان شکلِ یک ناحیه را از روی طیف آن بازسازی کرد.

پیش از آن باید به این سؤال پاسخ داد که آیا اساساً شکلِ یک ناحیه از روی طیفِ آن قابل بازسازی هست؟ یعنی به زبان ریاضی، اگر طیف Ω، $\lambda_1\leq\lambda_2\leq\cdots$ و طیف Ω'، $\lambda'_1\leq\lambda'_2\leq\cdots$ باشد و $\lambda_n=\lambda'_n$، آیا لزوماً Ω و Ω' همنهشت (به معنای اقلیدسی) هستند؟

در بخشِ ۳، خواهیم دید که جواب این سؤال منفی است. بنابراین، این سؤال مطرح می‌شود که چه ویژگی‌های هندسیِ یک شکل را می‌توان از روی طیفِ آن به دست آورد. این موضوعِ بخشِ بعد است.

۲ ویژگی‌های هندسی نهفته در طیف

یکی از اولین نتایج اساسی در مطالعه‌ی طیف عمل‌گر لاپلاس، قضیه‌ی زیر منسوب به هرمان وایل [1] است.

قضیه ۱ (وایل ۱۹۱۱). *اگر $N(\lambda)$ تعداد مقادیر ویژه‌ی عمل‌گر لاپلاس باشد که از λ کوچک‌تر اند، آن‌گاه وقتی $\lambda\to\infty$:*

$$N(\lambda)\sim\frac{|\Omega|}{2\pi}\lambda$$

[1] Hermann Weyl

شکل ۱: هرمان وایل

این قضیه نشان می‌دهد که می‌توان از روی طیف یک شکل، مساحت آن را به دست آورد. در ادامه روشی برای اثبات قضیه‌ی وایل ارائه می‌کنیم و سپس با استفاده از آن روش، اطلاعات هندسیِ دیگری را نیز از طیف استخراج می‌کنیم. برای رسیدن به این هدف، لازم است ابتدا معادله‌ی دیفرانسیل پاره‌ایِ دیگری را که آن هم منشأ فیزیکی دارد مطالعه کنیم.

معادله‌ی پخش [۲]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\Delta u \qquad (۲)$$

$$u(t,X)=0 \qquad X\in\partial\Omega$$

معادله‌ی پخش، پدیده‌های فیزیکی مختلفی از جمله پخش مواد و انتشار گرما را مدل می‌کند. روش جداسازی را در مورد معادله‌ی پخش نیز می‌توان به کار برد. در واقع اگر $u(X)$ جوابی از (۱) باشد، آن‌گاه $e^{-\lambda t}u(X)$ جوابی از (۲) خواهد بود و همه‌ی جواب‌های معادله‌ی پخش به صورت ترکیب خطی از (نامتناهی تا از) این جواب‌های ایستا خواهند بود. یعنی $u(t,X)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n t}\phi_n(X)$ که c_n ها اعداد حقیقی دلخواه هستند. اگر یک شرط اولیه به معادله‌ی پخش اضافه کنیم آن‌گاه جواب آن به طور یکتا مشخص می‌شود. ما شرط اولیه‌ی $u(0,X)=\delta_p(X)$ را در نظر می‌گیریم که p نقطه‌ای از Ω و $\delta_p(X)$ تابع دلتای دیراک در نقطه‌ی p است. این تصور فیزیکی را داشته باشید که ماده‌ای در یک سیال پخش می‌شود و در ابتدا همه‌ی ماده در نقطه‌ی p جمع شده است. در این صورت $u(t,X)$ نشان‌دهنده‌ی چگالیِ ماده در نقطه‌ی X در زمانِ t است. شرطِ مرزی هم به این معناست که ماده به محض رسیدن به مرز نابود می‌شود.

[۲] Diffusion Equation

می‌توان دید که برای برقراریِ شرط اولیه باید $c_n=\phi_n(p)$، یعنی

$$u(t,X)=\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t}\phi_n(p)\phi_n(X) \qquad (۳)$$

عبارت سمت راست را با $K(t,p,X)$ نشان می‌دهیم و آن را هسته‌ی حرارت [۳] ناحیه‌ی Ω گوییم. با قرار دادن $X=p$ داریم:

$$K(t,p,p)=\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t}\phi_n(p)^2 \qquad (۴)$$

که با انتگرال گیری روی Ω و با توجه به یکه بودنِ ϕ_n ها به رابطه‌ی ارزش‌مندِ زیر می‌رسیم:

$$\int_\Omega K(t,p,p)dp=\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \qquad (۵)$$

عبارت سمت راست بالا را با نمادِ $tr(e^{t\Delta})$ نشان می‌دهیم و آن را تریس حرارت [۴] گوییم. این نمادگذاری از عملگرهای خطی روی فضاهای متناهی بعد الهام گرفته شده است.

کلید اثبات قضیه‌ی وایل، در مطالعه‌ی رفتار مجانبی رابطه‌ی (۵) وقتی $t\to 0$ نهفته است.

از نظر فیزیکی انتظار داریم که وقتی هنوز زمان زیادی از شروع فرآیند پخش نگذشته، ماده‌ی موجود در سیال، به محیط Ω نرسیده باشد، به عبارت دیگر، وجود یا عدم وجود مرزِ Ω تأثیر چندانی روی جواب در زمان‌های کوچک ندارد. بنابراین اگر $K_0(t,p,X)$ هسته‌ی حرارت برای کلِ $\mathbb{R}^2$ باشد، انتظار داریم (و در واقع می‌توان به طور دقیق هم ثابت کرد که):

$$K(t,p,p)\sim K_0(t,p,p) \qquad t\to 0$$

فایده‌ی این رابطه در این است که ما جوابِ معادله‌ی پخش در $\mathbb{R}^2$ را می‌دانیم، در واقع

$$K_0(t,p,X)=\frac{1}{2\pi t}e^{-\frac{\|X-p\|^2}{2t}}$$

بنابراین وقتی $t\to 0$، $K(t,p,p)\sim\frac{1}{2\pi t}$، که با جایگذاری در (۵) به دست می‌آوریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t}\sim\frac{|\Omega|}{2\pi t}$$

گام نهایی اثبات را قضیه‌ی زیر که یکی از دسته قضایای موسوم به Tauberian است برای ما انجام می‌دهد. این قضایای بسیار

[۳] Heat Kernel

[۴] Heat Trace

کاربردی، رفتار مجانبی یک دنباله $\{\lambda_n\}$ (یا یک تابع) را در بی‌نهایت به رفتار مجانبی سری‌های توانی (یا انتگرال‌های توانی) در $t = ۰$ مربوط می‌سازند.

قضیه ۲ (Tauberian). *فرض کنید دنباله‌ی صعودی λ_n به بی‌نهایت میل کند. $N(\lambda)$ را تعداد λ_n هایی بگیرید که کوچکتر از λ هستند. در این صورت احکام زیر معادل‌اند:*

(الف) $N(\lambda) \sim c\lambda \qquad \lambda \to \infty$

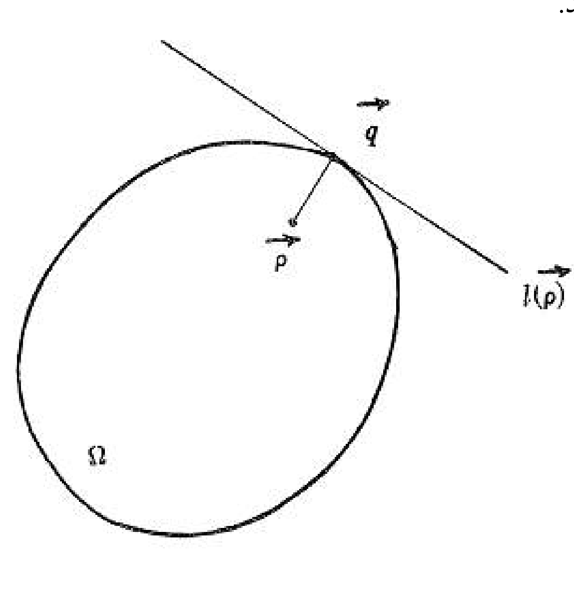
(ب) $\sum_{n=۱}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \sim \frac{c}{t} \qquad t \to ۰$

همان‌طور که خواننده متوجه شده، اثبات بالا فاصله‌ی زیادی با یک اثبات دقیق ریاضی دارد. اما در واقع همین اثبات را می‌توان دقیق کرد. خواننده‌ی علاقه‌مند می‌تواند به مرجع [۱] بخش ۸ مراجعه کند.

همچنین به عنوان یک تمرین آموزنده، خواننده سعی کند طیف یک مستطیل در صفحه را به دست آورده و قضیه‌ی وایل را مستقیماً تحقیق نماید.

شاید تا این‌جا اندکی از هدف اصلیِ مقاله ناامید شده باشید، چرا که با زحمت زیاد، تنها توانستیم مساحتِ یک شکل را از روی طیفِ آن محاسبه کنیم. اما ناامید نباشید، با استفاده از همین ایده می‌توانیم محیط شکل را نیز به دست آوریم. برای سادگی، خود را به Ω های محدب محدود می‌کنیم.

ایده‌ی اصلیِ اثبات قضیه‌ی وایل این بود که برای t های کوچک، مرزِ Ω تأثیر چندانی روی جواب معادله‌ی پخش ندارد. اگر بخواهیم تأثیرِ مرزِ Ω را در جوابِ خود دخیل کنیم انتظار داریم نزدیکترین نقطه به p روی مرز، که آن را q می‌نامیم، بیش‌ترین تأثیر را روی جواب داشته باشد.



اگر l خطی گذرنده از q و مماس بر لبه‌ی Ω باشد، انتظارِ ما این است که در زمان‌های کوچک، مرزِ Ω و خط l تاثیر چندان متفاوتی روی جواب نگذارند یعنی اگر $K_l(t,p,x)$ هسته‌ی حرارتِ مربوط به نیم‌صفحه‌ی با مرزِ l باشد که شامل p است، آنگاه

$$K(t,p,p) \sim K_l(t,p,p) \qquad t \to ۰$$

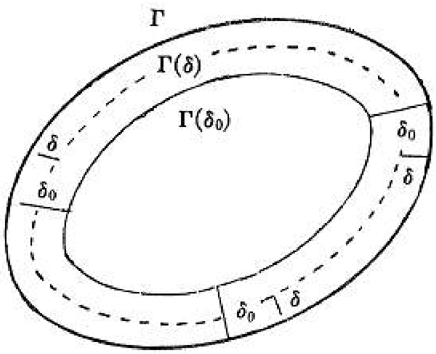
اما جواب معادله‌ی پخش روی نیم‌صفحه شناخته شده است و در واقع

$$K_l(t,p,p) = \frac{۱ - e^{-\frac{۲\delta^۲}{t}}}{۲\pi t}$$

که در آن $\delta = \|p-q\|$. با جایگذاری در (۵) به دست می‌آوریم

$$tr(e^{t\Delta}) \sim \frac{|\Omega|}{۲\pi t} - \frac{۱}{۲\pi t}\int_\Omega e^{-\frac{۲\delta^۲}{t}}dp$$

جمله‌ی اول همان تخمین وایل است. برای بررسی جمله‌ی دوم، $\Gamma(\delta)$ را مجموعه‌ی نقاطی از Ω بگیرید که فاصله‌ی آن‌ها تا مرز برابر δ است. دقت کنید که وقتی $t \to ۰$، تأثیر δهای کوچک در انتگرالِ بالا بیش‌تر از سایر δ هاست. برای δ های کوچک، $\Gamma(\delta)$ یک خم محدب تشکیل می‌دهد، $L(\delta)$ را طول این خم بگیرید.



انتگرالِ بالا را می‌توانیم ابتدا روی $\Gamma(\delta)$ بگیریم و سپس روی δ انتگرال بگیریم که نتیجه می‌دهد برای یک $\delta_۰$ کوچک:

$$\int_\Omega e^{-\frac{۲\delta^۲}{t}}dp = \int_۰^{\delta_۰} e^{-\frac{۲\delta^۲}{t}} L(\delta)d\delta + O(e^{-\frac{۲\delta^۲}{t}})$$

با در ذهن داشتن این شهود که برای $\delta < \gamma$ وقتی $t \to ۰$، $e^{-\frac{۲\gamma^۲}{t}}$ در مقایسه با $e^{-\frac{۲\delta^۲}{t}}$ به صفر میل می‌کند، می‌توان انتظار داشت (و در واقع به طور دقیق هم اثبات می‌شود) که

$$\int_\Omega e^{-\frac{۲\delta^۲}{t}}dp \sim L\int_۰^{\delta_۰} e^{-\frac{۲\delta^۲}{t}}d\delta = \frac{L}{۴}\sqrt{۲\pi t}$$

که در آن $L = L(۰)$ همان محیطِ Ω است. پس به دست آوردیم:

$$tr(e^{t\Delta}) \sim \frac{|\Omega|}{۲\pi t} - \frac{L}{۴}\frac{۱}{\sqrt{۲\pi t}} \qquad t \to ۰ \qquad (۶)$$

پس توانستیم از روی طیفِ Ω، محیطِ آن را نیز به دست آوریم.

رابطه‌ی (۶) در واقع دقت تقریبِ فرمول وایل را که $o(\frac{۱}{t})$ بود به $o(\frac{۱}{\sqrt{t}})$ ارتقا داد. می‌توان پرسید که آیا می‌توان $tr(e^{t\Delta})$ را با جملاتِ

بیش‌تری تقریب زد تا دقت تقریب بالاتر رود. جواب مثبت است. در واقع می‌توان نشان داد که حتی اگر Ω لزوماً همبند ساده هم نباشد (یعنی می‌تواند سوراخ داشته باشد)، آن‌گاه

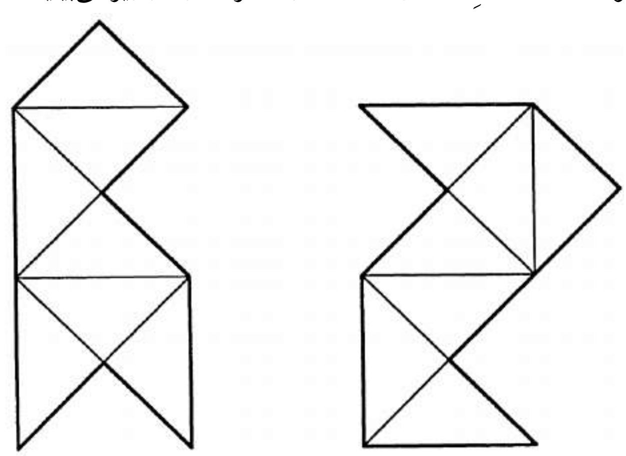
$$tr(e^{t\Delta}) \sim \frac{|\Omega|}{2\pi t} - \frac{L}{4}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} + \frac{1-r}{6} \qquad t \to 0$$

که در آن r تعداد سوراخ‌هاست. پس تعداد سوراخ‌های یک شکل را نیز می‌توان از روی طیف آن به دست آورد.

در بخش بعد خواهیم دید که می‌توان شکل‌هایی ساخت که طیف آن‌ها کاملاً یکی باشد ولی قابل انطباق نباشند. اما در بعضی حالات خاص می‌توان ثابت کرد که طیف، شکل را به طور یکتا مشخص می‌کند. مثلاً اگر یکی از ناحیه‌ها دایره باشد، ناحیه‌ی دیگر نیز باید بر آن قابل انطباق باشد، چون همانطور که گفتیم دو ناحیه باید مساحت و محیط یکسان داشته باشند و از طرفی بنابر نامساوی برابرمحیطی[5] در بین اشکال با محیطِ ثابت، دایره تنها شکلی است که بیش‌ترین مساحت را دارد. یعنی از روی صدایی که یک شکلِ دوبعدی تولید می‌کند، می‌توان تشخیص داد که شکلِ آن دایره هست یا نه.

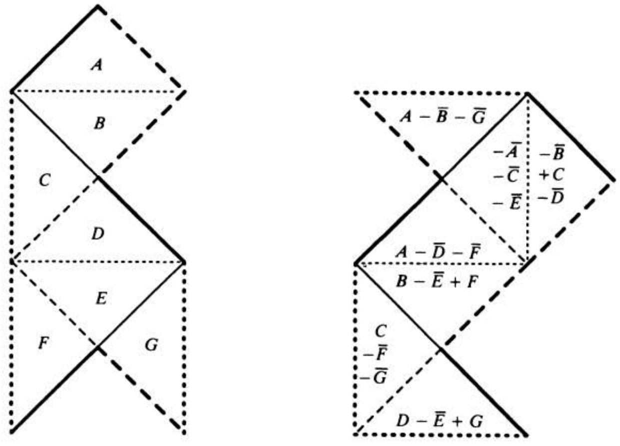
۳ شکل‌های هم‌طیف

آیا شکلِ یک ناحیه از روی طیفِ آن به طور یکتا مشخص می‌شود؟ اولین بار در سال ۱۹۶۶ در مقاله‌ای از مارک کتز[6] این سؤال مطرح شد. حدود ۲۶ سال بعد گُردن و دیگران [۳] جواب منفی به این سؤال دادند. مثالِ ساده‌ای که آن‌ها ارائه کردند را در زیر می‌بینید:



دو ناحیه‌ای که در شکلِ بالا می‌بینید نمونه‌ای از شکل‌های هم‌طیف[7] هستند، یعنی اشکالی که طیف یکسانی دارند ولی قابل انطباق نیستند. دلیل این موضوع را با شکل زیر توضیح می‌دهیم.

[5] Isoperimetric
[6] Mark Kac
[7] Isospectral



(a) (b)

در واقع روشی ارائه می‌دهیم که با استفاده از آن می‌توان هر تابع ویژه از ناحیه‌ی اول را به یک تابع ویژه از ناحیه‌ی دوم تبدیل کرد و برعکس. فرض کنید ϕ تابع ویژه‌ای روی ناحیه‌ی (a) با مقدار ویژه‌ی λ باشد. در شکلِ (b) هر جا که حروفِ A، B، ...، G را دیدید، به جای آن مقدارِ تابعِ ϕ را در نقطه‌ی متناظر روی مثلث مربوطه از شکلِ (a) (در صورت لزوم با یک دوران در صفحه) جایگزین کنید و هر جا حروفِ $\bar{A}$، $\bar{B}$، ...، $\bar{G}$ را دیدید ابتدا مثلثِ مربوطه را نسبت به محور تقارنش انعکاس بدهید و سپس آن را جایگزین کنید.

با چک کردن ضلع‌های مثلث‌ها، می‌توان دید که تابع ψ که به این صورت روی ناحیه‌ی (b) ساخته می‌شود روی مرز صفر است و در داخل پیوسته است. همچنین روشن است که ψ در داخل هر یک از مثلث‌ها هموار است و در معادله‌ی $\Delta\psi = \lambda\psi$ صدق می‌کند. قضیه‌ای از آنالیز تضمین می‌کند چنین تابعی حتماً روی مرز مشترک مثلث‌ها نیز هموار است و در واقع روی کلِ ناحیه‌ی (b)، تابع ویژه‌ای از عملگرِ لاپلاس با مقدار ویژه‌ی λ است.

خواننده‌ی علاقه‌مند می‌تواند در مرجعِ [۲] روشی بر مبنای کاغذ و تا برای به دست آوردن این مثال و همچنین مثال‌های دیگری از شکل‌های هم‌طیف را ببیند.

۴ ابعاد بالاتر و خمینه‌ها

اکنون که به اهمیت عملگر لاپلاس و طیفِ آن در مطالعه‌ی ناورداهای هندسی اشکال دوبعدی در صفحه پی بردیم، می‌توان پرسید که آیا این مفاهیم قابل تعمیم به ابعاد بالاتر و نیز به خمینه‌ها هستند؟

تعمیم طبیعیِ عملگر لاپلاس به خمینه‌های ریمانی (یعنی خمینه‌هایی که مجهز به یک متریک ریمانی شده‌اند)، عملگر لاپلاس-بلترامی است:

$$\Delta_M f = div(grad(f))$$

اگر M یک خمینه‌ی d بعدی فشرده (که ممکن است دارای لبه نیز باشد) با یک متریک ریمانی باشد، همانند اشکالِ دو بعدی، جواب‌های $\Delta u + \lambda u = 0$ با شرطِ مرزیِ صفر را توابعِ ویژه و λهای متناظر را مقادیر ویژه یا طیفِ Δ_M گوییم. ثابت می‌شود که طیف یک دنباله‌ی $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \to \infty$ تشکیل می‌دهد و توابع ویژه‌ی متناظر آن‌ها توابعی هموار هستند و یک پایه‌ی متعامد یکه برای $L^2(M)$ تشکیل می‌دهند.

سؤال بخش‌های قبل را می‌توان تکرار کرد. چه اطلاعات هندسیِ خمینه‌ی M را می‌توان با استفاده از طیفِ آن به دست آورد؟ خصوصاً این‌که رفتار مجانبیِ طیف شامل چه اطلاعات هندسی است؟ روش هسته‌ی حرارت را می‌توان این‌جا هم به کار برد و نتایجی درباره‌ی رفتار مجانبیِ طیف به دست آورد. از جمله می‌توان تعمیمی از قضیه‌ی وایل را برای خمینه‌های بسته (یعنی فشرده و بدون لبه) ثابت کرد که بر اساس آن اگر $N(\lambda)$ تعداد مقادیر ویژه‌ی کوچکتر از λ باشد، آنگاه وقتی $\lambda \to \infty$،

$$N(\lambda) \sim (2\pi)^{-d}\omega_d Vol(\Omega)\lambda^{\frac{d}{2}}$$

که در آن ω_d حجم گویِ واحد d بعدی است. اثبات مبتنی است بر تخمین مجانبی زیر،

$$tr(e^{t\Delta}) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \sim (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} Vol(M) \qquad t \to 0$$

به طور کلی نشان داده شده است که برای یک خمینه‌ی بسته‌ی M، بسط مجانبی زیر موجود است:

$$tr(e^{t\Delta}) \sim (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \qquad t \to 0 \tag{7}$$

که ضرایب a_k ناورداهای هندسی از M هستند که به طور یکتا توسط طیف M مشخص می‌شوند. a_k ها را اساساً می‌توان به صورت انتگرال‌هایی از انحنای خمینه و مشتقات آن نوشت ولی با زیاد شدنِ k، فرمول‌ها فوق‌العاده پیچیده می‌شوند و تشخیص این‌که a_k چه ناوردای هندسی‌ای را توصیف می‌کند دشوار می‌شود. اما برای k های کوچک این کار دشوار نیست. مثلاً ثابت می‌شود $a_0 = Vol(M)$ (این همان قضیه‌ی وایل است). پس حجمِ M از روی طیف قابل محاسبه است. همچنین روشن است که بعدِ M نیز از روی طیف با توجه به بسطِ (۷) قابل محاسبه است. نیز $a_1 = \frac{1}{6}\int_M s(x)dx$ که $s(x)$ انحنای اسکالر خمینه است. در حالتی که $d = 2$، یعنی M یک رویه‌ی بسته باشد، $s(x)$ همان انحنای گوسی است و بنابر قضیه‌ی گوس-بونه،

$$\int_M s(x)dx = 2\pi\chi$$

که χ مشخصه‌ی اویلر M است. پس مشخصه‌ی اویلرِ رویه‌ها از روی طیفِ آن‌ها قابل محاسبه است.

به سؤال اصلی مقاله باز می‌گردیم. آیا طیفِ یک خمینه‌ی ریمانی، هندسه‌ی آن را به طور کامل مشخص می‌کند؟ با توجه به مثالی که در بخش ۳ دیدیم، می‌دانیم جواب در حالت کلی منفی است. اما در بعضی حالات خاص جواب مثبت است. مثلاً ثابت شده است ([۶]) که کره‌ها و فضاهای افکنشی با بعدِ کم‌تر از ۷ توسط طیفشان به طور یکتا مشخص می‌شوند.

در واقع سال‌ها پیش از کشف مثالی که در بخشِ ۳ بیان کردیم این دانسته شده بود که خمینه‌هایی (با بعدِ بیش از ۲) وجود دارند که طیفشان یکسان است ولی با یک‌دیگر ایزومتر نیستند. چنین خمینه‌هایی را هم‌طیف گویند. اولین مثال از خمینه‌های هم‌طیف را جان میلنُر[۸] ارائه کرد. خمینه‌های او در کلاسِ خاصی از خمینه‌ها بودند که ارتباط با یک مسأله‌ی نظریه اعدادی شناخته شده داشتند. بعداً سونادا[۹] مثالی کلی‌تر ارائه کرد که روشی سیستماتیک برای ساخت خمینه‌های هم‌طیف در اختیار می‌گذاشت.

این مقاله را با ارائه‌ی مثال سونادا به پایان می‌بریم. ایده‌ی اصلی سونادا این مشاهده بود که هسته‌ی حرارتِ یک خمینه‌ی ریمانی ارتباط نزدیکی با هسته‌ی حرارت فضای پوششی آن دارد. ابتدا مفاهیمی از فضای پوششی را مرور می‌کنیم.

فرض کنید $\phi : \tilde{M} \to M$ یک پوشش باشد، یعنی هر نقطه از M یک همسایگی U دارد که $\phi^{-1}(U)$ اجتماعی از بازهایی مجزا است که ϕ روی هر یک از آن‌ها یک همسانریختی به U می‌دهد. در چنین صورتی یک متریک ریمانی روی M را می‌توان به $\tilde{M}$ انتقال داد به طوری که ϕ موضعاً ایزومتری باشد. گروه بنیادی $\tilde{M}$، $\pi_1(\tilde{M})$، توسط ϕ به طور یک به یک به زیرگروهی از $\pi_1(M)$ نگاشته می‌شود که از این پس منظورمان از $\pi_1(\tilde{M})$ همین زیرگروه خواهد بود. ثابت می‌شود که $\tilde{M}$ به طور یک‌تا توسطِ $\pi_1(\tilde{M})$ مشخص می‌شود. اگر این فرض را نیز اضافه کنیم که $\pi_1(\tilde{M})$ زیرگروهی نرمال از $\pi_1(M)$ باشد، آن‌گاه می‌توان دید که گروهِ $G = \frac{\pi_1(M)}{\pi_1(\tilde{M})}$ روی $\tilde{M}$ به صورتِ ایزومتری عمل می‌کند و M خارج قسمتِ $\tilde{M}$ تحت عملِ این گروه است. در این حالت ϕ را یک پوشش نرمال برای M و G را گروه پوششی گویند.

لم ۳. *اگر $\tilde{M}$ پوشش نرمالِ M باشد،*

$$K_M(t,x,y) = \sum_{g \in G} K_{\tilde{M}}(t,\tilde{x},g.\tilde{y}) \tag{8}$$

که در آن $\tilde{x}$ و $\tilde{y}$، نقاطی از $\tilde{M}$ هستند که x و y را می‌پوشانند.

اثبات. هسته‌ی حرارتِ M توسط دو شرطِ زیر به طورِ یکتا مشخص می‌شود،

[۸] John Milnor
[۹] Sunada

(الف) $\frac{\partial}{\partial t}K_M(t,x,y) = \Delta_y K_M(t,x,y)$

(ب) $K_M(0,x,y) = \delta_x(y)$

اکنون با توجه به ایزومتری بودنِ عملِ G، روشن است که عبارت سمت راستِ (۸) هر دو شرطِ بالا را دارد. $\square$

با قرار دادنِ $y=x$ در (۸) و انتگرال‌گیری روی M داریم

$$\begin{aligned} tr(e^{t\Delta_M}) &= \int_M K_M(t,x,x)dx \\ &= \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}\int_{\tilde{M}} K_{\tilde{M}}(t,\tilde{x},g.\tilde{x})d\tilde{x} \end{aligned} \quad (9)$$

اکنون ادعا می‌کنیم عبارت سمت راست وقتی g را با مزدوجش hgh^{-1} عوض کنیم تغییر نمی‌کند زیرا

$$\int_{\tilde{M}} K_{\tilde{M}}(t,\tilde{x},hgh^{-1}.\tilde{x})d\tilde{x} = \int_{\tilde{N}} K_{\tilde{M}}(t,h^{-1}.\tilde{x},gh^{-1}.\tilde{x})d\tilde{x}$$

با تغییر متغیر $\tilde{x} \to h^{-1}.\tilde{x}$ به دست می‌آید

$$= \int_{\tilde{M}} K_{\tilde{M}}(t,\tilde{x},g.\tilde{x})d\tilde{x}$$

بنابراین می‌توانیم (۹) را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\int_M K_M(t,x,x)dx = \sum_{[g]}\frac{\#[g]}{\#G}\int_{\tilde{M}} K_{\tilde{M}}(t,\tilde{x},g.\tilde{x})d\tilde{x}$$

که در آن $[g]$ کلاس تزویجیِ g در G است.

اکنون نموداری از فضاهای پوششی به شکل زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{tikzcd} \tilde{M} \arrow[d, "H"] \arrow[dd, bend left, "G"] \\ M_1 \arrow[d] \\ M_0 \end{tikzcd}$$

بنابر آنچه گفته شد:

$$tr(e^{t\Delta_{M_1}}) = \sum_{[h]}\frac{\#[h]}{\#H}\int_{\tilde{M}} K_{\tilde{M}}(t,\tilde{x},h.\tilde{x})d\tilde{x} \quad (10)$$

اکنون دقت کنید که اگر h و h' در G مزدوج باشند، به دلیل ایزومتری بودنِ عملِ G:

$$\int_{\tilde{M}} K_{\tilde{M}}(t,\tilde{x},h.\tilde{x})d\tilde{x} = \int_{\tilde{M}} K_{\tilde{M}}(t,\tilde{x},h'.\tilde{x})d\tilde{x}$$

بنابر این می‌توان (۱۰) را به این صورت نوشت:

$$tr(e^{t\Delta_{M_1}}) = \sum_{[g]\in G}\frac{\#([g]\cap H)}{\#H}\int_{\tilde{M}} K_{\tilde{M}}(t,\tilde{x},g.\tilde{x})d\tilde{x} \quad (11)$$

اهمیت (۱۱) در این است که انتگرالِ سمت راست آن به G و نه به H بستگی دارد.

اکنون نمودار زیر از فضاهای پوششی را در نظر بگیرید:

$$\begin{tikzcd} & \tilde{M} \arrow[dl, "H_1"'] \arrow[dr, "H_2"] \arrow[dd, "G"] & \\ M_1 \arrow[dr] & & M_2 \arrow[dl] \\ & M_0 & \end{tikzcd}$$

اگر (۱۱) را در موردِ M_1 و M_2 به کار ببریم، نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود:

نتیجه ۴. *فرض کنید*

$$\forall g\in G, \qquad \#([g]\cap H_1) = \#([g]\cap H_2) \qquad (12)$$

آن‌گاه M_1 و M_2 هم‌طیف هستند.

اکنون فرض کنید G گروهی متناهیاً تولید شده باشد. در این صورت بنابر قضیه‌ای در توپولوژیِ خمینه‌ها، G گروه بنیادیِ یک خمینه‌ی فشرده M_0 است. $\tilde{M}$ را فضای پوششی جهانی [۱۰] M_0 بگیرید. حال فرض کنید H_1 و H_2 زیرگروه‌هایی از G باشند که در رابطه‌ی (۱۲) صدق می‌کنند. M_1 و M_2 را فضاهای پوششیِ M_0 با گروه‌های بنیادیِ H_1 و H_2 بگیرید. سپس یک متریک ریمانی روی M_0 قرار دهید و آن را به طور طبیعی به M_1 و M_2 و $\tilde{M}$ انتقال دهید. بنابر نتیجه‌ی بالا، M_1 و M_2 هم‌طیف هستند. فقط باقی می‌ماند که نشان دهیم با یک‌دیگر ایزومتر نیستند.

دقت کنید که اگر H_1 و H_2 در G با یک‌دیگر مزدوج باشند، آن‌گاه M_1 و M_2 ایزومتر خواهند بود و این ایزومتری از عملِ یکی از عناصرِ G به دست می‌آید و بر عکس. بنابر این اگر H_1 و H_2 با یکدیگر مزدوج نباشند مطمئن هستیم که M_1 و M_2 تحتِ ایزومتری‌های G با یک‌دیگر ایزومتر نیستند. از طرفی با توجه به آزادی‌ای که در انتخابِ متریکِ M_0 داریم، می‌توانیم این متریک را آن‌قدر کج و کوله انتخاب کنیم که M_1 و M_2 ایزومتری‌هایی خارج از G نداشته باشند. در نتیجه M_1 و M_2 کلاً ایزومتر نخواهند بود.

بنابراین تنها چیزی که می‌ماند ارائه‌ی مثال‌هایی از چنین گروه‌هایی است. در مرجع [۴] مثال‌های مختلفی ارائه شده که یکی از آن‌ها را می‌آوریم.

---

[۱۰] Universal Covering

مثال. گروهِ $\mathbb{Z}_8 \rtimes \mathbb{Z}_8^*$ که عبارت است از ضرب نیمه مستقیمِ $\mathbb{Z}_8$ و گروهِ ضربیِ $\mathbb{Z}_8^*$ و طبق تعریف، تشکیل شده است از زوج‌های (a, b) که $b \in \mathbb{Z}_8$ و $a = 1, 3, 5, 7$ با عملِ ضربِ

$$(a, b).(a', b') = (aa', a'b + b')$$

به راحتی می‌توان تحقیق کرد که زیرگروه‌های

$$H_1 = \{(1, 0), (3, 0), (5, 0), (7, 0)\}$$

و

$$H_2 = \{(1, 0), (3, 4), (5, 4), (7, 0)\}$$

در رابطه‌ی (۱۲) صدق می‌کنند و با یک‌دیگر مزدوج نیستند. پس با استفاده از آن‌ها می‌توان خمینه‌هایی ساخت که هم‌طیف هستند ولی ایزومتر نیستند.

در مرجعِ [۴] با استفاده از ایده‌ی بالا، مثال‌هایی از رویه‌های بسته با گونه‌ی $g \leq 4$ آورده شده است که هم‌طیف هستند ولی ایزومتر نیستند.

مراجع

[1] Kac, Mark. ”Can one hear the shape of a drum?.” The american mathematical monthly 73.4 (1966): 1-23.

این مقاله با عنوان *آیا می‌توان شکل طبل را شنید؟* در مجله‌ی نشر ریاضی، سال ۷ شماره ۲ به فارسی برگردانده شده است.

[2] Chapman, S. J. ”Drums that sound the same.” The American mathematical monthly 102.2 (1995): 124-138.

این مقاله با عنوان *طبل‌های هم‌صدا* در مجله‌ی نشر ریاضی، سال ۷ شماره ۲ به فارسی برگردانده شده است.

[3] Gordon, Carolyn, David L. Webb, and Scott Wolpert. ”One cannot hear the shape of a drum.” Bulletin of the American Mathematical Society 27.1 (1992): 134-138.

[4] Brooks, Robert. ”Constructing isospectral manifolds.” American Mathematical Monthly 95.9 (1988): 823-839.

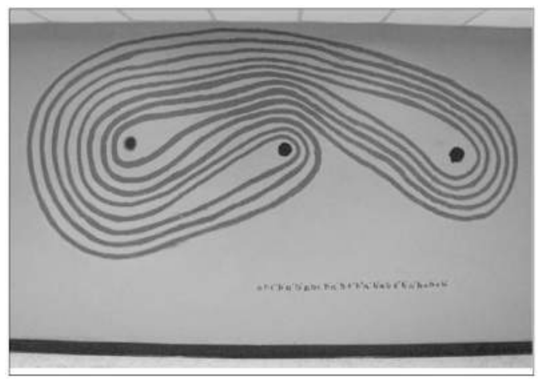
[5] Rosenberg, Steven. The Laplacian on a Riemannian manifold: an introduction to analysis on manifolds. Vol. 31. Cambridge University Press, 1997.

[6] Spectral geometry. Mircea Craioveanu (originator), Encyclopedia of Mathematics. URL: http://www.encyclopediaofmath.org /index.php?title=Spectral_ geometry& oldid=15528

رد قطار چیست؟ [1]

لی موشر
ترجمه: علی کمالی‌نژاد

ردهای قطار، روی رویهٔ S، خم‌های بسته ساده را همان گونه تقریب می‌زنند که خارج قسمت‌های جزئی کسرهای مسلسل، عددهای گویا را تقریب می‌زنند. روی کره ۴-سوراخه، خم بسته ساده شکل ۱ که در حدود سال ۱۹۷۲، توسط ویلیام پ. ترستن و دنیس سالیوان روی دیوار گروه ریاضی دانشگاه برکلی ترسیم شده است، به وسیلهٔ رد قطار نمایش داده شده در شکل ۲، تقریب زده می‌شود.

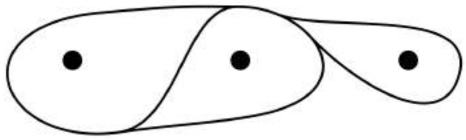


شکل ۱: تصویر کشیده شده روی دیوار تالار ایونس دانشگاه برکلی

برای تجسم این تقریب، چشمان خود را به گونه‌ای تار کنید که رشته‌های موازی خم مورد نظر، در شاخه‌های رد قطار ادغام و رشته‌های دور شونده در محل تعویض‌های رد قطار، جدا شوند. ردهای قطار توسط ترستن در اواخر دهه ۱۹۷۰ به عنوان یک ابزار مطالعهٔ خم‌های بسته ساده و ساختارهای مرتبط با آن‌ها روی رویه‌ها، معرفی شدند.

در حالت کلی رویه S باید از نوع متناهی باشد— یک رویه فشرده، همبند، جهت‌دار، احیاناً با تعدادی متناهی سوراخ. خم‌های بسته ساده روی S که مطالعه می‌کنیم، آن‌هایی هستند که اساسی‌اند، به این معنی که هر قرصی که توسط آن‌ها محدود می‌شود، حداقل دارای دو سوراخ است. دو خم بسته ساده اساسی، یکسان در نظر گرفته می‌شوند، هرگاه روی S ایزوتوپ باشند، که یعنی، از طریق خم‌های بسته ساده، هوموتوپ باشند.

[1] L. Mosher, *What Is...A Train Track?,* Notices of the American Mathematical Society. Volume 50(2003), Number 3(March), 354-356.
لی موشر مدیر گروه ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه راتگرز است. آدرس رایانامه او عبارت است از mosher@andromeda.rutgers.edu.



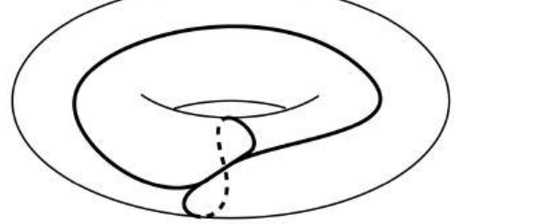
شکل ۲: مثالی از یک رد قطار روی یک کره ۴-سوراخه

یک رد قطار روی S، یک ۱-مجتمع هموار τ است که رأس‌هایش تعویض و یال‌هایش شاخه نامیده می‌شوند، به طوری که در هر تعویض s، خط مماس یکتایی وجود دارد و s در τ همسایگی بازی دارد که اجتماعی است از کمان‌های باز که به صورت هموار نشانده شده‌اند. C، تکمیل شده متریکی هر کدام از مؤلفه‌های $S-\tau$، رویه‌ای با تیزه است که "شاخص اویلر تیزه‌دار" آن باید منفی باشد، یعنی، $\chi(C) - \frac{1}{2}\#(\text{تیزه‌ها}) < 0$. شرط آخر چندین امکان را برای C ممنوع می‌کند: قرصی بدون تیزه و $\leqslant 1$ سوراخ، قرصی بدون سوراخ با یک یا دو تیزه و طوقی بدون تیزه و سوراخ. برخی اوقات این شرایط کمی تقلیل داده می‌شوند تا اجازه دهند C یک دوضلعی، یعنی یک دیسک بدون سوراخ با دو تیزه، باشد که دارای شاخص اویلر تیزه‌دار صفر است. در حقیقت، روی یک چنبره، باید دوضلعی‌ها را بپذیریم چرا که در غیر این صورت ردهای قطار وجود نخواهند داشت.

یک خم بسته ساده γ به وسیله رد قطار τ حمل می‌شود اگر بتوان γ را ایزوتوپ شده به توی همسایگی به اندازهٔ دلخواه کوچک τ در نظر گرفت به طوری که هر خط مماس γ به اندازه دلخواه نزدیک یک خط مماس τ باشد. این شرط که هر مؤلفهٔ تکمیل شده $S-\tau$ دارای شاخص اویلر تیزه‌دار منفی (یا یک دوضلعی) باشد، نتیجه می‌دهد که هر خم بسته ساده حمل شده توسط τ روی S اساسی است. بیان این که یک خم بسته ساده به وسیلهٔ یک رد قطار حمل می‌شود مشابه بیان آن است که یک عدد گویا به وسیله یک خارج‌قسمت جزئی کسری مسلسل تقریب زده می‌شود. روی چنبره $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ این شباهت، همان گونه که اکنون شرح می‌دهیم، بسیار صریح است.

در حد ایزوتوپی، خم‌های بسته ساده روی $\mathbb{T}^2$ در تناظری یک به یک با گویاهای منبسط $\mathbb{Q}\cup\{\infty\}$ قرار دارند— یک عدد گویای r متناظر است با یک خم بسته ساده γ_r که به خطی در $\mathbb{R}^2$ بالا برده می‌شود که دارای شیب r است. رد قطار پایه $\tau_{[0,\infty]}$ روی $\mathbb{T}^2$ که در شکل ۳ نمایش داده شده است، از $\gamma_0\cup\gamma_\infty$ با تخت کردن زاویه‌ها در نقطه تقاطع مورب $\gamma_0\cap\gamma_\infty$ تا زمانی که این نقطه، خط مماس یکتایی با شیب مثبت داشته باشد، به دست می‌آید. رد قطار $\tau_{[0,\infty]}$ یک دوضلعی دارد و $\tau_{[0,\infty]}$ دقیقاً خم‌های بسته ساده γ_r با $0 \leqslant r \leqslant \infty$ را حمل می‌کند. به طور کلی، فرض کنید اعداد صحیح $a,b,c,d > 0$ به گونه‌ای باشند که $ad-bc=1$. اعداد گویای $p=\frac{c}{d} < \frac{a}{b} = q$ خم‌های بسته ساده γ_p و γ_q را روی $\mathbb{T}^2$ مشخص

می‌کنند که در یک نقطه به طور مورب متقاطع‌اند و می‌توان زاویه‌ها را در این نقطه تخت کرد تا یک رد قطار $\tau_{[p,q]}$ به دست آورد که دقیقاً خم‌های γ_r را با $p \leqslant r \leqslant q$ حمل می‌کند.



شکل ۳: مثالی از یک رد قطار روی چنبره

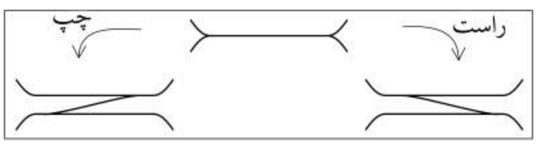
برای ایجاد هر حسی از تقریب، باید بیان کنیم که چگونه می‌توان تقریب را تظریف کرد. در ردهای قطار این کار به وسیله مفهوم شکافتن به انجام می‌رسد. با توجه به رد قطار داده شده τ، نخست مکان شکافتن در τ را در نظر بگیرید که شامل دو رشته τ است که به صورت مماس در یک نقطه و یا در طول یک کمان کوتاه، به یکدیگر می‌رسند، سپس می‌توان یک شکافتن چپ $\tau \succ \tau_L$ و یک شکافتن راست $\tau \succ \tau_R$ را به کمک مدلی که برای شکافتن در شکل ۴ به تصویر کشیده شده است، تعریف کرد. هر خم بسته ساده γ که به وسیله τ حمل شده باشد، توسط یک از τ_L یا τ_R، احتمالاً هر دو، حمل می‌شود و بنابراین می‌توان τ_L یا τ_R را به عنوان تظریف تقریب γ در نظر گرفت.

روی چنبره، اگر با $\tau_{[0,\infty]} = \tau_{[\frac{0}{1},\frac{1}{0}]}$ آغاز کنیم، یک شکافتن چپ، $\tau_{[\frac{1}{1},\frac{1}{0}]} = \tau_{[1,\infty]}$ را و یک شکافتن راست، $\tau_{[\frac{0}{1},\frac{1}{1}]} = \tau_{[0,1]}$ را به دست می‌دهد. به طور کلی، به همان صورت قبل $p = \frac{c}{d} < \frac{a}{b} = q$ را در نظر بگیرید، اگر جمع فری $r = \frac{a+c}{b+d}$ را محاسبه کنید، آنگاه $p < r < q$ و یک شکافتن راست $\tau_{[p,q]} \overset{L}{\succ} \tau_{[r,q]}$ و یک شکافتن چپ $\tau_{[p,q]} \overset{R}{\succ} \tau_{[p,r]}$ وجود دارد. خم بسته ساده γ_r با $r \in [0,\infty]$ را در نظر بگیرید، دنباله‌ای متناهی از شکافتن‌های $\tau_{[0,\infty]} = \tau_0 \succ \tau_1 \succ \cdots \succ \tau_{n-1} \succ \tau_n$ موجود است که در آن زوجیت هر شکافتن (L یا R) به صورت استقرایی به گونه‌ای انتخاب می‌شود که هر τ_i خم γ را حمل کند. این دنباله زمانی که به رد قطار τ_n برسد که شامل نسخهٔ نشانده شده‌ای از γ_r است، متوقف می‌شود. این دنبالهٔ رد قطار، بسط رد قطار خم بسته γ_r نامیده می‌شود. به عنوان مثال بسط رد قطار $\gamma_{10/7}$ به صورت زیر داده می‌شود

$$\tau_{[0,\infty]} = \tau_{[\frac{0}{1},\frac{1}{0}]} \overset{L}{\succ} \tau_{[\frac{1}{1},\frac{1}{0}]} \overset{R}{\succ} \tau_{[\frac{1}{1},\frac{2}{1}]} \overset{R}{\succ} \tau_{[\frac{1}{1},\frac{3}{2}]}$$
$$\overset{L}{\succ} \tau_{[\frac{4}{3},\frac{3}{2}]} \overset{L}{\succ} \tau_{[\frac{7}{5},\frac{3}{2}]} \overset{L}{\succ} \tau_{[\frac{10}{7},\frac{3}{2}]}$$

از روی دنبالهٔ LR این بسط رد قطار — ۱ L، ۲ R، ۳ L — می‌توان به بسط کسر مسلسل رسید $1 + \frac{1}{2+\frac{1}{3}} = \frac{10}{7}$. همچنین، خارج‌قسمت‌های جزئی $\frac{1}{1} = 1$ و $\frac{3}{2} = \frac{1}{2} + 1$ در بسط رد قطار ظاهر شده‌اند. به طور کلی،برای هر عدد گویای $r \in [0,\infty]$، از روی بسط رد قطار γ_r می‌توان خارج‌قسمت‌ها و بسط کسر مسلسل r را به دست آورد: از روی دنبالهٔ RL شامل n_0 L، n_1 R، n_2 L، $\cdots$ و n_k L یا R بسته به این که k زوج است یا فرد، می‌توان بسط زیر را به دست آورد

$$r = n_0 + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{\cdots + \frac{1}{n_k}}}}$$



شکل ۴: شکافتن

واژه‌نامهٔ بین بسط‌های رد قطار و بسط‌های کسر مسلسل را می‌توان بسیار بیشتر توسعه داد. ترستن کشف کرد که به همان ترتیبی که اعداد گویای منبسط $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ را می‌توان به وسیلهٔ فشرده‌سازی که نسبت به عمل خطی کسری گروه مدولی $SL(2,\mathbb{Z})$ طبیعی است، به اعداد حقیقی منبسط $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ کامل کرد، مجموعهٔ رده‌های ایزوتوپی خم‌های بسته ساده اساسی روی یک رویه نوع-منتهی S را می‌توان به وسیلهٔ فشرده‌سازی که نسبت به عمل گروه رده نگاشتی $\mathcal{MCG}(S)$ طبیعی است، به فضای لایه‌بندی‌های اندازه‌دار تصویری $\mathcal{PML}(S)$ کامل کرد [۱]. برخی از نتایج درباره بسط‌های رد قطار لایه‌بندی‌های اندازه‌دار روی S در [۳] شرح داده شده‌اند و شرح همراه با جزئیات این نظریه را می‌توان در [۲] یافت. به عنوان مثال، همان طور که اعداد گنگ به صورت یک به یک متناظرند با کسرهای مسلسل نامتناهی، لایه‌بندی‌های اندازه‌دار تصویری که همگی برگ‌هایشان خم‌های بسته نیستند به صورت یک به یک متناظراند با بسط‌های رد قطار نامتناهی که در برخی شرایط خفیف ترکیبیاتی صدق می‌کنند. همچنین می‌توان از بسط‌های رد قطار استفاده کرد تا خصوصیات ظریف‌تری از یک لایه‌بندی اندازه‌دار مانند "غیرگویایی" را نمایان ساخت، که به این معناست که لایه‌بندی، کل رویه را پر می‌کند.

یکی از کاربردهای این واژه‌نامه، مطالعهٔ رده‌بندی ترستن رده‌های نگاشتی روی S است [۱]. مجموعه نقاطی در $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ که به وسیله عناصر آنوزوف $SL(2,\mathbb{Z})$ ثابت نگه داشته می‌شوند، دقیقاً گنگ‌های درجه دوم هستند، که دقیقاً اعدادی هستند که بسط کسر مسلسل آن‌ها نهایتاً متناوب است. علاوه بر این، این دوره تناوب را می‌توان برای رده‌بندی عناصر آنوزوف $SL(2,\mathbb{Z})$ در حد تزویج، به کار برد. مجموعه نقاطی در $\mathcal{PML}$ که به وسیلهٔ عناصر شبه-آنوزوف $\mathcal{MCG}$ ثابت نگه داشته می‌شوند را می‌توان از طریق رفتار

تناوبی بسط‌های رد قطارشان مشخص کرد و این داده‌های تناوبی را می‌توان برای رده‌بندیِ رده‌های نگاشتی شبه-آنوزوف در حد تزویج، به کار برد.

مراجع

[۱] A. CASSON and S. BLEILER, *Automorphisms of surfaces after Nielsen and Thurston,* London Math. Soc. Student Texts, vol. 9, Cambridge University Press, 1988.

[۲] L. MOSHER, *Train track expansions of measured foliations,* preprint, http://newark.rutgers.edu/ mosher/.

[۳] R. C. PENNER and J. L. HARER, *Combinatorics of train tracks,* Ann. of Math. Stud., vol. 125, Princeton University Press, 1992.

ما و تحقیق ۱

روزبه فرهودی

چکیده

یکی از بحث‌های پردامنه و روز جامعه علمی ایران، ترسیم یک نقشه جامع پژوهشی است. این که سیاست علمی چگونه باشد و یا لزوم تخصصی شدن در زمینه‌ی خاص و برنامه‌ریزی برای خروجی‌های هدفمندتر مسایلی هستند که مطمئناً حواشی متنوعی همراه خود دارند. در این راستا یکی از میزگردهایی که آبان ماه سال گذشته (۱۳۹۱) در برنامه مجله شفاهی دانشکده ریاضی برگزار شد، درباره نحوه تحقیق کردن در دنیای ریاضی بخصوص در دوره‌های ارشد و دکتری بود. این مسأله چالشی جدی برای طرح هرگونه مسأله بعدی است زیرا در دنیای امروز عیار هر موسسه تحقیقاتی بیشتر از هر چیز دیگری، تحقیق و خروجی‌های تحقیقاتی آن است. مجری این برنامه دکتر اصفهانی‌زاده و مهمان آن دکتر مهرداد شهشهانی بودند که نظرات و تجربیات خودشان را در میان گذاشتند. البته همان طور که روال هر میزگردی است، افراد مختلفی هم نظرات و مسایل خود را بیان کردند. در پایان ذکر این نکته ضروری است که به علت پیچیدگی پیاده‌سازی سخن‌رانی و گاهی کم و زیاد کردن‌های ادبی، این نوشته به طور کامل بازتاب کننده تمام مناظرات نیست.

اصفهانی‌زاده: اوایل این جلسه دکتر علیشاهی سخنانی گفتند که فلسفه این نشست را تا حدودی روشن می‌کند. در دانشکده ریاضی مخاطب‌های اصلی مجله شفاهی اساتید دانشکده، دانشجویان دوره دکتری و تحصیلات تکمیلی و دانشجویان علاقه‌مند هستند و مهمترین دغدغه این افراد مسایل پژوهشی است، بگونه‌ای که این مسایل حتی مسایل آموزشی را تحت شعاع قرار می‌دهد. نه تنها برای دانشجویان، که برای اساتید هم مسأله پژوهش هنوز مسأله‌ای غیر بدیهی است و از این جهت اختصاص دومین نشست مجله شفاهی به مسایل پژوهشی انتخاب خوبی به نظر می‌آید. علاوه بر این، از آن‌جا که این مسایل به زودی حل نمی‌شوند و احتمالاً جلساتی در آینده هم لازم خواهند بود، دلیل خوبی است که اسم جلسه را بگذاریم ما و تحقیق شماره یک. مهمان این نشست آقای دکتر شهشهانی، انتخاب مناسبی هستند از این جهت که از استانداردهای ریاضی کاملاً خبر دارند. زیرا به نظر من ریاضیات و به خصوص ریاضیات محض ماهیتاً رشته‌ای بین‌المللی هست و حتی اگر شما در این‌جا هم کار کنید، کیفیت کار شما نهایتاً در سطح بین المللی سنجیده می‌شود. بنابراین بحث را با دکتر شهشهانی شروع می‌کنیم. آقای دکتر آیا شما مقدمه‌ای برای بحث دارید؟

شهشهانی: قبل از آن بیشتر مشخص کنید که دقیقاً راجع به چه چیزهایی می‌خواهیم صحبت کنیم.

اصفهانی‌زاده: ببینید به نظر شما کسانی که در ایران کار تحقیقاتی می‌کنند مثلاً دانشجویان دکتری، استاندارد کارشان باید در چه سطح باشد؟ به کجا باید نگاه بکنند؟ چه در کوتاه مدت برای فارغ‌التحصیلی و چه در بلند مدت در دوره استادی؟

زنگنه: من فکر می‌کنم حتی سوأل بنیادی‌تر این هست که شما چه نقدی بر تحقیق در ایران دارید؟ و آسیب‌شناسی کار تحقیقاتی در ایران چیست؟

اصفهانی‌زاده: تعدادی سوأل در دست من هست، از جمله این سوأل دکتر زنگنه و این که تحقیق چگونه باید باشد یا لزوماً هر تحقیقی به انتشار مقاله منجر می‌شود؟ چقدر نوشتن مقاله مهم است؟ چه وقت زمان مناسب برای نوشتن مقاله هست؟ و این که کار تحقیقاتی مناسب ریاضی چه چیزی است؟

شهشهانی: ببینید، جواب کلی نمی‌شود داد. ولی اول سعی کنید به یک فیلد خاص توجه کنید. در هر فیلد یک سری مسایل و موضوعاتی جالب هستند، به آن‌ها نگاه کنید و دنبالشان را بگیرد و انتظار هم نداشته باشید فوری به نتیجه برسید. باید فیلد را بفهمید و فهمیدن یک فیلد هم وقت می‌برد. طول می‌کشد تا آدم مسایل فیلد را درست بفهمد و برای همه آدم‌ها هم همین‌طور است. هرچند یک مسأله جدی این وسط هست که باید هرچه زودتر یک مقاله بنویسید. ولی به نظر من اگر از این جهت بروید، بیشتر آدم‌هایی که قوی هستند، موفق هم می‌شوند. چیز دیگری که من به نظرم می‌رسد درست هست این که، روی یک مسأله خیلی خاص و بی‌ربط فکر نکنید. مسایل اینجا، مسایل المپیاد نیست. یک فیلد هست

که می‌خواهند یک چیزی را بفهمند و این مسایل باید با تشخیص و نظر خودتان جالب باشد. علاوه بر این نترسید که راحت نظر دهید. ممکن است نظرتان غلط باشد. اگر در مورد یک موضوع نظر بدهید و بعداً بفهمید نظرتان غلط هست، طبیعتاً نظرتان را عوض می‌کنید ولی اگر نخواهید راحت نظر دهید و مستقل راجع موضوع فکر کنید، احتمال اینکه حرفتان اشتباه در آید، خیلی بیشتر می‌شود. فکر خودتان را بکنید و بگویید من از این رشته خوشم می‌آید، این جور چیزها را دوست دارم، مسایل مختلفی اطرافش است و می‌خواهم این رشته را بفهمم. درضمن اگه فیلدتان خیلی بزرگ باشد کار کردن خیلی سخت می‌شود و درنتیجه باید یاد بگیرید یک کم متمرکز شوید، برای این که تا روی یک موضوع تمرکز نکنید نتیجه‌ای بدست نمی‌آورید. بنابراین در همان جهتی که دوست دارید، مشخص کنید که من نهایتاً به فلان مسأله خیلی علاقه‌مندم منتها از اول نمی‌توانم آن را حل کنم. پس سعی می‌کنم همیشه به آن فکر کنم، یک مقدار به حواشی آن فکر کنم، مسایل مرتبط با آن و چیزهایی که شبیه آن هستند را حل کنم. همیشه یک مولفه تصادف هم در کار است و نمی‌توان پیش‌بینی کرد که چه زمانی ممکن است راه حل مسأله به ذهنتان برسد. نهایتاً در کارتان خیلی جدی و با طمأنینه باشید و به آنچه فکر می‌کنید ایمان داشته باشید. هر شخصی در وهله اول باید کار خودش را، خودش صادقانه نقد کند.

اصفهانی‌زاده: یعنی شما می‌گویید بهتر است از اول به طور مشخص روی یک مسأله خاص فکر نکنیم؟

شهشهانی: ببینید من فکر می‌کنم بهتر است یک دانشجوی دکتری قبل از این که روی یک مسأله خاص فکر کند، فیلدی مورد علاقه‌اش را به تدریج محدود کند و در آن فیلد کم‌کم مسأله بخصوصی را حل کند. مسأله خیلی خاص حل کردن اشکالش این هست که بعد از این که حل شد باید دنبال یک مسأله جدید برای حل کردن گشت. این اتفاق خوب نیست رخ دهد. من دیدم این اتفاق برای آدم‌های خیلی باهوش افتاده و واقعا زندگیشان را بهم ریخته، چون در یک فیلد نبودند که بتوانند کارشان را ادامه بدهند و تنها یک مسأله خاص حل کردند. پس یک زمینه مشخص را در نظر بگیرید و طوری به آن وارد بشوید که در آن بتوانید مرتب مسایل جدید مطرح کنید و یکی یکی دنبالشان را بگیرید.

اصفهانی‌زاده: ولی فرض کنید یک دانشجو توصیه شما را عملی می‌کند و بدون این که مسأله خاصی داشته باشد، یک فیلدی رو دنبال می‌کند تا سوألات جالبی به ذهنش برسد و روی آن‌ها فکر کند. سوأل من این هست که آیا این کار شانس اتمام به موقع تز دکترایش را کم نمی‌کند؟

شهشهانی: ببینید گارانتی‌ای نیست ولی معمولا می‌شود. نمونش آقای کمالی نژاد هست که چهار یا پنج سال پیش برای تز دکتری پیش من آمد. البته من معمولاً دانشجویان را ناامید می‌کنم که با من کار کنند برای این که به نظرم، یک آدم نمی‌تواند ایده‌های خیلی متفاوتی داشته باشد و یک کادر فرهنگی بزرگ با افراد بسیار متفاوت نیاز هست تا آدم‌ها را بتواند راهنمایی کند و در موقعیت‌های مناسب قرار دهد. منتها ایشان صحبت کرد و معلوم بود علاقه‌اش به توپولوژی و کارهای ترستن هست. من هم گفتم که این کارها را نمی‌دانم ولی تنها چیز مشترک، ممکن است مسایل مربوط به گراف‌ها روی رویه‌ها و کاربردش در نظریه اعداد و هندسه باشد و مقالاتی به ایشان دادم و ایشان خیلی خوشش آمد. گفتیم اول بیاییم و موضوع را بفهمیم. چیزی که اول کار روشن بود این بود که خیلی مثال زدن در این رشته سخت هست و گفتیم ببینیم که می‌توانیم مثال خوبی پیدا کنیم تا یک چیزهایی در دستمان بیاید. چیزهایی درست کردیم و الان ایده‌های خوبی داریم تا پیش برویم. هرچند اخیراً با شبیه سازی‌های کاوه حسینی فهمیدیم بعضی قسمت‌ها درست نبوده و باید جهتمان را یک مقدار عوض کنیم. ولی همین طوری یک چیزهایی پیدا می‌شود. با سعی و خطا و آزمایش کردن می‌فهمید چیزهایی درست هست و چیزهایی غلط و اگر شانس بیاورید ممکن هست یک چیز خوب از آن بدست بیاید. به هرحال از اول نمی‌دانید که چقدر خوب می‌شود و سخت هست که پیش‌بینی کنید.

اصفهانی‌زاده: شما خودتان چقدر تاثیر گذار بودید وقتی آقای کمالی نژاد کار می‌کرد؟

شهشهانی: خیلی کم، برای این که اصلا کار زیادی تو این فیلد نشده بود. ببینید من نمی‌توانستم فیلدی که الان داغ هست را بگویم. برای اینکه ما نمی‌توانیم اینجا با گروه‌هایی که در پرینستون، استنفورد و ... نشستند و جدی کار می‌کنند رقابت کنیم. بهتر است که دقیقاً روی مسایلی که آن‌ها فکر می‌کنند، فکر نکنیم. آن‌ها با هم ارتباط دارند، همدیگر را هر روز می‌بینند و من چند سال وقت صرف کنم تازه می‌رسم به جایی که آن‌ها الان هستند. بنابراین اگر ارتباط با آن‌ها نداشته باشیم، این کار ریسک خیلی بزرگی هست و عملاً نمی‌شود رقابت کرد. در این رشته هم فیلد یک طوری به بن بست خورده بود.

چند نفری کارهایی کرده بودند ولی این کارها پیش نرفت. الان که ما چند سال کار کردیم می‌فهمیم چرا پیش نرفت و به دلایل خیلی خوبی هم نتوانسته بودند پیشرفت کنند. ولی خب از اول نمی‌شود پیش‌بینی کرد که چه اتفاقی میافتد.

اصفهانی‌زاده: شما گفتید روی مسایل و برنامه‌هایی که در خارج کار می‌کنند، کار نکنید. میتوانید توضیح بدید دقیقاً چرا؟

شهشهانی: برای این که نمی‌شود. ببینید فرض کنید که مثلاً یک عده‌ای دارند تو پاریس خیلی دقیق و مشخص رو فلان موضوع کار می‌کنند. خب ما نمی‌توانم با آن‌ها رقابت کنم، در نهایت موفق نمی‌شویم. سر خودمان را که نمی‌خواهیم کلاه بگذاریم. آن‌ها یک گروهی‌اند که هر روز همدیگر را می‌بینند و دارند روی آن مسایل کار می‌کنند. ما باید یک زاویه دیگری پیدا کنم. باید یک موضوع دیگری پیدا کنم که به نظر جالب باشد و روی آن کار کنم. عین کار آن‌ها را نکنیم برای این که نمی‌توانیم با آن‌ها رقابت کنیم. اگر ما ایده خودمان را پیش ببریم، کس دیگری هم نمی‌تواند با ما رقابت کند. ببینید به نظر من مهمترین نقش‌ای که یک نفر به عنوان راهنما می‌تواند بکند این هست که جهت‌هایی را پیدا کند که با زمینه‌هایی که آدم‌های دیگر دارند کار می‌کنند متفاوت باشد، یک ایده‌ی جدید در آن باشد.

اصفهانی‌زاده: یعنی شما فکر می‌کنید امیدی هست که در نهایت این کار یک تاثیر جهانی داشته باشد؟

شهشهانی: تنها راهش همین است. و برای همین می‌گویم به آنچه فکر می‌کنید ایمان داشته باشید و کار را خودتان صادقانه نقد کند. وقتی قانع شُدید یک موضوع جالب هست، بروید روش فکر کنید، بروید ببینید چیزی دربارەاش هست یا نه و خیلی هم خوب هست روی آن کار نشده باشد. می‌فهمید موضوع جالبی هست که باید کشف شود و به این شکل فکر کردن هست که به کار شما ارزش می‌دهد. مثلاً ببینید مسأله‌ای که چند نفر از دانشجویان لیسانس اینجا کار کردند و احتمالاً به نتیجه هم می‌رسد، یک مسأله جالبی با منشا فیزیکی بود که من از هوشنگ اردوان شنیدم. هوشنگ الان بازنشسته دانشگاه کمبریج هست و قبلا هم شریف بوده. شما می‌شناختید ایشان را؟

اصفهانی‌زاده: بله.

شهشهانی: ایشان متوجه یک موضوعی شده بود که با این که تا حدی مسأله‌ی ریاضی بود ظاهراً ریاضی‌دان‌ها اصلا متوجه آن نبودند. موضوع این هست که شما فرض کنید یک منبع نور دارید که از نظر مشاهده‌گر حرکت می‌کند و تشعشع دارد ولی سرعت حرکتش از سرعت نور بیشتر هست. البته این موضوع ربطی به نسبیت ندارد و حتی در آزمایشگاه هم می‌شود انجام داد. چیزی که اردوان ثابت کرده بود این بود که وقتی این منبع حرکت می‌کند در یک جهت‌هایی افت انرژی تشعشع[1] آن خیلی کمتر از مقداری است که انتظار داریم. افت انرژی وقتی منبع سرعت ندارد، $\frac{1}{r^2}$ می‌شود چون متناسب با سطح کره است ولی وقتی سرعت بیشتر از سرعت نور باشد، در یک جهت‌هایی یافت انرژی به صورت $\frac{1}{r}$ خواهد شد. اردوان گفت هرچه گشتم هیچ کس نبود که در ریاضی متوجه این موضوع باشد و خودش توانسته بود با ترفندهای ریاضی جالبی این را ثابت کند. در واقع از یک روش هادامارد برای رفع ابهام بینهایت[2] استفاده کرد و تعدادی انتگرال بدست آورد که همگرا نیستند ولی با روش هادامارد به این‌ها معنی داده بود. همین‌ها البته بعداً در نظریه میدان‌های کوانتمی هم پیش آمده بود. این ترفند در معادلات دیفرانسیل پاره‌ای هم به شکل دیگری به کار می‌رود. اردوان به این انتگرال‌های واگرا یک عدد معقول نسبت داد که بعداً فهمیدند که این عدد مصنوعی نیست و معنی فیزیکی هم دارد و حتی جالب هست که این کارها در آزمایشگاه هم انجام شده و همان نتایج بدست آمد. این دانشجوها یک سال و نیم هست که در این موضوع کار می‌کنند و اول مقاله اردوان را خوندند. خواندن مقاله اردوان هم کار ساده‌ای نبود برای اینکه به زبان ریاضی نیست ولی نکته داشت و بعدها که روی آن کار کردند و فهمیده‌اند که چگونه می‌شود آن‌ها را طوری نوشت که هم کلی‌تر باشد و هم روشن‌تر. فکر می‌کنم این روش یک مقدار با روش اردوان فرق دارد هرچند اردوان اولین کسی بود که متوجه این موضوع شد. من فکر می‌کنم یه همچین موضوعی یک پدیده جالب هست و این را می‌شود ادامه هم داد و لیسانس هم بودند دانشجویانی که انجام دادند.

اصفهانی‌زاده: من این نکته رو تاکید کنم که اینجا بحث آزاد است و دانشجویان می‌توانند آزادانه سوأل بپرسند.

علیشاهی: ببخشید من یک سوأل داشتم. دکتر زنگنه از آسیب شناسی آنچه در تحقیق ایران می‌گذرد صحبت کردند، ولی فکر می‌کنم در این کلیت، بحث این جمع نیست چون ما عموماً

[1] Radiation Decay
[2] removable sigularity

دانشجویانی داریم که در ابتدای مسیر تحقیق هستند و با جامعه ریاضی ایران رو به رو نبودند هرچند بعضی از مشکلاتش گریبان‌گیر آن‌ها هم هست ولی به نظرم یک آسیب‌هایی هست که مختص دانشکده ریاضی ماست. شما دانشجویان زیادی را در این سال‌ها مشاهده کردید. فکر می‌کنم عموماً بچه‌هایی که در اینجا دانشجوی دکتری هستند تصوری از تحقیق دارند، مثل هم اینکه شما می‌گویید که یک فیلد را خوب یاد بگیرند. منتها من شاید شخصاً این طوری بودم و دیگرانی هم دیدم که استانداردشان برای یادگرفتن خیلی بالاست. یعنی احساس می‌کنند خیلی چیزهای زیادی رو باید دانست تا وارد پروسه تحقیق بشویم.

شهشهانی: متوجه حرف شما هستم. مسأله این هست که اصلاً یاد گرفتن چی هست؟ آدم هیچ چیزی را از اول کامل یاد نمی‌گیرد مگر اینکه از اول پوآنکاره باشیم که نیستیم. آدم شروع می‌کند، کلیات یاد می‌گیرد و نکات را می‌فهمد و جلو می‌رود. زیاد کتاب خواندن ذهنتان را آشفته می‌کند. خودتان را نکُشید با کتاب خواندن. خلاصه یک کم خودتان فکر کنید راجع به مسأله‌ها، و یواش یواش آدم جزییات رو می‌فهمد. از اول هم نمی‌تواند بفهمد. این که آدم چقدر از جزییات سر در می‌آورد، بستگی به شخص هم دارد، بعضی‌ها سریع فکر می‌کنند و بعضی‌ها کندتر. هیچ کدام هیچ اشکالی هم ندارد. من فکر می‌کنم دانشجویان یک مقدار ترس دارند و اعتماد به نفس لازم را برای اینکه خودشان شروع به فکر کردن روی مسایل کنند را ندارند و یک طوری شما که با تجربه‌تر هستید باید بگوید که نترسید!

علیشاهی: ما خودمان هم همان مشکلات رو داریم. (خنده)

شهشهانی: بنشیند به ایده‌تان فکر کنید، حداکثر غلط از آب در می‌آید، اتفاق بدی که نمی‌افتد. آدم نارحت می‌شود ولی همه اشتباه می‌کنیم و بعدش با صحبت کردن با افراد دیگر درستش می‌کنیم. آن‌ها هم نگاه می‌کنند و نقد می‌کنند و سعی می‌کنند بفهمند و یک نکته‌های جدیدی را متوجه می‌شوند و بالاخره کار پیش می‌رود. نترسید از این که اشتباه کنید و فقط هم قضیه، اثبات، قضیه، اثبات، نخوانید. یک کم فاصله بگیرد از موضوعی که دارید کار می‌کنید و ببینید تصویر کلی چه شکلی هست. باید کارتان معنا دار باشد و البته فرمول کلی هم ندارد، با تجربه آدم حس می‌کند مقصود چیست. نزدیک چهل سال پیش من هم سن شما بودم و الفورس[۳] که انسان خیلی مهربانی بود به من گفت:"ببین تحقیق کردن در ریاضی یعنی تو باید با مسایل و فیلدی که کار می‌کنی آنقدر زندگی کنی تا حلش کنی"[۴]. به تدریج یک چیزهایی رو متوجه می‌شوید و یک مقدار هم شانسی است تا آدم روی موضوعی که فکر می‌کند به یک مسأله بر بخورد که عده زیادی در دنیا به آن علاقه‌مند باشند ولی به آن برنخورده باشند. این تنها راه هست، سعی نکنید خیلی سریع باشید، تلاش کنید تا چیزی را درست و کامل بفهمید.

زنگنه: همان طور که آقای دکتر گفتند، بعضی از مسایل هست که در مراکز علمی فعالانه روی آن‌ها کار می‌کنند. من یادم می‌آید که خانم دکتر زرگری با خانم ژان بلاک[۵] در پاریس روی مسأله‌ای در ریاضیات مالی کار می‌کردند و بعداً دیده بودند دانشجوی خانم الکرویی[۶] همان کار را انجام داده بوده و این در ریاضیات مالی که مسایل خیلی سریع حل و چاپ می‌شوند، جالب نیست. بعد از این تصمیم گرفتند بین دو دانشگاه جلسات هفتگی بگذارند و هرکاری در آن یک هفته می‌کنند به همدیگر بگویند تا هم زمان روی یک مسأله کار نکنند. بنابراین روی همچین مسایل‌ای در ایران نمی‌توانیم کار کنیم چون تا بخواهیم بفهمیم، جلو رفتند. همه تقریباً در یک مسیر قدم بر می‌دارند. مسیر هم تا حدود زیادی مشخص هست. بنابراین تا با آن‌ها تماس بگیریم که این کار شده یا نه، خیلی دیر خواهد شد. در عین حال شما باید به مسأله‌ای که برایتان جالب هست بپردازید، ولی مطلب مهم این است که آن را درست بفهمیم. یک موقع است که مسأله شما همانطور که اشاره شد، یک مسأله خاص و فکری است ولی ادبیاتی غنی حمایتش نمی‌کند. هرچند ممکن است یک فکر خلاق آن را حل کند. در این حالت شما مسأله را که حل کردید باید بروید مسأله دیگری حل کنید. یک موقع است که شما درگیر یک ادبیات غنی علمی در آن حوزه میشوید و این به شما تحقیق کردن به معنای اصیلی‌ای که در دنیا انجام می‌شود را یاد می‌دهد و کمک می‌کند که کار شما به مقدار زیادی پخته شود. مسأله حل کردن هم یک مرزی دارد. یک مرز این قضیه این هست که روی مسأله‌ای خیلی داغ که افراد زیادی در خارج روی آن کار می‌کنند، فکر کنید و مرز دیگر آن این هست که هر مسأله‌ای رو چاپ کنید و این خطرناک هست و بر می‌گردد به همان بحث آسیب‌شناسی تحقیق در ایران. متأسفانه بعضی وقت‌ها دانشجویان در زمینه‌هایی می‌روند که اساساً نیازی به خواندن پیش‌زمینه تحقیقاتی نیست و بعد پایان‌نامه‌ای می‌نویسند که تشکیل شده از چند مسأله جدا از هم.

[۳] Ahlfors

[۴] you have to live with the problem, you live in this field to solve it

[۵] Monique Jeanblanc

[۶] Nicole El Karoui

خوشبختانه در دانشکده ریاضی این‌جا این مشکل را نداریم ولی این یکی از آسیب‌شناسی‌های تحقیق در ایران هست. ما تحقیق‌مان در ایران از نظر تاریخی با بقیه دنیا متفاوت است. ما اولین بار تحقیق را از دوره لیسانس شروع کردیم که آن موقع افراد از تحقیق به عنوان یک کار لوکس که از بقیه کارها متفاوت بود انجام می‌دادند. مقالات، مقالات کوتاه مدت بود. یعنی شما دو سه ماه روی مسأله کار می‌کردید و بعد آن را چاپ می‌کردید. آن زمان که بار اصلی روی آموزش بود این کار ارزشمند بود تا تحقیق را رشد بدهند. ولی یک پایان نامه دکتری معمولاً سه یا چهار سال طول می‌کشد تا به نتیجه برسد و بنابراین یک کار تحقیقاتی دراز مدت است. سنت مسأله کوتاه مدت حل کردن که در ایران مرسوم بود، بعدها که دوره دکتری شروع شد آمد. یعنی مقالات کوتاه مدتی که در دوره‌ای یک کار لوکس و تفریحی حساب می‌شد در دوره دکتری هم به همان شکل انجام شد و چند مسأله که چند ماه بیشتر کار نمی‌بردند به عنوان پایان‌نامه دکتری حساب کردند. ولی کار دوره دکتری، کار طولانی مدت است و می‌توان کاری را که چندین و چند سال طول خواهد کشید دنبال کرد تا احتمالاً کار اصیلتری شود. نکته آخر این که شما وقتی یک مقاله یا کتاب رو می‌خوانید باید بدانید هدفتان چیست. آیا شما می‌خواهید همه مقاله را متوجه شوید یا به سوألی که در ذهنتان هست جواب دهید. بعضی وقت‌ها افردی که خیلی قوی هم هستند درگیر خواندن کامل یک موضوع می‌شوند و این باعث می‌شود که چندان موفق نباشند. بنابراین این دو مرز به نظر من خیلی مهم است. یعنی از یک طرف نه روی مسأله‌هایی که خارج خیلی داغ است وارد رقابت بشویم و نه خیلی در خواندن وسواس به خرج بدهیم، که این قسمت دوم آسیب‌شناسی دانشکده ماست. یکی از دوستان ما که خیلی کار خوب و قوی‌ای کرده بود این دیدگاه رو داشت و فکر می‌کرد باید همه کارهایی که پیش‌نیاز کارش است را کامل بخواند و گفت من باید در منزل این‌ها را بخوانم و وقتی یاد گرفتم بشینم و کار تحقیقاتی کنم و به نتیجه نرسید.

شهشهانی: بی‌نهایت مطلب هست که می‌شود خواند.

زنگنه: بله و در واقع این خطر هست که شخص همه چیز رو بخواهد یاد بگیرد. نکته‌ی جالب در فرهنگ آموزش فرانسه این است که صورت قضایایی را که در چهارچوب تحقیقات روز است خوب آموزش می‌دهند و شما از این به عنوان یک ابزار استفاده می‌کنید. درس‌هاییکه دوستان فرانسوی آمدند و اینجا ارایه دادند به همین شکل بود. من یادم می‌آید شخصاً یکی از قضیه‌هایی که دوست داشتم بفهمم به قضیه نقطه ثابت بِراودر مربوط بود ولی ایده اثباتش انقباض نبود و به یک موضوع پیچیده‌تری که مربوط به بعد نامتناهی بود برمی‌گشت. وقتی این مسأله رو دنبال کردم، دیدم برمی‌گردد به حالت بعد متناهی. بعد از آن، من مدت زیادی وقت گذاشتم که توپولوژی جبری و ... بخوانم تا حالت بعد متناهی را بتوانیم کامل اثبات کنم. در حالی که برای استفاده از آن قضیه اصلاً این چیزها لازم نبود. این دوستان فرانسوی که ما در برنامه‌های کارشناسی ارشد ازشان دعوت کردیم کار خیلی جالب‌شان این بود که صورت قضیه‌های مهم را خیلی خوب آموزش می‌دادند. ولی ما در این جا یاد گرفته ایم که هر چیزی رو کامل یاد بگیریم و قضیه‌ای را که نمی‌توانیم اثبات کنیم نمی‌پذیریم.

شهشهانی: من در تایید حرف شما، فکر می‌کنم افرادی که با تجربه‌تر هستند خوب است در درس‌ها برای بچه‌ها نکات مهم و نکات کم ارزش‌تر را روشن کنند[۷]. اگر فقط درس به شکل قضیه-اثبات باشد، بچه‌ها با کتاب راحت‌تر می‌توانند موضوع را بخوانند. این خیلی مهم است چون وقتی به این شکل نگاه می‌کنید، قسمتی از فیلد برایتان روشن می‌شود که چرا مثلاً این مسایل مطرح می‌شوند و این اتفاق‌ها می‌افتد. ولی اگر بخواهید داخل هر لم وارد شوید، حالا من که پیر شدم و حوصله‌ام سر می‌رود، ولی حتی وقتی که آدم جوان است هم خسته می‌شود. مغز آدم بیشتر از یک حدی توانایی ندارد. ولی باید نقاط اوج و فرود فیلد را روشن کنید. کتاب همه خط‌ها رو عین همدیگر نوشته و نکات مهم و نکات تکنیکی را جدا نکرده است. به شکلی در درس‌ها این را به بچه‌ها نشان دهید که مثلاً بگویید این یک محاسبه است و اگر خودتان انجام دهید و ضرب و تقسیم کنید، این مسأله اثبات می‌شود ولی اگر در اینجا این‌گونه فکر کنید، این قضایا بدست می‌آید. به نظر من اگر در درس‌ها این موضوعات مشخص شود، اعتماد به نفس خود استادها هم بیشتر می‌شود.

زنگنه: من زمانی که در سال ۷۴ میلادی به آمریکا آمده بودم و دانشجو بودم، واقعیتش این است که با الهام از افرادی مثل راسل و این‌ها می‌خواستیم خیلی فرمال همه چیز رو با جزییات یاد بگیریم. من با یکی از کسانی که رو برو شدم هلگاسون[۸] بود که دکتر شهشهانی هم ایشان را می‌شناسند و کارهای مشترک دارند. ایشان یک کتاب خیلی سخت هندسه دیفرانسیل دارند و چیزی که جالب بود این بود وقتی خودشان درس می‌دادند یا صحبت می‌کردند، شما

[۷] You have to clarify the peaks and vallies
[۸] Helgason

فکر می‌کردید چقدر این مطالب بدیهی و ساده است. یعنی من تمام کتاب را به عنوان یکی از مراجع آزمون جامع امتحان دادم. خیلی شکل می‌کشیدند و می‌گفتند اگر می‌خواهی این را بگویی با شکل بگو. من اول فرمول می‌نوشتم ولی می‌گفت نه، یک شکل بکش و ببین این قضیه اساساً چه می‌گوید. این در دید من و نگاه هندسی من یک انقلاب بود و با آن راهنمایی‌هایی که کتاب داشت، موضوع خیلی ساده و روان و بدیهی گفته شده است. بنابراین خیلی مهم است که معلمی که موضوع را به ما یاد می‌دهد، آموزنده یاد دهد.

شعبانی: من دو تا سوأل دارم. یکی این که من حرف شما رو می‌پذیرم که ما نمی‌توانیم روی مسایلی که در خارج گروه‌های زیادی کار می‌کنند، کار کنیم. ولی آیا این آسیب وجود ندارد که ما تبدیل به ریاضیدان‌هایی شویم که روی شاخه‌های خیلی جزیی که مسایل مهمی در آن رشته نیستند و حتی هیچ ربطی به آن ندارند، کار می‌کنیم؟ و سوأل اول من این است که چگونه حداقل بعد از مدتی می‌توان از این موقعیت عبور کرد؟ و منظورم نه فقط در دوره دکتری، که مثلاً بعد از ده سال کار کردن روی موضوعات جدی کار کنیم؟ سوأل دوم هم این که ما اینجا کار گروهی تحقیقاتی نداریم. ولی چگونه می‌شود آن را راه انداخت؟

شهشهانی: درباره موضوع اول بگویم. ببینید مسأله‌هایی که در دنیا جالب هستند تنها مسأله‌هایی نیست که عده‌ای روی آن کار می‌کنند. البته در هر چیزی سیاست هست و هیچ چیزی مطلق نیست ولی جنبه‌های دیگر هم هستند. مسأله‌ای ممکن است الان مطرح نباشد ولی با یک نفر که آن را مطرح کند و در آن پیشرفتی کند و به یک مسأله جالب تبدیل شود. مثلاً در سالهای ۱۹۵۰ سلبرگ[۹] مقاله‌ای در ژورنال Indian Mathematical society نوشت. البته سلبرگ ریاضیدان مطرحی در آن زمان بود منتها این مقاله، خیلی توصیفی است و مقاله‌ای است که لنگ لندز[۱۰] کار خود را از آنجا شروع کرد و چاندرا[۱۱] یک سری دستنوشته دارد که در شروع، آن را به سلبرگ تقدیم کرد و در واقع سلبرگ در آن مقاله یک رشته جدید را پایه گذاری کرد. یعنی هر چند درست است که اگر مقاله‌ی که در گروه‌های موجود در دنیا کمتر مورد توجه است به دست کسی برود که به آن موضوع علاقه دارد، آن را زود قبول می‌کند و اگر به دست کسی برود که آن کار را نمی‌کند، احتمالاً حتی بدون خواندن رد می‌شود ولی اگر موضوع خیلی جالب باشد اینگونه نیست و این اتفاق می‌افتد و زیاد هم می‌افتد. داشتن اعتماد به نفس باعث می‌شود که وقتی وارد فیلدی می‌شوید و روی مسایلی که به نظرتان جالب می‌آید ولی جایی کار نمی‌کنند، فکر می‌کنید، عده دیگری هم چون مسأله ذاتاً جالب است، علاقه‌مند شوند. امیدوارم منظورم را خوب بیان کرده باشم. مثلاً من چند سال پیش این‌جا درس نظریه اعداد دادم و سعی کردم دانشجویانی را به این رشته علاقه‌مند کنم، ولی مسلماً خودم حاضر نبودم بگویم روی این مسأله‌ها فکر کنید. ولی می‌گفتم بروید با یک نفر که در این رشته هست کار کنید. برای این که می‌دانم عده‌ای در دنیا مشغول فکر کردن به این مسایل هستند. من هر مسأله‌ای بگوییم به تنهایی زورم به آن گروه‌ها نمی‌رسد. بنابراین چیزهایی بهشان می‌گویم تا بتوانند در آن گروه‌ها وارد شوند و روی آن مسأله‌ها فکر کنند و یک شبکه ایجاد شود. علتی که به خیلی از دانشجویانم گفتم سعی کنید که بروید این است که می‌خواهم این شبکه ایجاد شود. مثلاً ما یک گروه بینایی کامپیوتر حدود ۱۰ یا ۱۱ سال پیش درست کردیم. خیلی از بچه‌هایی که در آن گروه بودند رفتند ولی باعث شد یک شبکه بین آن‌ها و یک عده دیگر که اینجا هستند ایجاد شود و من خودم را کنار کشیدم. برای این که نمی‌دانم الان چه کارهایی در بینایی کامپیوتر می‌توان انجام داد که در دنیا مطرح باشد. ولی اینهایی که از اینجا اول کار را یاد گرفتند و الان درست در این کار هستند می‌دانند و می‌توانند این ارتباط را برقرار کنند. مسأله مهم ایجاد این شبکه است تا به تدریج اطلاعات رد و بدل شود و مسایل جالب پیدا شود. حرف شما درست است که اگر بخواهیم خیلی انفرادی کار کنیم، در دام مسأله مجزا حل کردن می‌افتیم و کسی توجه‌ای نمی‌کند. پس دو تا موضوع را باید در نظر بگیریم. یکی ایجاد شبکه با آدم‌های دیگر در دنیا که بدانیم چه کار می‌کنند و بتوانیم با آن‌ها ارتباط برقرار کنیم و دیگر این که خودمان قانع باشیم که مسایلی که می‌خواهیم کار کنیم، مسایل جالبی هستند تا اگر چیزی بدست آوردیم، کار ما در دنیا مورد توجه قرار گیرد، حتی اگر تعداد کمی در دنیا روی آن کار کنند.

زنگنه: من فکر می‌کنم یکی از نکات مهم این هست که ما روش تحقیق و فکر کردن در مسیر درست را یاد بگیریم و قسمت زیادی از مسیر این است که لذت ببریم از فکر کردن و تحقیق کردن از طعم خوب ریاضی. چون کاری که الان می‌کنیم، الزاماً کاری نیست که فردا می‌کنیم. یعنی اگه شما دارید پایان‌نامه‌ای می‌نویسید و یاد گرفته باشید که چگونه این کار را خوب انجام دهید فردا هم می‌توانید یک کار دیگر شروع کنید. ولی در طرف دیگر، اگر طعم غلط ریاضی را ببینید، نتیجه‌اش می‌شود کاری که هیچ کس دیگری

[۹] Selberg
[۱۰] Langlands
[۱۱] Chandra

در دنیا انجام نمی‌دهد. پس اگر نسبی نگاه کنیم، می‌توانیم کارهای خوبی انجام دهیم که در عین کیفیت احتمالاً مسایل داغی که لحظه به لحظه منتظر حل و چاپش در دنیا هستند، نیست. حقیقتاً آن مسایل داغ ممکن است چندان حاشیه امنیت نداشته باشد. پس یک موقع مسایل پنجاه سال پیش را نگاه می‌کنیم و فقط داریم مسایلی که تاریخشان گذشته را تعمیم می‌دهیم و صیقل می‌زنیم و نهایتاً هم در جایی که کسی اصلا نگاه نمی‌کند چاپ می‌کنیم. ولی یک موقع است که مسأله، مسأله روز هست ولی جز مسایلی که همه روی آن کار می‌کنند نیست. واضح هست که اگر گروهی تحقیق کنیم خیلی بهتر است. منتها منظور این است که مسأله صفر و یک نیست و ما ریاضی کار می‌کنیم که لذت ببریم و نه ریاضی کار می‌کنیم که مقاله چاپ کنیم و اگر نیت ما چاپ مقاله هست به سراغ مسایلی که متعلق به چهل پنجاه سال پیش هستند، باید برویم.

شهشهانی: در ضمن توجه کنید که یک عده‌ای که از همین دانشگاه بیرون آمدند، الان ریاضیدان‌های خیلی خوبی هستند. اسامی آن‌ها هم پنهان نیست و همه می‌دانیم، فریدن رضاخانلو، فریدون شهیدی، مریم میرزاخانی، علیرضا صالحی گلسفیدی، کسری رفیع و خیلی‌های دیگر که الان اسامیشان از ذهنم پریده است. این‌ها ریاضیدان‌های خیلی خوبی هستند و یک فیلدهایی رو خیلی خوب می‌دانند. از این افراد استفاده کنید. با آن‌ها ارتباط داشته باشید. اینها ایده‌های خوبی دارند و هر کدام دقیقاً می‌دانند در یک رشته‌هایی چه اتفاقاتی دارد می‌افتد. ایجاد این شبکه خیلی مهم هست. عده‌ای به من ایراد می‌گیرند که چرا دانشجوها را به خارج می‌فرستی، خب ببینید این افرادی که الان خارج‌اند برای پیشرفت ریاضی در ایران خیلی مفید هستند. چون می‌توانید با آن‌ها صحبت کنید و بهتر می‌توانید ارتباط برقرار کنید تا کسانی که ایرانی نیستند. غیر ایرانی‌ها ممکن هست خیلی محل نگذارند. در صورتی که آن‌هایی که از اینجا رفتند، با شما دوستند و شما را می‌شناسند و می‌دانم خیلی از آن‌ها علاقه‌مندند که صحبت کنند. مثلاً رامین تکلو بیغش واقعا علاقه‌مند هست با بچه‌های این‌جا صحبت کند. خیلی‌ها هستند. از این استفاده کنید. هرکدام از اینها مثل هر آدمی، قسمتی از ریاضی را خیلی خوب می‌داند. بهتر هست از معلوماتشان و از شبکه‌ای که دارند استفاده کنید. در این صورت معضلی که شما اشاره کردید هم حل خواهد شد.

پورمحمد: من فکر می‌کنم مشکلی که ما بچه‌های فوق لیسانس داریم این هست که معمولا سر کلاس‌ها به یک موضوع علاقه‌مند می‌شویم و نه به یک مسأله. مثلاً من سر کلاس آنالیز چیزی را می‌بینم و فکر می‌کنم موضوع جالبی هست و شروع می‌کنیم در آن حول و حوش خواندن. قسمتی از این مباحث کلاسیک هستند. یعنی مسأله خیلی خوبی بوده و کاملا حل شده است ولی مسأله جدیدی جلو ما نیست و مشکل از اینجا شروع می‌شود که وقتی به سراغ استادها می‌رویم هم خیلی اتفاق خاصی نمی‌افتد که مثلاً مسأله‌های جذاب آن رشته را معرفی کنند. بنابراین ما دو راه داریم: یا باید سراغ موضوعی که اصلا علاقه‌ای به آن نداریم برویم و اینجا یک سری تکنیک یاد بگیریم با این تصور که اگر خارج برویم خیلی چیزها در موردش یاد می‌گیریم. یا این که یک سری مسأله پیدا کنیم که ممکن هست خیلی جدی باشند و اغلب جدی‌تر از آن که چیزی به ما یاد بدهد و عموماً بیش از حد مشکل‌اند. این سر در گمی را فکر می‌کنم همه ما تقریبا داریم.

علیشاهی: می‌توانم یک چیزی به این سوأل اضافه کنم؟

شهشهانی: بفرمایید.

علیشاهی: در واقع سوأل من در پیش فرض‌های صحبت‌های تا اکنون است و ممکن است به نظر خیلی ابتدایی باشد. مسأله این است که چه لزومی دارد هر کس مسأله‌ای برای فکر کردن داشته باشد؟ اصلا فکر می‌کنم بد نباشد درباره این صحبت کنید . برای اینکه من فکر می‌کنم فرهنگ تحقیق از ریشه در ایران آن طور جا نیافتاده است. بگذارید مثال بزنم. اگر من به ادبیات علاقه‌مندم و خیلی هم از شعر خواندن لذت می‌برم، آیا لزومی دارد که حتما شعر بگویم و به خودم فشار بیاورم دو خط شعر هم بنویسم؟ اگر من یک دانشجوی دکتر هستم و ریاضیات هم خوب می‌فهمم و کلاس‌های مختلف هم شرکت می‌کنم و موضوعات برایم خیلی جالب هستند، آیا الزامی هست که من اضافه بر آن مباحثی که دنبال می‌کنم یک مسأله حل کنم که کسی تا الان حل نکرده است؟ ببخشید اینقدر سوأل بنیادی می‌پرسم. فکر می‌کنم سوأل اکثر شرکت‌کننده‌ها است. من در واقع برای این که خودم را از این مشکل مبرا کنم می‌پرسم. (خنده)

شهشهانی: ببینید من فکر می‌کنم دوتا جنبه دارد این سوأل. یک جنبه عملی که اگر سعی نکنید چیز تازه‌ای هم بیارید کسی هم به شما محل نمی‌گذارد. جنبه دیگر این است که وقتی آدم خودش این چیزها رو پیدا می‌کند شوق دیگری دارد و یک عمقی می‌تواند پیدا کند که با خواندن تنها نمی‌تواند پیدا کند. کسانی که خودشان روی مسایل فکر

کرده‌اند متوجه منظور من می‌شوند.از این جهت فکر می‌کنم خیلی خوب هست که سعی کنید مسأله طرح کنید. من نمی‌دونم وقتی شما یک موضوعی برایتان جالب می‌شود هیچ وقت سعی کردید سوأل مطرح کنید؟

پورمحمد: گاهی اوقات سوأل طرح می‌شود ولی احساس می‌کنم مسأله یک تز باید هم به اندازه کافی سخت باشد و هم بتوان حلش کرد. بعضی اوقات به ذهنم سوألاتی می‌رسد که مطرح نشده ولی این که سوأل جالبی طرح شود که اگر حل کنم از پس فلان چیز می‌توانم برآیم اتفاق نیافتاده است. این هست که کاری نتوانستم پیش ببردم. اکثر مسایل‌ای که به ذهنم می‌رسند خیلی پیچیده می‌شوند.

شهشهانی: ببینید من فکر می‌کنم طرح سوأل آسان نیست. یعنی سوأل‌هاییکه ساده نباشند، عمق داشته باشند و هم قابل حل باشند. برای این شما باید به گونه‌ای تکنیک‌های فیلد را بدانید که متوجه باشید چه کارهایی می‌شود کرد و چه کارهایی نمی‌شود کرد و این با تجربه به دست می‌آید. هیچ راه دیگری هم به جز تجربه به نظر من ندارد. در ضمن توصیه می‌کنم اگر چیزی به نظرتان جالب نمی‌آید دنبالش نروید.

اصفهانی‌زاده: ببخشید من فقط یک نکته‌ای در جواب بگویم. به نظر من اگر موضوع‌ای که شما دارید فکر می‌کنید به طور طبیعی ظاهر شده باشد و اگر به طور طبیعی به آن فکر کنید به شکل طبیعی هم وارد فرآیند تولید مسأله می‌شوید. ممکن است شما روی مسأله‌ای فکر کنید که پنجاه سال پیش حل شده و آن را بفهمید. این به جز خستگی چیزی برای شما نمی‌آورد. تا یک مدتی عمق شما در مسأله زیاد می‌شود ولی بعد از مدت کوتاهی انگیزه شما تمام می‌شود و شما هم خسته می‌شوید. ولی اگر سوألی که فکر می‌کنید واقعا سوأل تحقیقات روز باشد و از یک منشا جدید آمده باشد یا ساده‌تر بگوییم، از یک مقاله آمده باشد، همین عمل فکر کردن و فهمیدن این سوأل خودش یعنی تحقیق و این چیز عجیبی نیست. شما به همه سوأل‌هاییکه آن‌جا هست وقوف پیدا می‌کنید و برایتان جا می‌افتد و مسایلی برایتان پیدا می‌شود که این‌ها مسایل حقیقی هستند. یعنی من جاهای دیگر که بودم به همین سادگی مسایل تحقیقی پیدا می‌شود. شما اسکاندیلاس[12] را می‌شناسید؟

شهشهانی: اسماً

[12] Georges Skandalis

اصفهانی‌زاده: ایشان یک ریاضیدان برجسته است در فرانسه که شاگرد آلن کوهن[13] بوده است. زمانی که من رفتم فرانسه می‌خواستم روی هندسه ناجابجایی کار کنم و برای من خیلی جالب بود که ایشان چگونه به من مسأله می‌دهد. یک مقاله پیش ایشان بردم و گفتم من این را دوست دارم. گفت خب من این موضوع را بلد نیستم و پیشنهاد داد آن را بخوانیم. مقدمه مقاله و نتیجه مقاله را خواند و یک کم با هم حرف زدیم یک مسأله خوب طرح کرد. من نمی‌گویم این مسأله خیلی عجیب بود و شاید خیلی وقت هم نگذاشت. ولی طرح سوأل واقعاً به همین سادگی است. برای من واقعاً پیش آمده که همین کار را کردم. یعنی یک وقت لازم بوده چیزی را بنویسم و به همین شکل و به طور آگاهانه سوأل طرح کردم و دست آخر هم فهمی‌دهم سوأل خیلی قشنگی بوده. ویژگی ریاضی این است که شما یک جایش را تغییر می‌دهید به جاهای خیلی قشنگی می‌رسید که اصلا فکرش را هم نمی‌توانید بکنید. از این جهت خیلی راحت و طبیعی می‌توانید با مسایل تحقیقی برخورد کنید.

شهشهانی: من فکر می‌کنم سوأل کنید و نترسید از این سوأل‌هایتان خیلی مقدماتی یا احمقانه باشد. فوقش یکی می‌گوید این سوأل خیلی احمقانه هست و جوابش هم این هست و هیچ اتفاق بدی نمی‌افتد. من فکر می‌کنم بین تزهای کارشناسی ارشدی که بچه‌ها با من نوشتند، تزی که از همه بهتر بود و کار تازه‌ای کرده بود، پیگیری سوألی بود که در یک کلاس کارشناسی مطرح شد. حدود سال ۲۰۰۲ من اینجا یک درس کارشناسی هندسه هذلولوی ارایه دادم و یک دانشجوی کارشناسی سوألی مطرح کرد و کسی بود که فکر نکرد سوأل خیلی ساده و پیش پا افتاده هست. اول گفتیم از جنبه آزمایشی سوأل را حل کنیم و جالب بود قسمت شبیه‌سازی هم کار داشت و به این سادگی نبود که یک برنامه بنویسیم و یک ماه روی کامپیوتر انجام شود و جواب بدست آید. واقعاً کار داشت تا جواب را بدست بیاریم. حتی مجبور شدیم برویم یک مقاله که مربوط به حدود ۱۹۰۷ بود نگاه کنیم که متوجه شویم چه گونه باید را انجام دهیم و نتیجه‌ی این کار هم در یک ژورنال خیلی خوب چاپ شد. و یک استاد از فرانسه به ایشان نامه نوشت و گفت: "تو واقعا باید به خودت افتخار کنی. من مقاله‌ات را خواندم و خیلی به آن علاقه مند شدم." سوأل هم خیلی ساده بود. سوألی بود که به راحتی در کلاس کارشناسی می‌توان گفت. بنابراین نترسید که سوأل مطرح کنید. خیلی سعی کنید با موضوع ریاضی صمیمی باشید چون اگر دوستانه

[13] Alain Connes

نباشید واقعاً پیشرفت نمی‌شود کرد. اگر چیزها خیلی مشکل شود و نتوانید به زبان ریاضی راحت بیانش کنید، حتماً یک جای کار مشکل دارد. ولی اگر موضوع خیلی برایتان دوستانه شود، می‌توانید مسأله هم طرح کنید.

پورمحمد: ولی خیلی وقت‌ها اتفاقی که می‌افتد این است که یک مقاله‌ای می‌دهند دانشجو تا نگاه کند. می‌تواند مقاله را در یک ماه بخواند یا سه ماه و هیچ فرقی هم نمی‌کند و اتفاق خاصی نمی‌افتد. گاهی اوقات هم مسأله‌ای است که فکر می‌کنید شاید خیلی مشکل باشد و حل نشود. چگونه باید سعی کنیم بین این دو حرکت کنیم تا هم کاری کرده باشیم و هم چیزی یاد گرفته باشیم؟

شهشهانی: ببینید فرمول مشخصی ندارد. ولی وقتی یک مقاله مهمی منتشر شده و شما قصد دارید آن را بخوانید از اول سعی نکنید هر لمی را بفهمید. وقتی موضوع را درست بفهمید خیلی از لم‌ها را خودتان از راه‌های دیگری می‌توانید ثابت کنید. معمولا وقتی می‌گویند مقاله‌ای مهم است، واقعا یک ایده جدیدی دارد. سعی کنید آن را بفهمید. وقتی شروع می‌کنید به خواندن، خواهید دید سوأل‌هایی هم اطراف آن هست. سعی کنید آن سوأل‌ها را برای خودتان مطرح کنید و یک شکلی مستقل به مقاله فکر کنید. انتظار نداشته باشید یک نفر همه چیز را به شما بگوید. ولی همین که شخصی می‌گوید این مقاله مهم چاپ شده و مسایل آن هم هنوز کار نشده، بشینید و این کار را انجام دهید. سعی کنید بین درک مطلب و فهمیدن تمام لم و قضیه‌ها فرق بگذارید. کمی از مقاله فاصله بگیرید و ببینید که تصویری که دارد ساخته می‌شود چگونه هست حتی اگه همه لم‌ها را ندانید. و این طوری می‌توانید از آن تصویر مسأله بسازید. مطمئن باشید که می‌توانید.

زنگنه: یعنی شما باید با قسمت‌هایی از ریاضی آشنا شوید و سعی کنید آن‌ها را خوب بفهمید ولی لازم نیست حتما در آن قسمت‌ها مسأله پیدا کنید و حل کنید. واقعیتش این است که این کار آزار دهنده است و شما را از هدف دور می‌کند. من فکر می‌کنم در دوره کارشناسی ارشد اگر شما مقاله اصیلی را بفهمید بهتر از این است که شما خودتان کار جدیدی کنید. آقای دکتر مثالی زدند از دانشجویی که مسأله جدیدی طرح کرده بود. ولی واقعیت این است که اگر بخواهید در دوره کارشناسی ارشد طرح مسأله کنید و وارد آن شوید، این به معنا آن است که احتمالاً از پیش زمینه کارشناسی‌تان استفاده می‌کنید و این ارزشمند نیست. یعنی این که مسأله‌ای حل کنید و مقاله‌ای هم چاپ کنید نسبت به این که مقاله‌ی روز و جدی‌ای را بفهید، خیلی کم ارزشتر است تا اگر شما کار اصیلی نکردید ببینید کیفیت کارهای اصیل چگونه است. در دانشگاه‌های دیگر به همین شکل است. اتفاقا امروز بحث دوره کارشناسی ارشد داشتیم و من سیاست دانشگاه برکلی که ارشد ریاضی دارد را مثال زدم. (البته خیلی از دانشگاه‌ها این دوره را ندارند و مستقیماً دکتری می‌روند.) نوشته بود تز ارشد یعنی شما چند مقاله را خوب بفهمید و ارتباطی متقابل بین آن‌ها برقرار کنید و یک مقاله خوب توصیفی بنویسید. پس ببینید ما کسانی داریم که در دوره ارشد تزی می‌نویسند و مقالاتی هم چاپ می‌کنند ولی مشکل این است که ادبیات اصیلی پشت آن نیست و در واقع با پیش زمینه کارشناسی کاری می‌کنند و این ارزشمند نیست.

شهشهانی: البته من مقصودم از آن مثال این بود که از طرح سوأل نترسید.

صلواتی: ببخشید چون احساس می‌کنم بحث خیلی گرم نیست می‌خواهم نقش منفی را بازی کنم تا بحث جنجالی شود. من این انتقاد رو به تحقیق وارد می‌کنم که بیش از حد اهمیت قایل شدن برای تحقیق در ریاضی خیلی از استعدادهای ریاضی را می‌کشد. به علت این که اگر از بین فعالیت‌های مختلف ریاضیدان‌ها فقط برای تحقیق اهمیت قایل شویم، باعث می‌شود کسانی که نتوانند تحقیق با کیفیت بالا انجام دهند انگیزه‌شان را از دست می‌دهند. به نظری من تحقیقی با کیفیت بالا ارایه دادن، توانایی بالایی هم لازم دارد که تمام کسانی که علاقه‌مند به ریاضی هستند نیست. در نتیجه کسانی که خیلی در تحقیق توانایی نداشته باشند مجبورند بروند سراغ تحقیق یا کارهای جدیدی که کیفیت بالایی ندارند. من به حرف دکتر اصفهانی‌زاده هم ایراد وارد می‌کنم که وقتی ببینید مسأله که کار می‌کنید قبلا حل شده احساس خستگی می‌کنید. ایرادم این است که خیلی از ما اولین لذت‌هایی که از ریاضی بردیم در دوره دبیرستان بود که معمولاً چیز جدیدی کشف می‌کردیم که چه بسا چیز پیش پا افتاده‌ای هم بود. بالعکس کار جدیدی که واقعا آدم را ارضا نکند، بیشتر خستگی می‌آورد.

اصفهانی‌زاده: البته من گفتم شما تا یک مدتی فقط می‌توانید بخوانید و بعد خسته می‌شوید.

صلواتی: ولی به نظر من می‌توانیم ارزش گذاری کنیم برای کار جدیدی که قبلا حل شده، منتها شخصی با ایده خودش و با استفاده

از ابتکار خودش آن را انجام داده است. این یک شکلی از آموزش است. به نظرم این کار یک جور آماده‌سازی شخص برای تحقیق واقعی است. نمی‌دانم به چه شکلی باید این مسأله را راهبری کرد ولی می‌توان بجای این که به یک دانشجوی دکتری یک مسأله نه چندان جالب و حاشیه‌ای رو بدهیم، یک مسأله نه چندان جدیدی که حل شده بدهیم که با ایده و ابتکار خودش روش کار کند.

شهشهانی: من می‌فهمم مقصودتان چیه و با شما همدردی می‌کنم. چیزی که می‌خواهم بگویم این است که شما وقتی روی یک موضوع کار می‌کنید و با یک دید جدیدی موضوعی را ثابت می‌کنید که قبلا ثابت شده معمولاً چیزهای جدیدی هم به خاطر دیدی که دارید می‌توانید در موردش بگویید. یک چیزهایی رو می‌بینید که دید کلاسیک نمی‌دیده است و این را بارها دیده‌ایم که اگر چیزی را با دو فرمول مختلف بدست آوریم، با مساوی قرار دادن آن‌ها معمولاً یک چیز جدیدی به دست می‌آوریم. این هم همینطور هست. حرف شما درست است که وقتی می‌خواهیم موضوعی را بفهمیم که اصل آن قبلا کشف شده عموماً از یک زاویه‌ی دیگری به آن نگاه می‌کنید و این خودش یعنی تحقیق. به احتمال زیاد اگر خوب ادامه دهید ممکن است موضوع جدیدی را بفهمید که افراد قبل نفهمیدند و این خودش کار خیلی خوبی است. در ضمن مگر یک نفر در زندگی چند ایده‌ی خیلی جالب می‌تواند داشته باشد که همه با شنیدنشان تعجب کنند. حتی آدم‌های خیلی معروف هم بیشتر از دو سه ایده این چنینی نداشتند. ولی مهم این است که کارمان را ادامه دهیم و یک موقع ممکن است شانس بیاریم و به ایده خیلی خوبی برخورد کنیم. بعضی‌ها بیشتر شانس می‌آورند و بعضی‌ها کمتر. فکر می‌کنم حرفتان درست است که ما سعی کنیم یک موضوع را بفهمیم و روی آن فکر کنیم ولی بهتر سعی کنیم مستقل روی آن فکر کنیم.

اصفهانی‌زاده: آقای دکتر شهشهانی با من موافق بودند که یک فرآیند فکری صحیح به یک مقاله منجر می‌شود.

شعبانی: من می‌خواهم یک سوأل جدید مطرح کنم و با یک نقل قول شروع می‌کنم. مجید هادیان می‌گفت که من تا حالا سوألی از قسمت‌های مختلف ریاضی ندیدم که دکتر شهشهانی ندیده باشد و یا بلد نباشد. من می‌خواهم بپرسم چه ریاضیدان و ریاضی‌کار شدنی خوب هست. من آدم‌هایی می‌شناسم که مجموعه‌ای از تکنیک‌ها در ریاضی بلد هستند و می‌گردند دنبال سوأل‌هایی که با آن تکنیک‌ها حل می‌شوند. البته این سوأل‌ها بعضی وقت‌ها به اندازه کافی جدی هستند. منظور این است که چقدر خوب است در زندگی به یک شاخه خاص تمرکز کنیم؟

شهشهانی: به نظر من جواب مشخصی سوأل شما ندارد. این بستگی به شخص خودتان دارد.

شعبانی: من می‌خواهم جواب شخصی خودتان را بدانم.

شهشهانی: من اساساً آدم تنبلی هستم و خیلی حوصله ندارم کار بکنم و مدام مقاله بنویسم. ترجیح می‌دهم یک کم در آرامش باشم. درباره یک موضوع فکر کنم. البته بعضی وقت‌ها هم حوصله‌ام سر می‌رود. بعضی افراد خیلی از من پرکارترند. فکر می‌کنم کار درستی هم می‌کنند. من باید یاد می‌گرفتم پرکارتر باشم که خروجی بیشتری داشته باشم. افرادی هستند که یک مقدار تکنیک می‌دانند و سعی می‌کنند با آن مسأله حل کنند و مقاله بنویسند، البته شاید بعضی از مقالاتشان هم بد نباشد. ولی معمولاً هر کسی در طول عمرش ممکن است دو یا سه ایده واقعاً بکر با نتایج عمیق داشته باشد که افقی را برای عده‌ای باز کند و خب نهایتاً هر کس به سلیقه خودش عمل می‌کند.

شعبانی: یعنی شما نسبت به این دو هیچ ارزش‌گذاری‌ای ندارید؟

شهشهانی: نه، ببینید آدم‌ها با هم فرق می‌کنند. باید در دنیا همه شکل آدمی باشد. سعی نکنید درباره همه چیز داوری کنید. همه چیزها را نمی‌شود ارزش‌گذاری کرد که این از آن بهتر است یا آن از این. بالاخره آدم‌های مختلف راه‌های مختلف دارند و به مسایل مختلف فکر می‌کنند و برای همین زندگی جالب می‌شود. در غیر این صورت یک partial order (ترتیب جزئی) دارید. (خنده)

شعبانی: سوأل دوم دفعه قبلم درباره کار گروهی تحقیقاتی کردن از قلم افتاد.

شهشهانی: چیزی که گفتم این بود که سعی کنید ارتباطتان را با دانشجویان دیگری که از این‌جا رفته‌اند و در آن‌جا مسلط شده‌اند برقرار کنید و یا اگر خودتان هم می‌روید ارتباطتان را با این‌جا حفظ کنید. خیلی افراد از شما جوان‌تر هستند و شما میتوانید به آن‌ها کمک کنید. با آن‌ها صحبت کنید و این شبکه را شکل دهید.

خزلی: در مورد کار گروهی، مشکل این است که دانشگاه‌های ما در زمینه‌های مختلف خیلی با هم ارتباط ندارند و در هر رشته‌ای هم حداکثر یکی دو نفر کار می‌کنند که جمع کوچکی است.

شهشهانی: شما در کار آمار احتمال هستید.

خزلی: بله.

شهشهانی: خب شما چند نفری هستید و می‌توانید فکرهایتان را روی هم بگذارید و مسأله طرح کنید و از افراد دیگر دعوت کنید به جمعتان اضافه شوند تا گروه‌تان قوی‌تر شود.

خزلی: من آرزو داشتم دانشکده‌های ریاضی متمرکز می‌بودند و با کلی دانشجو و استاد.

شهشهانی: از این آرزوها نکنید. این کارها عملی نمی‌شود. در یک سطحی برنامه بگذارید که قابل اجرا باشد.

خزلی: آرزو بر جوانان عیب نیست. (خنده)

محکام: من سوألم رو دوست دارم دکتر اصفهانی زاده و شهشهانی هر دو جواب بدهند. آیا شما تنها راه رسیدن به ریاضیات جدید و نظریه‌های جدید را کار کردن روی یک سری مسأله‌ها می‌دانید؟ یا این که متصورید نظریه‌پردازی به طور مستقل انجام شود؟ و حتی به نظرم می‌رسد این کار، مثل طرح کردن مسأله، کار سختی نیست. مثلاً پارسال مسایل متفاوتی توجه‌ام را جلب کرد و حس کردم شاید تمام این‌ها در یک نظریه جای گیرند و چند روز پیش مطلبی را می‌خواندم که این کار را کرده بود. در واقع شما مسأله‌ی مشخصی ندارید و روی یک نظریه کار می‌کنید.

شهشهانی: این هم خودش یک مسأله هست. وقتی می‌گویید به همه این چیزها می‌شود از زاویه‌ای نگاه کرد که حل شود در واقع یک مسأله حل کردید.

محکام: یک نقل قول هم می‌خواهم دکتر رستگار بگویم که وایلز را با این که نظریه هم به وجود آورد، یک مسأله حل‌کن می‌دانند، و می‌گفتند من به جای وایلز بودن ترجیح می‌دهم شبیه شیمورا باشم که یک نظریه‌پرداز بود.

شهشهانی: من فکر می‌کنم اگه شما بتوانید مثل شیمورا یا وایلز باشید خوب است. (خنده)

اصفهانی‌زاده: خب من باید عرض کنم که حقیقتاً نه شبیه وایلز هستم و نه شیمورا. من همان آدمی هستم که آقای شعبانی اشاره کرد. یعنی من یک‌سری موضوعات بلد هستم و وقتی می‌خواهم دنبال مسأله پژوهشی بگردم، به طور آگاهانه دنبال یک مسأله می‌گردم. یعنی به طور آگاهانه می‌گویم الان وقت آن است که یک سوأل طرح کنم و حل کنم.

علیشاهی: در واقع نقش منفی را شما دارید انجام می‌دهید. (خنده)

اصفهانی‌زاده: من از این بابت شرمسار نیستم و فکر می‌کنم یک فعالیت سالم علمی انجام می‌دهم. در زمینه من چند نفری هستند که کار می‌کنند و من نگاه می‌کنم به فعالیت آن‌ها و سعی می‌کنم در وهله اول بفهمم که صورت قضیه چیست و اگر جذاب بود سعی می‌کنم با خواندن یک سری حواشی یک سوأل جدید برای خودم مطرح کنم و یا این که وصلش کنم به کارهای قبلی که انجام داده‌ام که بتوانم کار جدیدی انجام دهم. یعنی این فرآیند به نظر من به همین سادگی هست که گفتم. و نکته دیگری که در رابطه با حرف آقای شعبانی می‌خواستم بگویم این است که به نظر من ریاضیات در کنهش غایت‌اندیشی نیست. یعنی من فکر می‌کنم کسانی که کار می‌کنند ابزارهایی دارند که با آن‌ها می‌خواهند مسأله جدیدی حل کنند. علتش هم این است که در ریاضیات هدف دور از دسترسی که همه افراد به آن متمرکز باشند وجود ندارد. کسانی که با این ذهنیت می‌آیند ممکن است زود سرخورده شوند. یعنی ریاضیات مثل فیزیک نیست. شما مثلاً نگاه کنید که قبل از این نشست دکتر جعفری یک سری مسایل راجع به توپولوژی گروه‌ها گفتند. این‌ها چیزهایی بود که من قبلاً شنیده بودم ولی تصور نمی‌کردم در آن مسأله خاص کابرد داشته باشد. شاید اگر من فیزیک‌دان بودم این اتفاق نمی‌افتاد. یعنی احتمالاً می‌دانستم موضوعی که کار می‌کنم با چه بخش‌های از فیزیک ارتباط دارد. ولی ریاضیات این‌گونه نیست و در داخل خودش ارتباطات عجیب و غریب دارد و این مسیر تحقیق کردن در ریاضی را متفاوت می‌کند. یعنی به جای داشتن یک هدف نهایی باید سعی کرد حول و حوش کارهای خودتان چیزهای جدید پیدا کنید و لذت ببرید.

شهشهانی: من معمولاً تشویق می‌کنم دنبال نظریه‌پردازی نروید و برای خودتان مباحث را ملموس کنید و مثال‌های جالبی داشته باشید که بتوانید حل کنید. من یادم می‌آید وقتی سال اول دکتری بودم خیلی تجرید مد بود، حتی بیشتر از الان. و یکی از ریاضیدان‌های معروف آن زمان که کارهاش خیلی محض بود به ما گفت، ببینید سعی کنید مثال بلد باشید، مثلاً یک جایی می‌بیند درباره درون‌ریختی‌های یک جبر باناخ صحبت می‌کنند و بعد می‌بینید نکته فقط این است که تمام جملات سری را می‌توانید جابه‌جا کنید.

اصفهانی‌زاده: قبل از شما یکی از سخن‌رانی‌ها درباره درون ریختی‌های جبر باناخ بود. (خنده)

شهشهانی: البته منظورم شما نیستید و یا می‌گفت بعضی از دانشجوها می‌آیند انواع و اقسام دنباله‌های دقیق و چیزهای مختلف می‌نویسند که شما گم می‌شوید.

اصفهانی‌زاده: یکی دیگر از سخن‌رانی‌های قبلی هم درباره دنباله‌های دقیق بود. (خنده)

شهشهانی: ولی منظورم این است که سعی کنید مثال داشته باشید. و مسایل را خیلی دوستانه بفهمید. ببینید همه این کارها اگر علاقه‌مند هستید معنا می‌دهند. کارهای تحقیقاتی هم یکی از جنبه‌های زندگی است. و در نهایت پیشنهاد می‌کنم که سعی کنید کارهاتان خیلی کاربردی‌تر باشد و کاربردی هم منظورم این نیست که فقط اسم ریاضی کاربردی روی آن باشد. برای این که در آن زمینه‌ها نتایج کارتان را خیلی ملموس‌تر می‌بینید. کارهای خیلی نظری هم سخت هست هم ریسک‌اش بالاتر هست و به سختی یک کار خوب پیدا می‌شود.

اصفهانی‌زاده: من فکر می‌کنم جلسه خیلی مفیدی بود و به شخصه به آینده امیدوارم. از شرکت‌کنندگان و دکتر شهشهانی تشکر می‌کنم.

نگاهی الگوریتمی به مسائل شمارشی در هندسه‌ی اعداد

نوید علامتی

چکیده

در نگاهی الگوریتمی به هندسه‌ی اعداد، ابتدا الگوریتمی را مطرح می‌کنیم که از پیچیدگی الگوریتم تعمیم‌یافته‌ی اقلیدس برای یافتن ب.م.م می‌باشد و این الگوریتم تعداد نقاط مشبکه‌ای را روی یک پاره‌خط محاسبه می‌کند. سپس الگوریتمی با همین پیچیدگی برای شمارش نقاط مشبکه‌ای در یک مثلث ذکر می‌کنیم و نهایتا با ارایه‌ی الگوریتمی برای چندضلعی‌ها این بخش را به پایان می‌رسانیم. الگوریتم‌هایی که در این بخش مطرح می‌شوند، ضمن سادگی نسبت به موارد مشابه خود، از پیچیدگی زمانی یکسانی نسبت به آنها برخوردار هستند.شمارش نقاط مشبکه‌ای در چندضلعی‌ها در دو بعد و بالاتر یکی از مسائل بنیادین ریاضی است که برای مدت طولانی مورد مطالعه قرار گرفته است. شمارش نقاط مشبکه‌ای در حالت ساده یعنی حالتی که مختصات صحیح باشند به طور موفقیت‌آمیزی توسط پیک در قرن نوزدهم انجام گرفته است. شمارش نقاط مشبکه‌ای در چندضلعی‌هایی که رئوسشان مختصات گویا دارند نیز برای مدت طولانی مورد بحث بوده است. زمانی که بعد ثابت باشد، Barvinok نشان داد که الگوریتم چندجمله‌ای برای شمارش نقاط مشبکه‌ای در چندضلعی‌هایی با مختصات رئوس گویا وجود دارد. در دو بعد، Beck و Robins الگوریتم کارایی ارائه دادند که از مثلث‌بندی چندضلعی و شمارش نقاط مشبکه‌ای در مثلث قائم‌الزاویه استفاده می‌کرد. اما، در مقام عمل الگوریتم‌های موجود برای مختصات گویا کارایی چندانی ندارند. به عنوان مثال الگوریتمی که توسط Barvinok در سال ۱۹۹۳ ارائه شد، سختی بسیاری برای پیاده‌سازی داشت و تا سال ۲۰۰۴ اصلا پیاده‌سازی نشده بود!

در ادامه‌ی بحث، الگوریتمی کارا و راحت برای پیاده‌سازی جهت شمارش نقاط مشبکه‌ای در چندضلعی‌هایی با مختصات گویا ارائه خواهیم داد. این الگوریتم تا حد زیادی ساده‌تر از الگوریتم Beck و Robins بوده، در حالی که هر دو الگوریتم از پیچیدگی زمانی یکسانی برخوردارند. سادگی الگوریتم بسیار مهم است، چرا که سادگی باعث راحتی در پیاده‌سازی می‌شود و امکان بروز باگ را در برنامه‌ها پایین می‌آورد. از طرفی دیگر منطقی است وقتی که هردو از لحاظ نظری پیچیدگی زمانی یکسانی دارند، برنامه‌ی ساده در عمل سریع‌تر از دیگری اجرا شود. این الگوریتم توسط Yanagisawa در پژوهشکده‌ی شرکت IBM منتشر شده است.

لازم به ذکر است که در ادامه‌ی بخش منظور از $\{x\}$ در واقع، $x - \lfloor x \rfloor$ یعنی جزء اعشاری می‌باشد.

۱ نگاهی الگوریتمی به هندسه‌ی اعداد

۱.۱ الگوریتم شمارش نقاط مشبکه‌ای برای پاره‌خط‌ها

در این بخش، الگوریتمی برای محاسبه‌ی تعداد نقاط مشبکه‌ای بر روی یک پاره‌خط داده شده ارائه می‌گردد. برای ساخت الگوریتم از تعریف و لم‌های زیر استفاده خواهیم کرد.

تعریف ۱ *فرض کنید x_1 ، y_1 ، x_2 و y_2 اعداد گویایی باشند. تعداد نقاط مشبکه‌ای روی پاره‌خط تعریف شده با نقاط (x_1, y_1) و (x_2, y_2) را با $L(x_1, y_1, x_2, y_2)$ نشان می‌دهیم.*

لم ۱ *در صورتی که اعداد صحیح نامنفی a و b داده شده باشند، الگوریتمی برای محاسبه‌ی مقسوم‌علیه مشترک آنها وجود دارد که به تبع آن اعداد x و y نیز می‌توانند محاسبه گردند به‌طوری که:*

$$ax + by = gcd(a, b)$$

جزئیات پیچیدگی زمانی چنین الگوریتمی در مرجع [۱۲] ذکر شده است.

لم ۲ *معادله‌ی دیوفانتی خطی $ax + by = c$ جواب دارد اگر و فقط اگر c بر d بخش‌پذیر باشد که در آن $d = gcd(a, b)$. همچنین اگر (x_0, y_0) جوابی از معادله باشد، مجموعه جواب‌های معادله شامل جفت‌های صحیح (x, y) است که:*

$$x = x_0 + \frac{b}{d}k, \quad y = y_0 - \frac{a}{d}k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

حال می‌توانیم الگوریتم را بسازیم.

قضیه ۳ *$L(x_1, y_1, x_2, y_2)$ می‌تواند در $O(max\{\log|x_1|, \log|y_1|, \log|x_2|, \log|y_2|\})$ گام محاسبه گردد.*

برهان. بدون از دست دادن کلیت می‌توان فرض کرد که $0 \leq x_1 \leq x_2$ و $0 \geq y_2 \geq y_1$ ((x_1, y_1) و (x_2, y_2) را در صورتی که $0 < x_1 \leq x_2$ و $0 > y_2 \geq y_1$ باشد، به ترتیب به $(-x_1, y_1)$ و $(-x_2, y_2)$ تغییر می‌دهیم.) چون x_1 ، y_1 ، x_2 و y_2 اعدادی گویا هستند، اعداد صحیح a ، b و c را می‌توان چنان پیدا کرد که خط $ax+by = c$ از نقاط (x_1, y_1) و (x_2, y_2) بگذرد. در صورتی که $a = 0$ یا $b = 0$ باشد، $L(x_1, y_1, x_2, y_2)$ به طور بدیهی قابل محاسبه است. در غیر این صورت با استفاده از لم ۱ می‌توان بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه

مشترک a و b و اعداد صحیح p و q را چنان پیدا کرد که $ap+bq=d$. چون $(x,y)=(\frac{c}{d}p,\frac{c}{d}q)$ در معادله‌ی $ax+by=c$ صدق می‌کند، با استفاده از لم ۲، همه‌ی جواب‌های صحیح معادله را به شکل زیر می‌توان بیان کرد:

$$x=\frac{c}{d}p+\frac{b}{d}k,\quad y=\frac{c}{d}q-\frac{a}{d}k,\quad k\in\mathbb{Z}$$

چون $x_1\leq x\leq x_2$ نابرابری زیر باید برقرار باشد:

$$(x_1-\frac{c}{d}p)(\frac{d}{b})\leq k\leq(x_2-\frac{c}{d}p)(\frac{d}{b})$$

بنابراین،

$$L(x_1,y_1,x_2,y_2)=\left\lfloor(x_2-\frac{c}{d}p)\frac{d}{b}\right\rfloor-\left\lceil(x_1-\frac{c}{d}p)\frac{d}{b}\right\rceil+1$$

زمان‌برترین قسمت الگوریتم همان استفاده از الگوریتم تعمیم‌یافته‌ی اقلیدسی است که در لم ۱ اشاره گردید. بنابراین در $O(max\{\log a,\log b\})$ گام می‌توان نقاط را شمارش کرد. ■

۲.۱ الگوریتمِ شمارشِ نقاطِ مشبکه‌ای برایِ مثلث‌ها

در این بخش، الگوریتم بازگشتی کوتاهی برای شمارش نقاط مشبکه‌ای در یک مثلث قائم‌الزاویه ارائه می‌کنیم. برای ساخت الگوریتم ابتدا به بیان چند تعریف و لم می‌پردازیم.

تعریف ۲ *فرض کنید a، b و c اعداد صحیح مثبت باشند. مثلث قائم‌الزاویه‌ی $T(a,b,c)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:*

$$T(a,b,c)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|ax+by\leq c,x>0,y>0\}$$

تعریف ۳ *فرض کنید a، b و c اعداد صحیح مثبت باشند. تعداد نقاط مشبکه‌ای با مختصات صحیح و مثبت درون و روی مثلث $T(a,b,c)$ را با $N(a,b,c)$ نشان می‌دهیم.*

از تعریف، لم زیر به وضوح برقرار است.

لم ۴ *فرض کنید a، b و c اعداد صحیح مثبت باشند. در این صورت،*
$N(a,b,c)=N(b,a,c)$

لم ۵ *فرض کنید a و c اعداد صحیح مثبت باشند. در این صورت:*
$N(a,a,c)=\frac{1}{2}\left\lfloor\frac{c}{a}\right\rfloor(\left\lfloor\frac{c}{a}\right\rfloor-1)$.

لم ۶ *فرض کنید a، b و c اعداد صحیح مثبت باشند و $a>b$. فرض کنید $m=\left\lfloor\frac{c}{a}\right\rfloor$، $h=\frac{c-am}{b}$، $k=\left\lfloor\frac{a-1}{b}\right\rfloor$ و $c'=c-b(km+\lfloor h\rfloor)$. در این صورت معادله‌ی زیر برقرار است:*

$$N(a,b,c)=N(a-bk,b,c')+\frac{1}{2}km(m-1)+m\lfloor h\rfloor$$

برهان. ابتدا، به بیان مساحت مثلث $T(a,b,c)$ با استفاده از $N(a,b,c)$ می‌پردازیم. در صورتی که با دقت به مربع‌های واحد در شکل صفحه‌ی بعد نگاه کنیم، یعنی مربع‌هایی واقع در مثلث قائم‌الزاویه که چهار رأس آن نقاط مشبکه‌ای می‌باشند، تعداد مربع‌های واحد در $T(a,b,c)$ با $N(a,b,c)$ برابر است. حال بقیه‌ی مثلث $T(a,b,c)$ را به چند ذوزنقه‌ی S_i و یک مثلث R تقسیم می‌کنیم. برای هر عدد صحیح i که $0<i\leq m$ ذوزنقه‌ی S_i را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

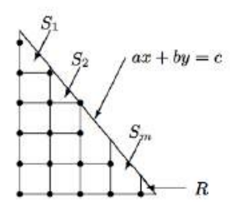
$$S_i=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|ax+by\leq c,i-1\leq x\leq i,\; y\geq\left\lfloor\frac{c-ai}{b}\right\rfloor\}$$

مثلث R نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|ax+by\leq c,x\geq m,y\geq 0\}$$

پس، مساحت مثلث $T(a,b,c)$ برابر است با:

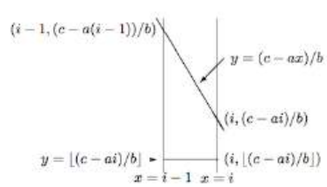
$$|T(a,b,c)|=N(a,b,c)+\sum_{i=1}^{m}|S_i|+|R|$$



حال با توجه به اینکه مثلث R شامل سه رأس $(m,0)$، (m,h) و $(\frac{c}{a},0)$ است، به راحتی قابل بررسی است که $|T(a,b,c)|=\frac{c^2}{2ab}$ و $|R|=\frac{1}{2}h(\frac{c}{a}-m)$ می‌باشد. مساحت S_i نیز به راحتی از طریق رابطه‌ی زیر قابل محاسبه است:

$$|S_i|=\frac{1}{2}(\frac{c-a(i-1)}{b}-\left\lfloor\frac{c-ai}{b}\right\rfloor+\frac{c-ai}{b}-\left\lfloor\frac{c-ai}{b}\right\rfloor)$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{a}{b}+2\{\frac{c-ai}{b}\})$$



بنابراین، $N(a,b,c)$ از طریق رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$N(a,b,c)=|T(a,b,c)|-|R|-\sum_{i=1}^{m}|S_i|$$

$$= \frac{c^{۲}}{۲ab} - \frac{h}{۲}(\frac{c}{a} - m) - \frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{m}(\frac{a}{b} + ۲\{\frac{c-ai}{b}\})$$

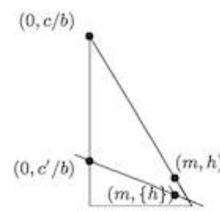
$$= \frac{cm}{۲b} + \frac{h}{۲}m - \frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{m}(\frac{a}{b} + ۲\{\frac{c-ai}{b}\})$$

برابری سوم با توجه به اینکه $c - bh = am$ است، برقرار می‌باشد، چرا که خط $ax + by = c$ از نقطه‌ی (m,h) می‌گذرد.

به راحتی می‌توان مشاهده کرد که $a - bk > ۰$ ، چون $k = \lfloor \frac{a-۱}{b} \rfloor$. زمانی که خط $ax + by = c$ از نقاط $(۰, \frac{c}{b})$ و (m,h) می‌گذرد، خط $(a-bk)x + by = c'$ از نقاط $(۰, \frac{c'}{b})$ و $(m,\{h\})$ عبور می‌کند. بنابراین، مشابه با بحثی که برای $N(a,b,c)$ داشتیم، برای $N(a-bk,b,c')$ خواهیم داشت:

$$N(a-bk,b,c') =$$

$$\frac{c'm}{۲b} + \frac{\{h\}}{۲}m - \frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{m}(\frac{a-bk}{b}) + ۲\{\frac{c'-(a-bk)i}{b}\})$$



در نتیجه:

$$N(a,b,c) - N(a-bk,b,c') =$$

$$\frac{cm}{۲b} - \frac{c'm}{۲b} + \frac{h}{۲}m - \frac{\{h\}}{۲}m$$

$$-\frac{۱}{۲}\sum_{j=۱}^{m}((\frac{a}{b} + ۲\{\frac{c-aj}{b}\}) - (\frac{a-bk}{b} + ۲\{\frac{c'-(a-bk)j}{b}\}))$$

$$= \frac{cm}{۲b} - \frac{(c-b(km+\{h\}))m}{۲b} + \frac{۱}{۲}m\lfloor h \rfloor$$

$$-\frac{۱}{۲}\sum_{j=۱}^{m}((\frac{a}{b} + ۲\{\frac{c-aj}{b}\}) - (\frac{a}{b} - k + ۲\{\frac{c-aj}{b}\}))$$

$$= \frac{(km+\lfloor h \rfloor)m}{۲} + \frac{۱}{۲}m\lfloor h \rfloor - \frac{۱}{۲}\sum_{j=۱}^{m}k$$

$$= \frac{k}{۲}m(m-۱) + m\lfloor h \rfloor$$

لذا لم مورد نظر اثبات می‌شود. ■

قضیه ۷ *فرض کنید a ، b و c اعداد صحیح مثبت باشند. $N(a,b,c)$ را می‌توان در $O(\max\{\log a, \log b\})$ گام محاسبه کرد.*

برهان. فرض کنید که $k = \lfloor \frac{a-۱}{b} \rfloor$ باشد. به راحتی قابل بررسی است که $a - bk$ زمانی با b برابر است که a بر b بخش‌پذیر باشد و $a - bk$ زمانی با $a \mod b$ برابر است که a بر b بخش‌پذیر نباشد. بنابراین، $۰ < a - bk \le b$ برقرار است.

با استفاده از لم ۴، بدون کاستن از کلیت می‌توان فرض کرد که $a \ge b$ در بحث زیر برقرار است. با استفاده از لم ۵ و لم ۶ و این واقعیت که $۰ < a - bk \le b$ ، می‌توان از الگوریتم زیر برای محاسبه‌ی $N(a,b,c)$ استفاده کرد.

Algorithm ۱ calcN(a,b,c)

a, b and c are positive integers such that $a \ge b$

> $m \leftarrow \lfloor \frac{c}{a} \rfloor$
> **if** $a = b$ **then**
>   **return** $\frac{1}{2}m(m-1)$
> **else**
> $k \leftarrow \lfloor \frac{a-1}{b} \rfloor$
> $h' \leftarrow \lfloor \frac{c-am}{b} \rfloor$
>   **return** calcN$(b, a-bk, c-b(km+h')) + \frac{1}{2}m(m-1) + mh'$
> **end if**

حال زمان اجرای محاسبه‌ی calcN را بررسی می‌کنیم. مشاهده می‌شود که زمان اجرا متناسب با تعدا فراخوانی بازگشتی الگوریتم calcN می‌باشد. زمانی که a بر b بخش‌پذیر نباشد، یک فراخوانی بازگشتی انجام می‌دهد که پارامترهای (a,b) را به $(b, a \mod b)$ تغییر می‌دهد. زمانی که a بر b بخش‌پذیر است، یک فراخوانی نهایی بازگشتی انجام می‌دهد که پارامترهای (a,b) را به (b,b) تغییر می‌دهد. بنابراین تعداد فراخوانی‌های بازگشتی الگوریتم calcN برابر با تعداد فراخوانی‌های بازگشتی در الگوریتم اقلیدسی برای محاسبه‌ی بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک است. در نتیجه این الگوریتم $O(\log a)$ مرحله انجام می‌دهد. ■

توجه داشته باشید که الگوریتم calcN فقط با اعداد صحیح سر و کار دارد و این سادگی الگوریتم کلی را میسر می‌سازد.

۳.۱ الگوریتمی برای چندضلعی‌ها

در این بخش، الگوریتمی برای شمارش تعداد نقاط مشبکه‌ای در یک چندضلعی داده شده (درون و روی اضلاع) ارائه می‌دهیم. ابتدا ایده‌های اصلی این الگوریتم را توصیف می‌کنیم و سپس به جزئیات می‌پردازیم.

یک چندضلعی به طور صوری به صورت زیر تعریف می‌شود: فرض کنید P یک چندضلعی گویای دوبعدی با رئوس $p_۰, p_۱, \ldots, p_n$ باشد

به‌طوری که $p_n = p_0$ و اضلاع آن پاره‌خط‌هایی باشند که هر پاره‌خط p_i را به p_{i+1} متصل می‌سازد. هر رأس p_i مختصات (x_i, y_i) دارد که در آن x_i و y_i اعداد گویای مثبت هستند. فرض می‌کنیم که رئوس به ترتیب ساعتگرد باشند و چندضلعی در حالت خاص نباشد، به عبارت دیگر دو ضلع فقط در یک نقطه می‌توانند متقاطع باشند و هیچ نقطه‌ای به عنوان رأس بیش از یک‌بار ظاهر نگردد. توجه داشته باشید که چندضلعی لزوما محدب نیست.

حال به تشریح ایده‌های اصلی الگوریتم می‌پردازیم. برای سادگی، فرض کنید که هیچ نقطه‌ی مشبکه‌ای روی اضلاع چندضلعی نباشد و هیچ یک از رئوس P مختصات صحیحی نداشته باشند. برای شمارش تعداد نقاط مشبکه‌ای، از رابطه‌ای مشابه رابطه‌ای که برای محاسبه‌ی مساحت آنها استفاده می‌گردد، بهره می‌بریم. مساحت یک چندضلعی P می‌توان با رابطه‌ی زیر محاسبه کرد:

$$area(P) = |\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - x_{i-1})(y_i - y_{i-1})}{2}|$$

چرا که اگر فرض کنیم که ناحیه‌ی D_i ذوزنقه‌ای باشد که رئوس آن (x_{i-1}, y_{i-1})، $(x_{i-1}, 0)$، $(x_i, 0)$ و (x_i, y_i) باشد. در نتیجه مساحت چندضلعی P از طریق رابطه‌ی زیر می‌تواند محاسبه شود:

$$area(P) = |\sum_{i=1}^{n} sgn(x_i - x_{i-1})|D_i||$$

به‌طوری که $sgn(x)$ در صورتی که $x > 0$ باشد، برابر با یک و در غیر این‌صورت برابر با -1 است. تعداد نقاطه‌های مشبکه‌ای در چندضلعی P می‌تواند از رابطه‌ی زیر محاسبه گردد:

$$num(P) =$$

$$|\sum_{i=1}^{n} sgn(x_i - x_{i-1})(\#\{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 | (x,y) \in D_i\})|$$

مسئله‌ی باقی‌مانده نحوه‌ی محاسبه‌ی تعداد نقاط مشبکه‌ای در ذوزنقه‌ی D_i می‌باشد. تمام کاری که بایستی انجام داد این است که ذوزنقه‌ی D_i را به یک مستطیل و یک مثلث قائم‌الزاویه تقسیم کنیم، چرا که شمارش تعداد نقاط مشبکه‌ای مستطیل ساده است و تعداد نقاط مشبکه‌ای در یک مثلث قائم‌الزاویه نیز می‌تواند از طریق الگوریتم calcN که در بخش قبل ارائه شد، محاسبه گردد.

برمبنای ایده‌های فوق، الگوریتم مورد نظر را می‌سازیم. اگر نقاط مشبکه‌ای روی اضلاع چندضلعی P وجود داشته باشند یا برخی از رئوس P مختصات صحیح داشته باشند، باید الگوریتم را تغییر دهیم. قبل از تشریح الگوریتم، ابتدا یک نمادگذاری را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۴ *فرض کنید که x_{i-1} ، y_{i-1} ، x_i و y_i اعداد صحیح مثبتی باشند که $x_i \neq x_{i-1}$. حال $N(x_{i-1}, y_{i-1}, x_i, y_i)$ را تعداد نقاط مشبکه‌ای که در داخل یا مرز ذوزنقه‌ی D_i به رئوس (x_{i-1}, y_{i-1}) ، $(x_{i-1}, 0)$ ، $(x_i, 0)$ و (x_i, y_i) قرار دارد، تعریف می‌کنیم.*

ابتدا الگوریتم را برای یک چندضلعی محدب بیان می‌کنیم. تعداد نقاط مشبکه‌ای در چندضلعی P می‌تواند از رابطه‌ی زیر محاسبه گردد:

$$num(P) = |\sum_{i=1}^{n}(N(D_i) - u(P,i))|$$

به‌طوری‌که:

$$N(D_i) =$$

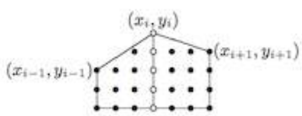
$$\begin{cases} N(x_{i-1}, y_{i-1}, x_i, y_i) & x_{i-1} < x_i \\ L(x_i, y_i, x_{i-1}, y_{i-1}) - N(x_i, y_i, x_{i-1}, y_{i-1}) & x_{i-1} > x_i \\ 0 & x_{i-1} = x_i \end{cases}$$

و

$$u(P,i) =$$

$$\begin{cases} \lfloor y_i + 1 \rfloor & \text{if} \quad x_i \text{ is integer and } x_{i-1} < x_i < x_{i+1} \\ \lceil -y_i \rceil & \text{if} \quad x_i \text{ is integer and } x_{i-1} > x_i > x_{i+1} \end{cases}$$

به راحتی می‌توان بررسی کرد که رابطه‌های داده شده به درستی تعداد نقاط مشبکه‌ای را در یک چندضلعی P نشان می‌دهند. توجه داشته باشید که $u(P,i)$ گنجانیده شده تا از شمارش دوباره اجتناب گردد. در صورتی که $u(P,i)$ وجود نداشته باشد، رابطه‌ی مورد نظر ممکن است برخی نقاط را دوبار در نظر بگیرد.

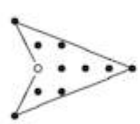


برای چندضلعی‌های نامحدب، باید در رابطه تغییراتی را انجام دهیم چرا که برخی رئوس P ممکن است اشتباها به عنوان نقاط داخلی چندضلعی و نه رئوس آن‌ها شمارش گردند. برای اجتناب از این حالت، $v(P,i)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$v(P,i) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad (x_i, y_i) \in \mathbb{Z}^2, x_{i-1}, x_{i+1} < x_i \text{ and} \\ & \begin{vmatrix} x_i - x_{i-1} & x_{i+1} - x_i \\ y_i - y_{i-1} & y_{i+1} - y_i \end{vmatrix} > 0 \\ -1 & \text{if} \quad (x_i, y_i) \in \mathbb{Z}^2, x_{i-1}, x_{i+1} > x_i \text{ and} \\ & \begin{vmatrix} x_i - x_{i-1} & x_{i+1} - x_i \\ y_i - y_{i-1} & y_{i+1} - y_i \end{vmatrix} < 0 \end{cases}$$

به‌طوری که $|A|$ دترمینان ماتریس A می‌باشد و قرار دهید:

$$num(P) = |\sum_{i=1}^{n}(N(D_i) - u(P,i) - v(P,i))|$$



بنابراین، یک الگوریتم خطی از تعداد رئوس چندضلعی برای شمارش

تعداد نقاط مشبکه‌ای در یک چندضلعی داریم. با اینکه این الگوریتم فرض می‌کند که رئوس چندضلعی باترتیب ساعتگرد داده شده‌اند، می‌توان مشاهده کرد که این الگوریتم تعداد نقاط مشبکه‌ای در داخل چندضلعی را در حالتی که با ترتیب پادساعتگرد داده شوند نیز، محاسبه می‌کند.

نتیجه‌گیری و کارهای آتی

در بخش الگوریتمی هندسه‌ی اعداد، الگوریتمی از پیچیدگی پیدا کردن ب.م.م دو عدد صحیح برای شمارش نقاط مشبکه‌ای در یک پاره‌خط ارائه گردید. الگوریتمی که در صورتی که از ویژگی‌های اثبات شده از هندسه‌ی اعداد استفاده نمی‌کردیم، چه بسا مرتبه‌ی زمانی آن بسیار افزایش می‌یافت. با استفاده از همین تکنیک و از همین پیچیدگی زمانی، الگوریتمی برای شمارش نقاط مشبکه‌ای در یک مثلث ارائه گردید و نهایتا یک الگوریتم خطی از تعداد رئوس چندضلعی برای شمارش تعداد نقاط مشبکه‌ای در یک چندضلعی ارائه شد. از طرفی چون این الگوریتم نیازی به ذخیره‌ی مختصات همه‌ی رئوس چندضلعی داده شده در یک زمان ندارد فضای کمتری نسبت به الگوریتم‌های شمارشی که از یک الگوریتم مثلث‌بندی استفاده می‌کنند، نیاز دارد. این کار، الگوریتم را برای پیاده‌سازی نیز ساده می‌کند. کارهای آتی برای این مسئله می‌تواند تعمیم الگوریتم به ابعاد بالاتر از جمله بعد سوم باشد. از طرفی دیگر، با تجمیع ابزارهایی که هندسه‌ی اعداد به‌دست می‌دهد، شاید بتوان به پیچیدگی محاسباتی کمتری نسبت به پیچیدگی محاسباتی الگوریتم‌های گفته شده دست یافت.

مراجع

[1] A.K.Lenstra, Lattices and factorization of polynomialsm Report IW, Amsterdam (1981).

[2] A.I. Barvinok, A polynomial-time algorithm for counting integral points in poly- hedra when the dimension is fixed, in Proceedings of 34th Symposium on the Foun- dations of Computer Science (FOCS '93), pp. 566–572, IEEE Computer Society Press, New York, 1993.

[3] M. Beck and S. Robins, Explicit and efficient formulas for the lattice point count inside rational polygons using Dedekind - Rademacher sums, Discrete and Com- putational Geometry, Vol. 27, No. 4, pp. 443–459, 2002.

[4] B. Chazelle, Triangulating a simple polygon in linear time Discrete and Computational Geometry, Vol. 6, No. 5, pp. 485–524, 1991.

[5] J.A. De Loera, The many aspects of counting lattice points in polytopes, Mathematische Semesterberichte manuscript (http://www.math.ucdavis.edu/˜ deloera/RECENT WORK/semesterberichte.pdf).

[6] J.A. De Loera, R. Hemmecke, J. Tauzer, and R. Yoshida, Effective lattice point counting in rational convex polytopes, The Journal of Symbolic Computation, Vol.38, No. 4, pp. 1273–1302, 2004.

[7] K. Kolodziejczyk, Hadwiger - Wills-type higher dimensional generalizations of Pick's theorem, Discrete and Computational Geometry, Vol. 24, No. 2-3, pp. 355– 364, 2000.

[8] G. Pick, Geometrisches zur Zahlenlehre Sitzungber. Lotos, Naturwissen Zeitschrift Prague, Vol. 19, pp. 311–319, 1899.

[9] Gruber, Peter, Convex and discrete geometry, Springer Grundlehren Series (vol.336) 2007.

[10] . J. Hans-Gill, M.Raka and R. Sehmi, On Conjectures of Minkowski and Woods for n=7, Journal of Number Theory, Vol 129 (2009), 1011-1033.

[11] C. T. McMullen, Minkowski's conjecture, well rounded lattices and topological dimension, Journal of the American Mathematical Society 18(2005)711-734.

[12] T.H. Cormen, C.E. Leiserson, and R.L. Rivest, Introduction to Algorithms, MIT Press, 1990.

استخراج تصادف

کاوه حسینی

استخراج‌کننده[1]ها یکی از موضوعاتی است که در دهه‌ی اخیر توجه بسیاری از ریاضی‌دانان و دانشمندان علوم کامپیوتر نظری را به خود جلب کرده است. در اینجا سعی می‌کنیم علاوه بر ارائه‌ی مقدمات و مطالب اولیه‌ی مربوطه، پیشرفت‌های اخیر در این زمینه را نیز مرور کنیم. مراجع اصلی مورد استفاده، [Sha۱۱b]، [Gab۱۱]، [Wig۱۱] [Sha۰۲] بوده اند.

۱ پیشگفتار

تصادف[2] در علوم کامپیوتر منبع مهمی به شمار می‌رود. برای مثال الگوریتم‌های بسیاری برای اجراشدن به بیت‌های تصادفی نیاز دارند. بیرون از علم کامپیوتر، دانشمندان دیگر از باستان‌شناسان گرفته تا زیست‌شناسان برای شبیه‌سازی فرایند های مختلف به اعداد تصادفی نیاز دارند. حال این سوال پیش می‌آید که این بیت‌های تصادفی را از کجا بدست آوریم؟ در اوایل قرن اخیر دانشمندانی که اعداد تصادفی نیاز داشتند در واقع سکه یا تاس می‌انداختند! در زیر تعدادی وبسایت معرفی شده است که اعداد تصادفی(؟) تولید می‌کند.

- www.fourmilab.ch/hotbits

با استفاده از زمان واپاشی ذرات رادیواکتیو اعداد تصادفی تولید می‌کنند. برای اطلاعات بیشتر در مورد روش تولید اعداد از سایت دیدن کنید.

- www.random.org

یک رادیو را روی فرکانسی تنظیم می‌کند که چیزی روی آن پخش نمی‌شود. سپس نویز حاصل از جریان هوا ضبط شده و برای حذف وابستگی‌های ممکن تغییرات دیگری روی آن اعمال می‌شود.

- www.stat.fsu.edu/~geo/diehard.html

در اینجا با استفاده از ترکیب نویز دیسک‌های قدیمی موسیقی کلاسیک و رپ، اعداد تصادفی تولید می‌شود.

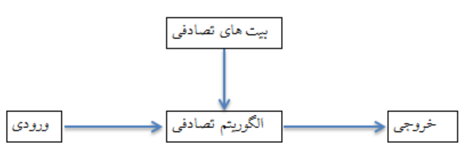
ولی یک سوال ممکن است پیش آید: از کجا اطمینان دارید که این بیت‌ها واقعا تصادفی هستند؟ (یعنی احتمال ۱ یا ۰ بودن هر بیت ½ است.) در روش اول با فرض درستی مکانیک کوانتوم می‌توان تضمین کرد که بیت‌های تولید شده واقعا تصادفی هستند. ولی در روشهای بعدی نمی‌توان چنین ادعا کرد. بنابراین گرچه ممکن است بتوان اعداد واقعا تصادفی از طبیعت دریافت کرد ولی تعداد زیادی ”منابع تصادفی ضعیف“[3] ارزان و قابل دسترس در اختیار داریم که می‌توان از آنها برای تولید بیت‌های تصادفی استفاده کرد.

هدف کلی استخراج‌کننده[4]ها، استخراج بیت‌های واقعا تصادفی از این منابع تصادفی ضعیف است. در این مقاله، انواع استخراج‌کننده‌ها، روشهای معمول ساخت آنها و برخی از پیشرفت‌های اخیر در این زمینه مرور می‌شود.

استخراج‌کننده‌ها دارای کاربردهای بسیار دیگری علاوه بر انگیزه‌ی اصلی مطرح‌شده هستند. تعدادی از این کاربردها نیز بررسی می‌شوند. الگوریتم‌ها به عنوان تعدادی از مقالات کلی‌نگر[5] در این زمینه [NTS۹۹]، [Sha۰۲]، [Vad۰۷]، [AB۰۹]، [Wig۱۱]، [Gab۱۱]، [Sha۱۱b] را ببینید.

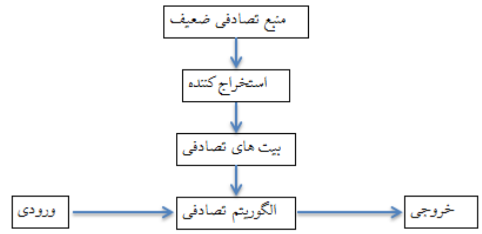
۲ انگیزه

شاید اصلی‌ترین انگیزه در ساخت استخراج‌کننده‌ها تهیه‌ی بیت‌های تصادفی موردنیاز برای الگوریتم‌های تصادفی باشد. در زیر شمای کلی از یک الگوریتم تصادفی را می‌بینید.



با توجه به توضیحات بخش قبل، برای تولید بیت‌های تصادفی مستقل و با توزیع یکنواخت از استخراج‌کننده استفاده می‌کنیم.

[1] Randomness Extractor
[2] Randomness
[3] Weak random sources
[4] Extractor
[5] Survey Paper



در بخش‌های بعدی انگیزه‌های بیشتری مطرح خواهد شد.

۳ استخراج‌کننده‌های قطعی

در این بخش استخراج‌کننده‌های قطعی[6] مورد بررسی قرار می‌گیرند. واژه‌ی "قطعی" برای ایجاد تمایز با استخراج‌کننده‌های بذردار[7] به کار می‌رود که در بخش بعدی بررسی می‌شوند.

انگیزه‌ی مطرح‌شده در بخش قبل به تعاریف زیر منجر می‌شود.

تعریف ۱. *فرض کنید $\mathcal{D}$ یک مجموعه باشد و $\epsilon \geq 0$. فرض کنید X یک توزیع احتمال[8] روی $\mathcal{D}$ باشد و*

$$Ext : \mathcal{D} \rightarrow \{0,1\}^m$$

آن‌گاه:

- Ext *یک ϵ-استخراج‌کننده[9] برای X است اگر* $d_{TV}(U_m, Ext(X)) \leq \epsilon$[10].
- Ext *یک ϵ-پخش‌کننده[11] برای X است اگر* $|Supp(Ext(X))| \geq (1-\epsilon)2^m$[12]

فرض کنید $\mathfrak{S}$ مجموعه‌ای از توزیع‌های احتمال روی $\mathcal{D}$ باشد. در این صورت

- Ext *یک ϵ-استخراج‌کننده برای $\mathfrak{S}$ است اگر* $d_{TV}(U_m, Ext(X)) \leq \epsilon$ *برای هر* $X \in \mathfrak{S}$.
- Ext *یک ϵ-پخش‌کننده برای $\mathfrak{S}$ است اگر* $|Supp(Ext(X))| \geq (1-\epsilon)2^m$ *برای هر* $X \in \mathfrak{S}$.

توجه کنید که شرط خاصی روی $\mathfrak{S}$ گذاشته نشده است . ولی هدف کلی را می‌توان این در نظر گرفت:

هدف: ساختن استخراج‌کننده برای خانواده‌های "بزرگ" از توزیع‌های احتمال "قابل قبول".

مینیمم‌آنتروپی[13]**:** اندازه‌گیری تعداد بیت‌های تصادفی موجود در یک منبع.

با یک مشاهده‌ی ساده شروع می‌کنیم. اگر

$$E : \mathcal{D} \rightarrow \{0,1\}^m$$

یک ۰-استخراج‌کننده برای X باشد آنگاه برای هر $x \in Supp(X)$، $P(X=x) \leq 2^{-m}$. (در غیر این صورت برای یک x' که $P[X=x'] > 2^{-m}$ داریم $P(Ext(X) = Ext(x')) > 2^{-m}$ که با $P(U_m = E(x')) = 2^{-m}$ متناقض است.) بنابراین یک شرط لازم برای استخراج m بیت از توزیع X این است که $\forall x \in Supp(X), P(X=x) \leq 2^{-m}$. این مشاهده به تعریف زیر از آنتروپی منجر می‌شود.

تعریف ۲. **(مینیمم‌آنتروپی)** *فرض کنید X یک توزیع احتمال باشد. مینیمم‌آنتروپی X را (که با $H_\infty(X)$ نشان داده می‌شود) به شکل زیر تعریف می‌کنیم.*

$$H_\infty(X) = \min_{x \in Supp(X)} \log_2 \frac{1}{P[X=x]}$$

بنابر توضیحات قبلی یک شرط لازم برای استخراج m بیت از توزیع X این است که مینیمم‌آنتروپی از m بیشتر باشد. می‌توانیم امیدوار باشیم که این شرط کافی هم باشد و یک استخراج‌کننده Ext برای همه‌ی منابع با مینیمم‌آنتروپی حداقل m موجود باشد، ولی این درست نیست. در واقع برای هر تابع

$$Ext : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$$

یک توزیع احتمال X با مینیمم‌آنتروپی برابر $n-1$ وجود دارد که Ext تابع ثابت است. (X را توزیع یکنواخت روی $S = \{x : Ext(x) = b\}$ بگیرید برای $|S| \geq 2^n/2$ که $b \in \{0,1\}$)

[6] Deterministic Extractors
[7] Seeded Extractors
[8] Probability Distribution
[9] ϵ-Extractor
[10] d_{TV} برابر است با نصف نرم l_1:

$$d_{TV}(X,Y) = \frac{1}{2}||X-Y||_{l_1} = \sum_{P(X=x)>P(Y=x)} P(X=x) - P(Y=x)$$

[11] ϵ-Disperser
[12] $Supp(X) = \{x \in \Omega | P(x) > 0\}$
[13] Minimum entropy

با استفاده از روش احتمالاتی[۱۴] می‌توان نشان داد استخراج‌کننده‌های قطعی برای کلاس‌های $\mathfrak{S}$ که دارای تعداد کمی توزیع هستند وجود دارد.

وجود استخراج‌کننده‌های قطعی[۱۵]: فرض کنید $\epsilon > 0$ و $m \le n$ و $\mathfrak{S}$ دارای حداکثر $2^{poly(\frac{n}{\epsilon})}$ توزیع احتمال روی $\{0,1\}^m$ باشد. وجود دارد $k = m + O(\log n + \log(1/\epsilon))$ به طوری که اگر برای هر $X \in \mathfrak{S}$ داشته باشیم $H_\infty(X) \ge k$ آن‌گاه Ext وجود دارد که $Ext : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^m$ و Ext یک ϵ-استخراج‌کننده است.

البته برای اهداف کاربردی می‌خواهیم Ext در زمان چندجمله‌ای قابل ساخت باشد ولی تابع حاصل از استدلال با روش احتمالاتی لزوما چنین نیست.

مثال ۳. استخراج‌کننده‌ی فون نویمان[۱۶]: *استخراج‌کننده‌های قطعی به زمان فون‌نویمان بر می‌گردد که در [vN51] مسأله‌ی استخراج یک بیت تصادفی از دنباله از نتایج پرتاب یک سکه ناسالم را بررسی کرد.*

تعریف ۴. *بگیرید $\delta < 1$ ، $\mathcal{D} = \{0,1\}^n$. مجموعه‌ی توزیع‌های B_δ را منبع فون‌نویمان می‌نامیم اگر:*

$$B_\delta = \{X = (X_1, \ldots, X_n)|$$

$$X_i\text{ها مستقل و هم‌توزیع هستند.}\}$$

که X_i حاصل پرتاب سکه ناسالم با احتمال '۱' آمدن δ است.

می‌خواهیم از B_δ یک بیت تصادفی استخراج کنیم.

روش فون‌نویمان: به (X_1, X_2) نگاه می‌کنیم. احتمال $(0,1)$ و $(1,0)$ یکسان است. می‌توانیم اگر نتیجه $(1,0)$ بود عدد ۱ و اگر $(0,1)$ بود عدد ۰ را به عنوان خروجی بدهیم. اگر نتیجه $(0,0)$ یا $(1,1)$ باشد، به (X_3, X_4) نگاه می‌کنیم و همانند قبل عمل می‌کنیم. به همین ترتیب تا اولین زمان دیدن $(0,1)$ یا $(1,0)$ زوج بیت‌های بعدی را بررسی می‌کنیم.اگر تا پایان دنباله $(0,1)$ یا $(1,0)$ دیده نشد ۰ برمی‌گردانیم. احتمال اینکه تا پایان $(0,1)$ یا $(1,0)$ دیده نشود به شکل نمایی بر حسب n کاهش می‌یابد . بنابراین احتمال خطای ϵ به شکل $\epsilon = \exp(n)$ خواهد بود.

می‌توان این مسأله را به شکل کلی تری در نظر گرفت. فرض کنید احتمال سکه‌ها لزوما یکسان نباشد ولی شرط مستقل بودن سکه‌ها هنوز فرض شده است. می‌توان نشان داد که $f(X) = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ یک استخراج‌کننده برای منبع جدید با $\epsilon = \exp(n)$ است. که عملگر جمع در میدان دو عضوی است.

عدم امکان استخراج از منبع سانتا ـ وزیرانی[۱۷]

فرض کنید می‌خواهیم شرط استقلال از مثال قبل را نیز برداریم. سانتا و وزیرانی [SV86] منابع با مسأله زیر را بررسی کردند.

$$\forall 1 \le i \le n, \forall x_1 x_2 \ldots x_n \in \{0,1\}$$

$$1 - \delta \le P[X_i = 1 | X_1 = x_1, \ldots, X_{i-1} = x_{i-1}] \le \delta$$

در [SV86] نشان داده شد که هیچ استخراج‌کننده‌ی قطعی وجود ندارد که حتی بتواند یک بیت تصادفی از منبع با شرط بالا استخراج کند. به عبارت دیگر خانواده‌هایی از توزیع‌ها وجود دارند که دارای ساختار منظمی می‌هستند ولی باز هم نمی‌توان از آن بیت تصادفی استخراج کرد. در واقع این خبر بدی برای شبیه‌سازی الگوریتم‌های تصادفی -که به عنوان انگیزه‌ی اصلی استخراج‌کننده‌ها مطرح شد- خواهد بود. این مشاهده منجر به ارائه‌ی رده‌ی دیگری از استخراج‌کننده‌ها به نام استخراج‌کننده‌های بذردار شد که در بخش بعد مورد مطالعه قرار می‌گیرند.

استخراج‌کننده‌های قطعی کاربردهای دیگری در پیچیدگی محاسبه دارند که در بخش بعد تعدادی از آنها را بررسی می‌کنیم.

۱.۳ انگیزه‌های دیگر

در اینجا تعدادی دیگر از انگیزه‌های ساخت استخراج‌کننده‌های قطعی را مطرح می‌کنیم.

استخراج‌کننده‌های قطعی در ناتصادفی سازی[۱۸] و شبه‌تصادف[۱۹]

مبحث ناتصادفی سازی با الگوریتم‌های تصادفی سرو کار دارد و هدف آن کاهش، یا به طور ایدآل، حذف کامل بیت‌های تصادفی مورداستفاده است. یکی از ابزارهای مفید در این رابطه ساختن اشیاء شبه‌تصادفی است(اشیایی که با احتمال بالا دارای ویژگی‌های اشیاء تصادفی هستند). فرض کنید خانواده‌ی نه‌چندان بزرگ از توزیع‌های احتمال داده شده است. به سادگی می‌توان نشان داد که یک تابع تصادفی با احتمال بالایی یک استخراج‌کننده‌ی قطعی برای این خانواده

[۱۴] Probabilistic Method
[۱۵] Deterministic Extractor
[۱۶] Von-Neumann Extractor
[۱۷] Santha-Vazirani Sources
[۱۸] Derandomization
[۱۹] Pseudorandomness

است. (برای اثبات، احتمال این را در نظر بگیرید که یک تابع خاص استخراج‌کننده نباشد. سپس روی همه‌ی چنین پیشامدهایی اجتماع بگیرید.)

می‌توان گفت هدف اصلی پیچیدگی محاسبه پیدا کردن کران‌های پایین برای توابع است. این مسأله را می‌توان به عنوان مسأله‌ی ساخت اشیای شبه‌تصادفی در نظر گرفت. یک تابع تصادفی را به احتمال زیاد نمی‌توان با یک مدار بولی با سایز چندجمله‌ای محاسبه کرد. حال اگر بتوان یک تابع در NP با این ویژگی پیدا کرد می‌توان نتیجه گرفت $NP \nsubseteq P/poly$ و در نتیجه $P \neq NP$.

درک بهتر در ساخت توابع با ویژگی‌های "ساده"ی شبه‌تصادفی (مثل استخراج‌کننده بودن برای یک خانواده‌ی خاص از توزیع‌های احتمال) ممکن است به ساخت توابع با ویژگی "نهایی" شبه‌تصادفی (مثل داشتن پیچیدگی مداری بالا) کمک کند.

ویژگی‌های شبه‌تصادفی مفید استخراج‌کننده‌ها

کدام یک از ویژگی‌های استخراج‌کننده‌ها طبیعی هستند؟ کلاس $\mathcal{C}$ از توزیع‌های احتمال یکنواخت روی زیرمجموعه‌های $\{0,1\}^n$ را در نظر بگیرید.فرض کنید Ext یک استخراج‌کننده‌ها برای $\mathcal{C}$ باشد که یک بیت استخراج می‌کند. Ext یک رنگ‌آمیزی $\{0,1\}^n$ است که توسط آن هر زیر مجموعه مثل X به شکل متعادلی با دو رنگ، رنگ آمیزی شده است. به طور خاص هیچ زیر مجموعه‌ها تک‌رنگ نیست. در فصل‌های بعدی استخراج‌کننده‌های مشابهی برای منابع آفینی ارایه می‌دهیم.

قدرت تصادف ضعیف

یکی از مسایل اصلی در پیچیدگی محاسبه، بررسی تاثیر وجود بیت‌های تصادفی در افزایش توان محاسباتی است.

اگر به جای بیت‌های کاملا تصادفی از منابع تصادفی[20] ضعیف استفاده کنیم روی توان محاسباتی چه تاثیری خواهد داشت؟

درک بهتر از پاسخ سوال بالا می‌تواند ما را به پاسخ سوال اولیه (آیا تصادف در افزایش توان محاسباتی تاثیری دارد؟) نزدیک تر کند.

۲.۳ منابع تصادفی مختلف

۱.۲.۳ منابع آفینی

۱.۱.۱.۴ منابع آفینی[21] ـ میدان‌های کوچک

می‌توان ساختارهای جبری مختلفی روی دامنه‌ی $\mathcal{D}$ در نظر گرفت.

[20] Source of Randomness
[21] Affine Source

برای مثال $\mathcal{D} = \mathbb{F}_2^n$ و خانواده‌ی زیر از توزیع‌های احتمال را در نظر بگیرید.

$$L_{2,k} = \{X|$$

$X\}$روی زیرفضاهای k-بعدی آفینی یکنواخت است.

برای k به اندازه‌ی کافی بزرگ قضیه‌ی زیر وجود یک استخراج‌کننده برای خانواده‌ی بالا را تضمین می‌کند.

قضیه ۵. *فرض کنید* $k > (\frac{1}{2}+\alpha)n$ *و*

$$f(x_1\dots,x_n) = x_1x_2 + x_3x_4 + \cdots + x_{n-1}x_n$$

بنابراین f یک ϵ-استخراج‌کننده برای $L_{2,k}$ است که

$$\epsilon = \exp(-\alpha n)$$

حال سوال این است که آیا برای k کوچک‌تر استخراج‌کننده‌های مشابهی وجود دارد؟

می‌توان نشان داد برای k لگاریتمی برحسب n تقریبا هر تابعی استخراج‌کننده خواهد بود. اثبات این قضیه نیز به روش احتمالاتی است. ولی یافتن یک تابع صریح f (قابل محاسبه در زمان چندجمله ای) مسأله‌ی بسیار مشکلی است. یکی از قضایای اساسی در این زمینه قضیه‌ی زیر از بورگین[22] است.

قضیه ۶. **[Bou07]** *تابع f (قابل محاسبه در زمان چندجمله ای) ϵ-استخراج‌کننده برای $L_{2,k}$ وجود دارد به طوری که $\epsilon = \exp(-\Omega(n))$ و $k = \Omega(n)$. در واقع f یک چندجمله‌ای با درجه‌ی ثابت (تابعی از n/k) بر حسب متغیرهای X_i است.*

اثبات قضیه پیچیده است و از ابزارهای پیشرفته‌ای از ترکیبیات حسابی[23] استفاده می‌کند. یکی از قضایای مفید در اثبات قضایای مشابه بالا، قضیه‌ی زیر است.

قضیه ۷. **[Bou08]** *بگیرید $\mathcal{X} : \mathbb{F}_q \to \mathbb{C}$ یک سرشت جمعی[24] غیربدیهی باشد. فرض کنید $A_1,\dots,A_s \subset \mathbb{F}_q$ که $|A_i| > p^\delta$ و $s > C/\delta$ برای C به اندازه‌ی کافی بزرگ، در این صورت*

$$|\sum_{a_i\in A_i} \mathcal{X}(a_1,\dots,a_s)| \le p^{-\delta'}$$

که $\delta' > C^{-s}$.

[22] Jean Bourgain
[23] Arithmetic Combinatorics
[24] Additive Character

۲.۱.۱.۴ منابع آفینی ـ میدان‌های بزرگ

در ادامه نشان می‌دهیم اگر اندازه‌ی میدان با n بزرگ شود مسأله‌ی استخراج از زیرفضاها بسیار ساده‌تر خواهد شد و قضایایی که دراین زمینه وجود دارند نسبت به قضایای قبلی بسیار قوی‌تر هستند.

بگیرید $\mathcal{D} = \mathbb{F}_p^n$ که p عدد اول بزرگتر از n^4 است. خانواده‌ی توزیع‌های $L_{p,k}$ را همانند قبل تعریف می‌کنیم. قضیه‌ی زیر از گابیزون[۲۵] و راز[۲۶] [GR۰۵] وجود یک استخراج‌کننده برای از خانواده را حتی برای $k = 1$ تضمین می‌کند.

قضیه ۸. **[GR۰۵]** یک *ϵ-استخراج کننده f صریح برای $L_{p,k}$ برای هر $k \geq 1$ و $\epsilon = 1/n$ وجود دارد.*

مسأله‌ی بهبود ϵ به $p^{\Omega(k)}$ هنوز باز است.

قضیه‌ی بالا از قضیه‌ی ویل[۲۷] در هندسه جبری استفاده می‌کند.

قضیه ۹. *فرض کنید $\mathcal{X}$ یک سرشت مربعی[۲۸] برای $\mathbb{F}_p$ باشد. فرض کنید $g \in \mathbb{F}_p[z]$ یک چندجمله‌ای با درجه d باشد که مربع یا ثابت نیست. برای Z یکنواخت روی $\mathbb{F}_p$*

$$|E_Z[\mathcal{X}(g(Z))]| \leq d/\sqrt{p}$$

می‌توان خانواده‌ی زیر را روی $\mathbb{F}_p$ تعریف کرد.

$$P_d = \{X = g(Z) : \mathbb{F}_p \text{ یکنواخت روی } Z\}$$

حال قضیه‌ی ویل را می‌توان بدین شکل تفسیر کرد: $\mathcal{X}$ یک ϵ-استخراج کننده برای P_d با $\epsilon = d/\sqrt{p}$ است. برای اثبات قضیه‌ی گابیزون-راز برای $k - 1$، چندجمله‌ای زیر را تعریف می‌کنیم:

$$g(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{2i+1}$$

توجه کنید که برای هر زیر فضای ۱-بعدی V، تحدید g روی V یک چندجمله‌ای ناصفر از Z است با درجه‌ی حداکثر $2n + 1$ که مربع نیست. حال استخراج‌کننده‌ی موردنظر با $f(x) = \mathcal{X}(g(x))$ به دست می‌آید.

۲.۲.۳ منابع چندجمله‌ای

تعمیم منابع آفینی به صورت معادلات چند جمله‌ای درجه‌ی بالاتر در [DGW۰۷،Dvi۰۸] بررسی شده است. در [DGW۰۷] منابع آفینی به منابع چندجمله‌ای[۲۹] تعمیم داده شد که منابعی هستند که از چند جمله‌ای‌های درجه‌ی پایین[۳۰] نمونه‌گیری می‌شوند. به عبارتی دیگر یک عضو با توزیع یکنواخت از $\mathbb{F}^k$ ($\mathbb{F}$ یک میدان متناهی است) انتخاب شده سپس یک نگاشت چند جمله‌ای از $\mathbb{F}^k$ به $\mathbb{F}^k$ روی آن اعمال می‌شود. در [DGW۰۷] یک استخراج‌کننده برای منابع با نگاشت چندجمله‌ای از درجه‌ی d و اندازه‌ی میدان حداقل $d^{o(n)}$ ارایه شده است. در اثبات این نتایج از تعمیمی از قضیه‌ی ویل (به جمع روی یک خم دلخواه) به نام قضیه‌ی تخمین جمع توانی[۳۱] بامبیری[۳۲] استفاده شده است. به عبارت دیگر متغیر Z در قضیه‌ی ویل روی یک خم در $\mathbb{F}^n$ مقدار می‌گیرد.

در [Dvi۰۸] مدل دیگری از منابع درجه پایین[۳۳] بررسی شده است. این بار منبع یک متغیر تصادفی یکنواخت روی صفرهای یک دستگاه معادلات چندجمله‌ای با درجه‌ی کمتر از d است. در [Dvi۰۸] در حالتی که اندازه‌ی میدان حداقل $d^{\Omega(n^2)}$ یک استخراج‌کننده برای چنین منابعی ارایه شده است.

۴ استخراج‌کننده‌های بذردار

در این مدل، استخراج‌کننده علاوه بر نمونه از منبع ضعیف مورد نظر X، تعدادی بیت کاملا تصادفی Y (که به آن بذر [۳۴] می‌گویند.) هم به عنوان ورودی دوم دریافت خواهد کرد. این مدل اولین بار توسط نیسان[۳۵] و زوکرمن[۳۶] در ۱۹۹۶ ارایه شد.

تعریف ۱۰. **(استخراج‌کننده بذردار[۳۷]) [NZ۹۶]** *تابع*

$$Ext : \{0,1\}^n \times \{0,1\}^d \to \{0,1\}^m$$

یک *(k, ϵ)-استخراج‌کننده است اگر برای هر توزیع احتمال با $H_\infty(X) \geq k$، $Ext(X, Y)$ به توزیع یکنواخت ϵ-نزدیک باشد. (توزیع Y یکنواخت بوده و مستقل از X است.)*

در تعریف بالا خانواده‌ی خاصی از توزیعهای احتمال در نظر گرفته نشده است. زیرا می‌توان با بذر لگاریتمی از همه‌ی توزیعهای احتمال با مینیمم‌آنتروپی بالا بیت تصادفی استخراج کرد.

در این بخش تعدادی از تحقیقات انجام شده در این زمینه را مرور می‌کنیم.

[۲۵] Ariel Gabizon
[۲۶] Ran Raz
[۲۷] Andrei Weil
[۲۸] Quadratic character
[۲۹] Polynomial Sources

[۳۰] Low degree polynomial
[۳۱] Exponential Sum Estimate
[۳۲] Enrico Bombieri
[۳۳] Low degree sources
[۳۴] Seed
[۳۵] Noam Nisan
[۳۶] David Zuckerman
[۳۷] Seeded Source

۱.۴ ساختن صریح و کران‌های پایین

با استفاده از روش احتمالاتی می‌توان نشان داد برای هر n, k, ϵ یک (k,ϵ)-استخراج‌کننده وجود دارد که از بذر به طول

$$d = \log(n-k) + 2\log\frac{1}{\epsilon} + O(1)$$

استفاده کرده و طول خروجی $m = k + d - 2\log\frac{1}{\epsilon} - O(1)$ است.

رادهاکریشان[38] و تاشما[39] [RTS۰۰] نشان دادند که مقدار بالا بهینه است. (در حد مقدار ثابت)

به $k + d - m$ آنتروپی از دست رفته[40] گفته می‌شود. (زیرا مینیمم آنتروپی (X,Y) برابر با $k + d$ است.)

کران‌های [RTS۰۰] نشان می‌دهد که آنتروپی از دست رفته همواره حداقل $2\log\frac{1}{\epsilon} - O(1)$ است. یعنی با کاهش ϵ تا حدی مجبوریم بیت‌های تصادفی از دست بدهیم.

تلاش‌های بسیاری انجام شده تا ساخت‌های صریح استخراج‌کننده‌ها را به این کران نزدیک کند.

استخراج‌کننده‌های بهینه در حد یک مقدار ثابت:

برای هر $\alpha > 0$ ثابت c وجود دارد که برای هر n, k, ϵ استخراج‌کننده‌ی صریح با $d = c.(\log n + \log\frac{1}{\epsilon})$ و خروجی $m = (1-\alpha)k$ وجود دارد. ([LRVW۰۳] و [GUV۰۹])

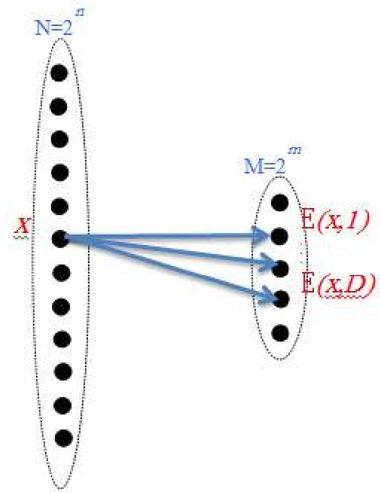
استخراج‌کننده با آنتروپی از دست رفته‌ی زیرخطی[41] و خطای بالا:

برای هر ثابت e ثابت c وجود دارد به طوری که برای هر n, k استخراج‌کننده‌های صریح با $d = c.\log n$ و $m = (1 - \frac{1}{\log^e n}).k$ و $\epsilon = \frac{1}{\log n}$ وجود دارد. [DKSS۰۹]

۲.۴ پخش کننده‌های بذردار به عنوان گراف‌های با خاصیت انبساط حجم

تابع $E : \{0,1\}^n \times \{0,1\}^d \to \{0,1\}^m$ داده شده است. بگیرید $D = 2^d$، $M = 2^m$، $N = 2^n$ و گراف دوبخشی G_E بدین شکل تعریف می‌کنیم: رأس‌های طرف چپ $\{0,1\}^n$ و رأس‌های طرف رأست را $\{0,1\}^m$ می‌گیریم. هر رأس $x \in \{0,1\}^n$ را به $E(x,y)$ برای هر $y \in \{0,1\}^m$ وصل می‌کنیم. بنابراین درجه‌ی رئوس طرف چپ D است. شکل زیر را ببینید.

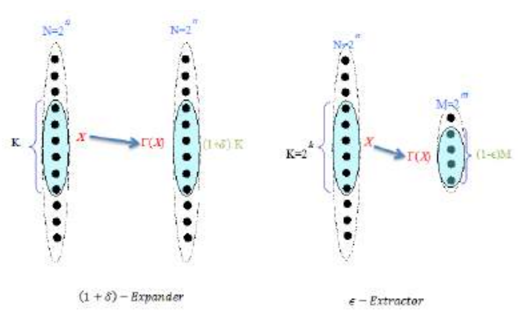
[38] Radhakrishnan
[39] Ta-Shma
[40] Entropy loss
[41] Sublinear



برای هر $S \subset \{0,1\}^n$، $\Gamma(S)$ را مجموعه‌ی همسایه‌های S در طرف رأست بگیرید. اگر E یک (k,ϵ)-پخش‌کننده باشد، برای هر S با اندازه‌ی حداقل $K = 2^k$ داریم $|\Gamma(S)| \geq (1-\epsilon)2^m$. به این ویژگی انبساط حجمی[42] می‌گوییم که خاصیت انبساط رأسی[43] را که در گراف‌های منبسط‌کننده وجود دارد به یاد می‌آورد.

تعریف ۱۱. (گراف دوبخشی منبسط کننده[44]) *گراف دوبخشی G را یک (K,e)-منبسط‌کننده[45] می‌نامیم اگر برای هر مجموعه‌ی S در سمت چپ با اندازه‌ی حداکثر K داشته باشیم $|\Gamma(S)| \geq e|S|$.*

در دو شکل زیر ویژگی‌های اصلی پخش‌کننده و گراف منبسط کننده مقایسه شده است.



[42] Volume Expansion
[43] Vertex Expansion
[44] Bipartite Expander Graph
[45] (K,e)-Expander

۳.۴ ساخت گراف‌های منبسط کننده با کران روی مقدارویژه

در اینجا یکی از نتایج ویگدرسون و زوکرمن [WZ۹۹] را ارائه می‌کنیم که نشان دادند از پخش‌کننده‌ها می‌توان برای ساخت گراف‌های منبسط‌کننده استفاده کرد.

مسأله‌ی زیر را در نظر بگیرید.

بگیرید $A \leq \frac{N}{10}$ پارامتر باشد. یکی گراف با درجه‌ی پایین و N رأس بسازید به طوری که بین هر دو مجموعه با $\frac{N}{A}$ رأس یک یال وجود داشته باشد. به وضوح برای درجه‌ی کمتر از $o(A)$ این امکان‌پذیر نیست. با استفاده از روش احتمالاتی می‌توان نشان داد چنین گراف‌هایی با درجه‌ی تقریبا $A\log A$ وجود دارند.

با استفاده از پخش‌کننده‌های بهینه می‌توان گراف‌های با درجه‌ی $A.poly\log(A)$ ساخت. ساخت [WZ۹۹] به صورت زیر است:

فرض کنید $E : \{0,1\}^n \times \{0,1\}^d \to \{0,1\}^m$ یک $(k,\frac{1}{4})$-پخش‌کننده با $k = \log(\frac{N}{A})$ و $m = k$ باشد. (هم‌چنین درجه‌ی رئوس چپ کمتر از $N\frac{D}{M}$ است.) فرض کنید S_1 و S_2 دو مجموعه‌ی با اندازه‌ی $2^k = \frac{N}{A}$ باشند. بنابر خاصیت پخش‌کننده هر کدام از این زیرمجموعه در سمت رأست حداقل $M/2$ همسایه دارند. بنابراین S_1 و S_2 در سمت رأست همسایه‌ی مشترک دارند. گراف G روی $\{0,1\}^n$ را بدین صورت تعریف می‌کنیم: هر دو رأس به هم یال دارند، اگر در گراف پخش‌کننده، همسایه‌ی مشترک داشته باشند. بنابراین هر دو زیرمجموعه‌ی S_1 و S_2 با اندازه‌ی N/A به هم یال دارند. هم‌چنین درجه‌ی گراف $D.\frac{ND}{M} = \frac{D^2N}{M}$ است، که اگر از یک گراف پخش‌کننده با درجه‌ی $D = poly\log(N/K)$ استفاده کنیم (بذر $(d = O(\log(n-k))$، درجه‌ی G، $A.poly\log(A)$ خواهد بود.

مثال دیگری از این روش در [CRVW۰۲] ارائه شده است.

۵ مسائل باز

استخراج‌کننده‌های قطعی

- استخراج‌کننده‌های آفینی برای $\mathbb{F}_2$ و مینیمم آنتروپی $k < \sqrt{n}$ ارائه کنید. بهترین نتایج با
$$k = n/\sqrt{\log\log n}$$
مربوط به [Bou۰۷،Yeh۱۰،Li۱۱b] است.

- پخش‌کننده‌های آفینی برای $\mathbb{F}_2$ و مینیمم‌آنتروپی
$$k = poly\log(n)$$
ارائه کنید. بهترین نتایج با $k = \log^{0.9} n$ مربوط به [Sha۱۱] است.

- برای هر ثابت c، استخراج‌کننده‌های برای توزیع‌های ساخته شده با مدارهای سایز n^c و مینیمم‌آنتروپی $k < n/2$ ارائه کنید. برای توضیحات بیشتر [TV۰۰] را ببینید.

استخراج‌کننده‌های بذردار

- استخراج‌کننده‌هایی بسازید که به کران پایین [RTS۰۰] نزدیک باشد. [Sha۰۲] را ببینید.

مراجع

[AB09] Sanjeev Arora and Boaz Barak. Computational Complexity: A Modern Approach. Cambridge University Press, 2009.

[Bou07] Jean Bourgain. On the construction of affine extractors. Geometric And Functional Analysis, 17(1):33–57, 2007.

[CRVW02] ichael R. Capalbo, Omer Reingold, Salil P. Vadhan, and Avi Wigderson. Randomness conductors and constant-degree lossless expanders. In STOC,pages 659–668, 2002.

[DGW09] eev Dvir, Ariel Gabizon, and Avi Wigderson. Extractors and rank extractors for polynomial sources. Computational Complexity, 18(1):1–58, 2009.

[Dvi08] Zeev Dvir. Extractors for varieties. In IEEE Conference on Computational Complexity, pages 102–113, 2009.

[Gab11] Ariel Gabizon. Deterministic Extraction from weak random sources, Springer ,2011.

[vN51] John von Neumann. Various techniques used in connection with random digits. Applied Math Series, 12:36–38, 1951.

[Wig11] Avi Wigderson. Deterministic Extractors - Lecture Notes, 201

[WZ99] Avi Wigderson and David Zuckerman. Expanders that beat the eigenvalue bound: Explicit construction and applications. Combinatorica, 19(1):125– 138, 1999.

[NTS99] Noam Nisan and Amnon Ta-Shma. Extracting randomness: A survey and new constructions. J. Comput. Syst. Sci., 58(1):148–173, 1999.

[NZ96] Noam Nisan and David Zuckerman. Randomness is linear in space. J. Comput. Syst. Sci., 52(1):43–52, 1996.

[RTS00] . Radhakrishnan and A. Ta-Shma. Bounds for dispersers, extractors, and depth-two superconcentrators. SIAM Journal on Discrete Mathematics,13(1):2–24, February 2000.

[Sha02] Ronen Shaltiel. Recent developments in explicit constructions of extractors. Bulletin of the EATCS, 77:67–95, 2002.

[Sha11] Ronen Shaltiel. Dispersers for affine sources with sub-polynomial entropy. Unpublished, 2011.

[Sha11b] Ronen Shaltiel. An introduction to randomness extractors, 2011.

[SSZ98] Michael E. Saks, Aravind Srinivasan, and Shiyu Zhou. Explicit or-dispersers with polylogarithmic degree. J. ACM, 45(1):123–154, 1998.

[SV86] Miklos Santha and Umesh V. Vazirani. Generating quasi-random sequences from semi-random sources. J. Comput. Syst. Sci., 33(1):75–87, 1986.

[TV00] uca Trevisan and Salil P. Vadhan. Extracting randomness from samplable distributions. In FOCS, pages 32–42, 2000.

[Vad07] Salil P. Vadhan. The unified theory of pseudorandomness. SIGACT News, 38(3):39–54, 2007.

نگرشی دیگر بر مفهوم محاسبه

اوژن غنی‌زاده‌ی خوب

۱ مقدمه

در اوائل قرن بیستم، هیلبرت در انتظار دستگاه فرمالی برای بیان ریاضیات بود که در آن تمامی گزاره‌های درست قابل اثبات باشند، هیچ تناقضی در آن نباشد و به روش تصمیم‌گیری مشخصی برای تشخیص صحت هر گزاره‌ی داده شده مجهز باشد. متاسفانه در سال ۱۹۳۱ قضیه‌ی ناتمامیت اول گودل [۱] نشان داد که هر چهارچوب منطقی در صورتی که به اندازه‌ی کافی جامع باشد تا بتوان در آن قضایای حساب را بیان کرد، نمی‌تواند همزمان سازگار [۲] و کامل [۳] باشد، یعنی یا تمامی گزاره‌های درست در آن قابل اثبات نیستند و یا شامل تناقض است. [۴]

،بنابراین وجود بخش اول دستگاه ایده‌آل هیلبرت غیرممکن است. اما بخش دوم آن نیز چنین است؟ یعنی آیا می‌توان روشی برای تشخیص اثبات‌پذیری یک گزاره‌ی دلخواه ارائه کرد؟ جواب این سوال نیز چنان‌چه امروزه می‌دانیم منفی است. اولین اثبات این امر توسط آلونزو چرچ [۵] در سال ۱۹۳۵ مطرح شد، هر چند امروزه آن‌چه به عنوان جواب این سوال مطرح می‌شود مساله‌ی پایان‌پذیری [۶] است که منجر به اثبات امکان‌ناپذیری وجود چنین روشی می‌شود. این مساله و نتایج آن چند ماه بعد از انتشار کار چرچ توسط آلن تورینگ [۷] مطرح شد و به دلیل فراگیری آن بین کامپیوتردان‌ها، کار چرچ را به نوعی در سایه قرار داد. کار چرچ و تورینگ هر دو در راستای اثبات امکان‌ناپذیری وجود روشی برای محاسبه‌ی اثبات‌پذیری گزاره‌ای دلخواه است، بنابراین بیان آن‌ها بدون ارائه‌ی تعریفی فرمال از مفهوم محاسبه و محاسبه‌پذیری ممکن نیست. چرچ و تورینگ در حقیقت در متن مقالات خود به صورت مشخص اولین صورت‌های فرمال این مفاهیم را عرضه کردند. فرمال‌سازی‌هایی که با وجود تفاوت صوری یکسان بودنشان در سال ۱۹۳۶ توسط خود چرچ و تورینگ نشان داده‌شد [۲]. چنان‌چه گفته شد کارهای چرچ به نسبت کارهای تورینگ با وجود برخورداری از اهمیت یکسان بسیار کمتر شناخته‌شده‌است. در این مطلب به بیان مختصر کار چرچ و نگرش وی به مفهوم محاسبه و محاسبه‌پذیری می‌پردازیم.

[۱] Godel's First Incompleteness Theorem

[۲] Consistent

[۳] Complete

[۴] بیان ساده‌ی این قضیه به این شکل است: دستگاه منطقی s با شرایط مذکور را در نظر بگیرید. حال گزاره‌ی G را چنین تعریف کنید: $G \equiv s \nvdash G$ که در آن $s \vdash G$ به معنای اثبات پذیری G در s است. حال اگر s کامل باشد، یا G در آن اثبات می‌شود و یا رد، که هر دوی این حالات منجر به تناقض است.

[۵] Alonzo Church

[۶] Halting Problem

[۷] Alan Turing

۲ تعاریف

مبنای کار چرچ ارائه‌ی تعریفی از مفهوم محاسبه‌پذیری موثر [۸] است. برای بیان این تعریف، وی از سه مفهوم فرمول خوش‌ساخت [۹] ، متغیر آزاد [۱۰] و متغیر وابسته [۱۱] استفاده می‌کند:

تعریف ۱.۲. *فهرستی شامل علائم* $\lambda, (,), [,], \{, \}$ *و مجموعه‌ای شمارا از علائم* $a, b, c, \ldots$ *که متغیر خوانده می‌شوند را در نظر بگیرید. به هر دنباله‌ی متناهی از علائم این فهرست* ***فرمول*** *اطلاق می‌شود. سه مفهوم* ***فرمول خوش‌ساخت*** *،* ***متغیر آزاد*** *و* ***متغیر وابسته*** *به شیوه‌ی استقرائی چنین تعریف می‌شوند: هر متغیر x به خودی خود فرمولی خوش‌ساخت است و x در این فرمول به عنوان متغیری آزاد ظاهر می‌شود؛ اگر فرمول‌های F و X فرمول‌هایی خوش‌ساخت باشند فرمول $\{F\}(X)$ نیز فرمولی خوش‌ساخت است و ظاهر شدن x در F یا X به عنوان متغیری آزاد (وابسته) به معنای ظاهر شدن آن در $\{F\}(X)$ به عنوان متغیری آزاد (وابسته) است؛ و اگر M فرمولی خوش‌ساخت باشد که x در آن به عنوان متغیری آزاد ظاهر می‌شود، آن‌گاه $\lambda x[M]$ نیز فرمولی خوش‌ساخت است که x در آن به عنوان متغیری وابسته ظاهر شده و هر متغیر دیگری مانند y که در M به عنوان متغیری آزاد (وابسته) ظاهر می‌شود در $\lambda x[M]$ نیز به عنوان متغیری آزاد (وابسته) ظاهر می‌شود [۱].*

تعریف ۱.۲ را امروزه با تعریف معادل ولی راحت‌تری و تحت

[۸] Effective Calculability
بطور کلی مفهوم محاسبه‌پذیری موثر بر مبنای مفهوم روش موثر محاسبه تعریف می‌شود. روش موثر محاسبه برای رده‌ی مشخصی از مسائل، روشی است که (۱) همواره جوابی ارائه دهد، (۲) هیچ‌گاه پاسخ غلط ارائه نکند، (۳) همواره در تعداد متناهی مرحله به پایان برسد و (۴) برای تمامی مسائل رده‌ی مورد بحث کارا باشد. در مورد کار چرچ، در حقیقت مفهوم محاسبه‌پذیری برای رده‌ای از مسائل نظریه‌ی اعداد مد نظر است که معادل پیدا کردن تابعی چون f از n متغیر صحیح $x_1, \ldots, x_n$ به ازای گزاره‌ی داده شده باشند بطوریکه در گزاره‌ی مذکور $x_1, \ldots, x_n$ به شکل متغیرهای آزاد ظاهر شده و $f(x_1, \ldots, x_n) = 2$ شرط لازم و کافی برای ارضا شدن گزاره‌ی مورد نظر باشد. [۱]

[۹] Well-Formed Formula

[۱۰] Free Variable

[۱۱] Bounded Variable

عنوان **عبارت لامبدا** [۱۲] چنین بیان می‌کنند:

تعریف ۲.۲. *فرض کنید V مجموعه‌ای شمارا از متغیرها باشد. آن‌گاه مجموعه‌ی عبارات لامبدا Λ و توابع $FV : \Lambda \to ۲^V$ و $BV : \Lambda \to ۲^V$ به شکل استقرایی چنین تعریف می‌شوند ([۳]):*

$$(۱) \quad x \in V \Rightarrow x \in \Lambda$$
$$FV(x) = \{x\}$$
$$BV(x) = \emptyset$$
$$(۲) \quad M, N \in \Lambda \Rightarrow (MN) \in \Lambda$$
$$FV(MN) = FV(M) \cup FV(N)$$
$$BV(MN) = BV(M) \cup BV(N)$$
$$(۳) \quad M \in \Lambda, x \in FV(M) \Rightarrow (\lambda x M) \in \Lambda$$
$$FV(\lambda x M) = FV(M) - \{x\}$$
$$BV(\lambda x M) = BV(M) \cup \{x\}$$

که این تعریف را می‌توان با قرارداد زیر ساده‌تر کرد:

قرارداد ۳.۲. *-علائم کوچک مانند $x, y, \ldots$ برای نشان دادن متغیرها و علائم بزرگ مانند $M, N, \ldots$ برای نشان دادن عبارات لامبدای دلخواه استفاده می‌شوند؛*

- عبارات لامبدا به فرم کلی $(\ldots((FM_۱)M_۲)\ldots M_n)$ را به طور خلاصه با $FM_۱M_۲\ldots M_n$ نمایش می‌دهیم؛

- عبارات لامبدا به فرم کلی $(\lambda x_۱(\lambda x_۲(\ldots(\lambda x_n M))\ldots))$ را با به طور خلاصه با $\lambda x_۱x_۲\ldots x_n.M$ نمایش می‌دهیم.

اما هدف از این تعاریف چیست؟ به مثال زیر دقت کنید:

مثال ۴.۲. *فرض کنید عباراتی چون $M \equiv x^۲ + ۳x + ۵$ و $N \equiv ۱ + ۱$ توسط عبارات لامبدایی قابل بیان باشند. اگر قاعده‌ی ۳ را روی M اجرا کنیم، حاصل عبارتی چون $\lambda x.M$ است که آن را به مثابه تابعی (بی‌نام) بر حسب x تلقی می‌کنیم. به همین دلیل، قاعده‌ی ۳ را معمولا قاعده‌ی انتزاع [۱۳] می‌نامند. حال فرض کنید قاعده‌ی ۲ را روی $\lambda x.M$ و N اجرا کنیم. عبارت حاصل را به مثابه اجرای تابع توصیف شده در $\lambda x.M$ روی عبارت N در نظر می‌گیریم. به همین دلیل قاعده‌ی ۲ را معمولا قاعده‌ی اجرا [۱۴] می‌نامند. بنابراین، اگر در حساب عادی عبارات $M' \equiv f(x) = x^۲ + ۳x + ۵$ و $N' \equiv ۱ + ۱$ را در نظر بگیریم، عبارت $\lambda x.M$ معادل لامبدای عبارت M' ؛ عبارت N معادل لامبدای عبارت N' و عبارت $(\lambda x.M)N$ معادل لامبدای عبارت $f(۱+۱)$ است.*

اما اگر قرار باشد چنین تناظری بین حساب عادی و حساب عبارات لامبدا برقرار باشد، باید عبارت لامبدایی معادل با $۲^۲ + ۳ * ۲ + ۵$ داشته‌باشیم و به تعبیری بتوان نوشت $(\lambda x.M)N = ۲^۲ + ۳ * ۲ + ۵$. با افزودن قواعدی بر عبارات لامبدا، چنین امری نیز میسر است. در حقیقت ترکیب عبارات لامبدا با این قواعد حسابی را به وجود می‌آورد که به **حساب لامبدا** [۱۵] معروف است و مبنای اصلی چهارچوب محاسباتی چرچ است.

۳ حساب لامبدا

تعریف ۱.۳. *مفهوم جاینشینی را به شکل زیر تعریف می‌کنیم (در این روابط $x \in FV(M)$ و $x \neq y$ مفروض است):*

$$x[x := N] = N$$
$$y[x := N] = y$$
$$(M_۱M_۲)[x := N] = (M_۱[x := N])(M_۲[x := N])$$
$$(\lambda y.M)[x := N] = \lambda y.M[x := N])$$

حال با استفاده از تعریف فوق می‌توانیم به بیان قاعده‌ی زیر که معروف به **قاعده‌ی اصلی** [۱۶] است ([۳]) بپردازیم:

$$(\lambda x.M)N = M[x := N]^{۱۷}$$

حال با استفاده از قاعده‌ی اصلی، با مفروضات مثال ۴.۲ لااقل خواهیم داشت: $(\lambda x.M)N = (۱ + ۱)^۲ + ۳ * (۱ + ۱) + ۵$ برای عملگر $=$ معرفی شده در قاعده‌ی اصلی، قواعد زیر را نیز مفروض داریم:

$$M = M$$
$$M = N \Rightarrow N = M$$
$$M = N, N = L \Rightarrow M = L$$
$$M = M' \Rightarrow MZ = M'Z$$
$$M = M' \Rightarrow ZM = ZM'$$
$$M = M' \Rightarrow \lambda x.M = \lambda x.M'$$

[۱۲] Lambda Term
[۱۳] Abstraction
[۱۴] Application

[۱۵] Lambda Calculus
[۱۶] Principal Axiom
[۱۷] بیان خود چرچ از حساب لامبدا اندکی متفاوت است. به جای قواعد فوق، وی قواعد زیر را به عنوان قواعد حساب لامبدا معرفی می‌کند:
- جاینشینی y به جای x در $\lambda x.M$ به شکل $\lambda y.M[x := y]$ به شرطی که y در M ظاهر نشده‌باشد؛
- جاینشینی $(\lambda x.M)N$ به جای $M[x := N]$ به شرطی که متغیرهای وابسته‌ی M از x و متغیرهای آزاد N مجزا باشند؛
- جاینشینی $M[x := N]$ به جای $(\lambda x.M)N$ به شرطی که متغیرهای وابسته‌ی M از x و متغیرهای آزاد N مجزا باشند.

مثال ۲.۳. *در زیر نمونه‌هایی از عبارات لامبدا را می‌بینیم:*

- $I \equiv \lambda x.x$
- $J \equiv \lambda x.y$
- $K \equiv \lambda y.J$
- $True \equiv \lambda xy.x$
- $W \equiv (\lambda ixy.iyx)(\lambda xy.y)$

عبارت لامبدای I در حقیقت معادل تابع همانی است. عبارت لامبدای J معادل تابعی ثابت است که مقدار y همان مقدار ثابت آن است. عبارت لامبدای K معادل تابعی است مانند $f(c)$ که خروجی آن تابعی ثابت با مقدار ثابت c است. عبات $True$ تابعی است که دو متغیر را گرفته و متغیر اول را به عنوان خروجی برمی‌گرداند. دقت کنید که اگر $False$ را به شیوه‌ای مشابه چنین تعریف کنیم که دو متغیر را گرفته و دومی را به عنوان خروجی برمی‌گرداند، آن‌گاه عبارت سمت راست W همان عبارت $False$ است، بنابراین می‌توان چنین استنباط کرد که عبارت سمت چپ به نوعی معادل عملگر منطقی نقیض است. در حقیقت داریم:

$$\begin{aligned} W &\equiv (\lambda ixy.iyx)(\lambda xy.y) \\ &= \lambda xy.(\lambda xy.y)yx \\ &= \lambda xy.x \\ &\equiv True \end{aligned}$$

دقت کنید که چون $\equiv$ عملگری برای تعریف است، برهان فوق اثباتی بر گزاره‌ی $W = True$ است. اما اگر تعریف می‌کردیم $True \equiv \lambda ab.a$ آن‌گاه به مشکل برمی‌خوردیم، با این که تعریف متفاوتی ارائه نکرده‌ایم. برای حل این مشکل کافیست قانون زیر را به قوانینمان اضافه کنیم [۱۸] :

$$y \notin FV(M) \cup BV(M) \Rightarrow \lambda x.M = \lambda y.M[x := y]$$

اکنون، به نظر می‌رسد حساب لامبدا بسیاری شرایط مورد نیاز برای برقراری تناظری با حساب عادی را داراست. اما اگر بخواهیم روابط مثال ۴.۲ را در این حساب نمایش دهیم، هنوز ابزار مهمی را در اختیار نداریم: اعداد و عملگرهای آن‌ها را. حقیقت امر این است که در حساب لامبدا تعاریف مختلفی از اعداد و عملگرهای آن‌ها می‌توان ارائه داد که برای مقاصد مختلف کارآمد باشند. در انتهای این بخش اعداد و عملگرهای مطرح شده توسط خود چرچ را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۳.۳. *اعداد چرچ را می‌توان به صورت بازگشتی به شکل زیر تعریف کرد ([۳]) :*

$$C_0 \equiv \lambda fx.x$$

$$C_{n+1} \equiv \lambda fx.f(C_n fx)$$

معادلا، اگر n بار اجرای عبارت f روی عبارت x را با $f^n x$ نمایش دهیم، داریم:

$$C_n \equiv \lambda fx.f^n x$$

حال با استفاده از اعداد چرچ می‌توان عملگرهای اعداد صحیح را روی اعداد چرچ تعریف کرد. ابتدا لم زیر را داریم:

لم ۴.۳. *برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم:*

$$(i) \quad (C_n x)^m y = x^{nm} y$$

$$(ii) \quad m > 0 \Rightarrow (C_n)^m x = C_{n^m} x$$

اثبات. (i) با استفاده از استقراء. برای $m = 0$ دو طرف رابطه برابر y خواهند بود. حال فرض کنیم حکم برای m برقرار باشد. داریم:

$$\begin{aligned} (C_n x)^{m+1} y &= (C_n x)((C_n x)^m y) \\ &= (C_n x)(x^{nm} y) \\ &= x^n (x^{nm} y) \\ &= x^{nm+n} y = x^{m(n+1)} y \end{aligned}$$

(ii) با استفاده از استقرا. برای $m = 1$ دو طرف برابر $C_n x$ خواهند بود. حال فرض کنید حکم برای m برقرار باشد. داریم:

$$\begin{aligned} (C_n)^{m+1} x &= C_n((C_n)^m x) \\ &= C_n(C_{n^m} x) \\ &= \lambda y.(C_{n^m} x)^n y \\ &= \lambda y.x^{n^m n} y \\ &= \lambda y.x^{n^{m+1}} y = C_{n^{m+1}} x \end{aligned}$$

□

حال با استفاده از این لم، قضیه‌ی زیر را داریم:

قضیه ۵.۳. *تعریف کنید:*

$$C_+ \equiv \lambda abfx.af(bfx)$$

$$C_* \equiv \lambda abf.a(bf)$$

$$C_{exp} \equiv \lambda ab.ba$$

آن‌گاه برای هر $m, n \in \mathbb{N}$ خواهیم داشت:

$$(i) \quad C_+ C_n C_m = C_{n+m}$$

$$(ii) \quad C_* C_n C_m = C_{nm}$$

$$(iii) \quad C_{exp} C_n C_m = C_{n^m}$$

(با شرط $m > 0$ برای حکم (iii))

[۱۸] معادلا، می‌شد عملگر $\equiv$ را چنین تعریف کرد: می‌گوییم $M \equiv N$ اگر M و N با تغییر نام متغیرهای وابسته‌شان به یکدیگر تبدیل شوند [۳] .

اثبات. (i):

$$C_{+}C_nC_m = \lambda fx.C_nf(C_mfx)$$
$$= \lambda fx.f^n(f^mx) = \lambda fx.f^{n+m}x$$
$$= C_{n+m}$$

(ii):

$$C_{*}C_nC_m = \lambda fx.C_n(C_mf)x$$
$$= \lambda fx.(C_mf)^nx$$

اما بنا بر لم ۴.۳ داریم:

$$\lambda fx.(C_mf)^nx = \lambda fx.f^{nm}x$$
$$= C_{nm}$$

(iii):

$$C_{exp}C_nC_m = \lambda fx.C_m(C_n)fx$$
$$= \lambda fx.(C_n)^mfx$$

اما مجددا بنا بر لم ۴.۳ داریم:

$$\lambda fx.(C_n)^mfx = \lambda fx.C_{n^m}fx$$
$$= C_{n^m}$$

□

اثبات وجود سایر عملگرها از حوصله‌ی این بحث خارج است، هرچند در بخش بعد به طور غیر مستقیم وجود آن‌ها نیز اثبات خواهد شد.

۴ محاسبه‌پذیری

محاسبه‌پذیری خود مفهومی است که در زمان چرچ به شکل حال وجود نداشت، در نتیجه چرچ حساب لامبدا را به طور مستقیم برای حل مساله‌ی اثبات‌پذیری به کار می‌برد. امروزه اما این مفاهیم در قالب صورت‌هایی دیگر بسیار شناخته‌شده‌است، و ما در این مقاله برای بیان ارتباط حساب لامبدا با مفهوم محاسبه‌پذیری تناظر آن با کلاس توابع بازگشتی [۱۹] را نشان می‌دهیم. برای یاد آوری، توابع بازگشتی به کوچک‌ترین کلاس توابع عددی اطلاق می‌شود که شامل توابع اولیه[۲۰] باشند و تحت ترکیب [۲۱]، بازگشت اولیه [۲۲] و کمینه‌سازی [۲۳] بسته باشند. [۲۴]

[۱۹] Recursive Functions
[۲۰] Initial Functions
[۲۱] Composition
[۲۲] Primitive Recursion
[۲۳] Minimalization
[۲۴] برای یاد آوری بیشتر، توابع اولیه به سه تابع زیر اطلاق می‌شود:

$$U_i^n(x_۱, ..., x_n) = x_i, (۱ <= i <= n)$$
$$S^+(n) = n + ۱$$
$$Z(n) = ۰$$

به علاوه می‌گوییم کلاس $\mathcal{A}$ از توابع عددی:

– تحت عمل ترکیب بسته است اگر $\chi, \psi_۱, ..., \psi_m \in \mathcal{A}$ نتیجه دهد هر تابع $\varphi = \chi(\psi_۱(\vec{n}), ..., \psi_m(\vec{n}))$ نیز در $\mathcal{A}$ است؛

– تحت عمل بازگشت اولیه بسته است اگر $\chi, \psi \in \mathcal{A}$ نتیجه دهد هر تابع φ تعریف شده به شکل

$$\varphi(۰, \vec{n}) = \chi(\vec{n})$$
$$\varphi(k + ۱, \vec{n}) = \psi(\varphi(k, \vec{n}), k, \vec{n})$$

نیز در $\mathcal{A}$ است؛

– تحت عمل کمینه‌سازی بسته است اگر $\chi \in \mathcal{A}$ و $\forall\vec{n}\exists m\chi(\vec{n}, m) = ۰$ نتیجه دهد هر تابع به شکل $\varphi(\vec{n}) = \mu m[\chi(\vec{n}, m) = ۰]$ نیز در $\mathcal{A}$ قرار دارد.

برای نشان دادن تناظر مذکور، از مفهومی به نام λ-تعریف‌پذیری[۲۵] استفاده می‌کنیم:

تعریف ۱.۴. *فرض کنید برای هر عدد $n \in \mathbb{N}$ عبارات لامبدای متمایزی به شکل D_n وجود داشته‌باشد. با در نظر گرفتن این اعداد، می‌گوییم تابع $\phi : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ تابعی λ-تعریف‌پذیر است اگر عبارت لامبدایی مانند Φ وجود داشته‌باشد که برای هر $x_۱, ..., x_m \in \mathbb{N}$ داشته‌باشیم:*

$$D_{\phi(x_۱,...,x_n)} = \Phi D_{x_۱}...D_{x_n}$$

با استفاده از تعریف ۱.۴ ، برای نشان دادن وسع محاسباتی حساب لامبدا، کافیست نشان دهیم تمامی توابع بازگشتی λ-تعریف‌پذیرند. با وجود این که برای این کار می‌توان از اعداد چرچ نیز استفاده کرد، برای راحتی از تعریف دیگری از اعداد استفاده می‌کنیم که در سال ۱۹۷۶ توسط برندرگت [۲۶] ([۳]) ارائه شد.

تعریف ۲.۴. *برای $M, N \in \Lambda$ زوج مرتب $[M, N]$ را چنین تعریف می‌کنیم:*

$$[M, N] \equiv \lambda z.zMN$$

دقت کنید که با تعاریف مثال ۲.۳ از عبارات $True$ و $False$ داریم:

$$[M, N]True = M$$
$$[M, N]False = N$$

تعریف ۳.۴. *برای هر $n \in \mathbb{N}$ عبارت $\ulcorner n \urcorner$ به شکل استقرائی چنین تعریف می‌شود:*

$$\ulcorner ۰ \urcorner \equiv I$$
$$\ulcorner n + ۱ \urcorner \equiv [False, \ulcorner n \urcorner]$$

تعریف ۴.۴. *توابع S^+، P^-، و $Zero$ چنین تعریف می‌شوند:*

$$S^+ \equiv \lambda x.[False, x]$$
$$P^- \equiv \lambda x.xFalse$$
$$Zero \equiv \lambda x.xTrue$$

[۲۵] λ-definability
[۲۶] Barendregt

دقت کنید که بوضوح داریم:

$$S^{+}\ulcorner n\urcorner = \ulcorner n+۱\urcorner$$

$$P^{-}\ulcorner n+۱\urcorner = \ulcorner n\urcorner$$

$$Zero\ulcorner ۰\urcorner = True$$

$$Zero\ulcorner n+۱\urcorner = False$$

برای ادامه‌ی کار، نیاز داریم که قادر به حل معادلاتی بازگشتی به شکل $X = f(X)$ باشیم که $f(X)$ عبارت لامبدایی شامل X است. برای مثال، فرض کنید که تابع جمع را با استفاده از بازگشت اولیه روی تابع S^{+} چنین تعریف کنیم:

$$Add(۰, n) = n$$

$$Add(m+۱, n) = S^{+}(Add(m, n))$$

عبارت لامبدای معادل این تابع در حقیقت جواب معادله‌ی

$$Add\ x\ y = (Zero\ x)y(S^{+}(Add(P^{-}x)y))$$

خواهد بود. خوش‌بختانه قضیه زیر که به **قضیه‌ی نقطه‌ی ثابت** [27] معروف است، چنین ابزاری را در اختیار ما قرار می‌دهد:

قضیه ۵.۴. *برای هر عبارت لامبدای F، عبارت لامبدایی چون X وجود دارد بطوریکه $FX = X$*

اثبات. تعریف کنید:

$$W \equiv \lambda x.F(xx)$$

و

$$X \equiv WW$$

داریم:

$$\begin{aligned} X &= WW \\ &= (\lambda x.F(xx))W \\ &= F(WW) = F(X) \end{aligned}$$

□

دقت کنید که با به کار بردن قاعده‌ی انتزاع روی X تعریف شده در برهان فوق، به عملگر Θ معروف به عملگر نقطه‌ی ثابت [28] می‌رسیم:

$$\Theta \equiv \lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$$

که برای هر عبارت لامبدای دلخواه F داریم:

$$F(\Theta F) = \Theta F$$

[27] Fixedpoint Theorem

[28] Fixedpoint Combinator

در ادامه ابتدا نشان خواهیم داد که توابع اولیه λ-تعریف‌پذیرند و سپس ثابت می‌کنیم توابع λ-تعریف‌پذیر نسبت به ترکیب، بازگشت اولیه و کمینه‌سازی بسته‌اند. چون مجموعه‌ی توابع بازگشتی کوچک‌ترین مجموعه شامل توابع اولیه است که نسبت به این سه عمل بسته است، بنابراین حتما زیرمجموعه‌ی توابع λ-تعریف‌پذیر خواهد بود و حکم مورد نظر ما ثابت می‌شود.

لم ۶.۴. *با در نظر گرفتن اعداد تعریف ۳.۴، توابع اولیه λ-تعریف‌پذیرند.*

اثبات. تعریف کنید:

$$U_i^n = \lambda x_۱ ... x_n.x_i$$

$$S^{+} = \lambda x.[False, x]$$

$$Z = \lambda x.\ulcorner ۰\urcorner$$

□

لم ۷.۴. *توابع λ-تعریف‌پذیر تحت ترکیب بسته‌اند.*

اثبات. فرض کنید توابع $\chi, \psi_۱, ..., \psi_m$ توابعی λ-تعریف‌پذیر بوده و با عبارات لامبدای $G, H_۱, ..., H_m$ نمایش داده‌شوند. آن‌گاه هر تابع

$$\varphi(\vec{n}) = \chi(\psi_۱(\vec{n}), ..., \psi_m(\vec{n}))$$

نیز با عبارت لامبدای

$$F \equiv \lambda\vec{x}.G(H_۱\vec{x})...(H_m\vec{x})$$

معادل می‌شود. □

لم ۸.۴. *توابع λ-تعریف‌پذیر تحت بازگشت اولیه بسته‌اند.*

اثبات. فرض کنید تابع φ چنین تعریف شده باشد:

$$\varphi(۰, \vec{n}) = \chi(\vec{n})$$

$$\varphi(k+۱, \vec{n}) = \psi(\varphi(k, \vec{n}), k, \vec{n})$$

و توابع ψ و χ توابعی λ-تعریف‌پذیر بوده و معادل عبارات لامبدای H و G باشند. آن‌گاه، جواب معادله‌ی

$$Fx\vec{y} = (Zero\ x)(G\vec{y})(H(F(P^{-}x)\vec{y})(P^{-}x)\vec{y})$$

معادل تابع φ خواهد بود. جواب این معادله اما برابر

$$\Theta(\lambda fx\vec{y}.(Zero\ x)(G\vec{y})(H(F(P^{-}x)\vec{y})(P^{-}x)\vec{y}))$$

است و حکم به اثبات می‌رسد. □

لم ۹.۴. *توابع λ-تعریف‌پذیر تحت کمینه‌سازی بسته‌اند.*

اثبات. فرض کنید تابع φ چنین تعریف شده‌باشد:

$$\varphi(\vec{n}) = \mu m[\chi(\vec{n}, m) = ۰]$$

که در آن تابع χ تابعی λ-تعریف‌پذیر و معادل عبارت G باشد. پاسخ معادله‌ی

$$H\vec{x}y = (Zero(G\vec{x}y))y(H\vec{x}(S^{+}y))$$

یعنی

$$\Theta(\lambda h\vec{x}y.(Zero(G\vec{x}y))y(h\vec{x}(S^{+}y)))$$

را در نظر بگیرید. حال تعریف کنید:

$$F \equiv \lambda\vec{x}.H\vec{x}\ulcorner ۰ \urcorner$$

عبارت F معادل تابع φ است و حکم به اثبات می‌رسد. □

قضیه ۱۰.۴. *توابع بازگشتی λ-تعریف‌پذیرند.*

اثبات. لم‌های ۶.۴ ، ۷.۴ ، ۸.۴ و ۹.۴. □

اما آیا می‌شد برای اثبات قضیه‌ی فوق از اعداد چرچ استفاده کرد؟ قضیه‌ی زیر پاسخ مثبتی به این سوال می‌دهد:

قضیه ۱۱.۴. *با در نظر گرفتن اعداد چرچ، توابع بازگشتی λ-تعریف‌پذیرند.*

اثبات. عبارات زیر را در نظر بگیرید:

$$C^{+} \equiv \lambda cfx.f(cfx)$$

$$C^{-} \equiv \lambda cfx.c(\lambda pq.q(pf))(True\ x)I$$

$$CZero \equiv \lambda x.x(True\ False)True$$

با استفاده از این توابع به شیوه‌ای کاملا مشابه لم‌های ۶.۴ ، ۷.۴ ، ۸.۴ و ۹.۴ برای اعداد چرچ نیز اثبات شده و قضیه ثابت می‌شود.[۲۹] □

مراجع

[1] Alonzo Church, An Unsolvable Problem of elementary Number Theory, American Journal of Mathematics 58, pp. 345-363, Apr. 1936.

[2] Joachim Breitner, Church's Undecidability Result, Alan Turing Centennial Talk at IIT Bombay, Mumbai, Apr. 2011.

[3] Henk Barendregt, Erik Barendsen, An Introduction to Lambda Calculus, Mar. 2000.

[۲۹] در حقیقت، با استفاده از عملگر $T \equiv \lambda x.xS^{+}\ulcorner ۰ \urcorner$ برای هر n خواهیم داشت: $T\ C_n = \ulcorner n \urcorner$. به علاوه عملگر معکوس $T^{-۱}$ را نیز می‌توان از حل معادله‌ی

$$T^{-۱}x = (Zero\ x)C_{۰}(C^{+}(T^{-۱}(P^{-}x)))$$

بدست آورد. بنابراین λ-تعریف‌پذیری هر تابع با در نظر گرفتن یکی از مجموعه اعداد فوق، λ-تعریف‌پذیری آن تابع با در نظر گرفتن مجموعه‌ی دیگر را نتیجه می‌دهد.

مسأله

خشایار فیلُم

مسأله ۱. فرض کنید G یک گروه متناهی با دقیقا ۵۰، ۷-زیرگروه سیلو باشد. فرض کنید P یک ۷-زیرگروه سیلو از G باشد و $N = N_G(P)$ نرمال‌ساز آن در G.

الف) ثابت کنید N زیرگروهی ماکسیمال از G است.

ب) اگر N یک ۵-زیرگروه سیلو مانند Q داشته باشد و $Q \triangleleft N$، ثابت کنید $Q \triangleleft G$.

مسأله ۲. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای ناتهی از گروه n عضوی G باشد. برای هر k تعریف می‌کنیم

$$S^{(k)} = \{\prod_{i=1}^{k} s_i \mid s_i \in S\}$$

نشان دهید $S^{(n)}$ زیرگروهی از G است.

مسأله ۳. نشان دهید اگر R حلقه‌ای جابه‌جایی و یک‌دار باشد که هر ایده‌آل اول آن ماکسیمال است، آن‌گاه به ازای هر $x \in R$، $a \in R$ وجود دارد به قسمی که $x + ax^2$ پوچ‌توان است.

مسأله ۴. فرض کنید n عددی فرد باشد. ثابت کنید برای هر ایده‌آل I از حلقه‌ی خارج‌قسمتی $\frac{\mathbb{Z}_2[x]}{(x^n-1)}$ داریم: $I^2 = I$.

مسأله ۵. فرض کنید G زیرگروهی از گروه همیومورفیسم‌های S^1 (دایره واحد) باشد با این ویژگی که مدار هر نقطه از S^1 در عمل G متناهی است. نشان دهید G متناهی است.

مسأله ۶. ثابت کنید برای هر $\alpha \in (0,\pi)$ و هر $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha + \cdots + \frac{1}{n}\sin n\alpha > 0$$

مسأله ۷. حاصل انتگرال $\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1}\mathrm{d}x$ را بیابید.

مسأله ۸. فرض کنید $\mathcal{F}$ خانواده‌ای از توابع پیوسته‌ی حقیقی بر بازه‌ی $[a,b]$ با ویژگی‌های زیر باشد:

- اگر $f, g \in \mathcal{F}$ آن‌گاه $0 \le \min(f,g) \in \mathcal{F}$.
- برای هر $x \in [a,b]$: $\inf_{g\in\mathcal{F}} g(x) = 0$

نشان دهید که $\inf_{g\in\mathcal{F}} \int_a^b g(x)\mathrm{d}x = 0$.

مسأله ۹. $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته است و $f(1) = 0$. ثابت کنید $c \in (0,1)$ وجود دارد که $f(c) = \int_0^c f(x)\mathrm{d}x$.

مسأله ۱۰. $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ را تابعی مشتق‌پذیر با مشتقات پاره‌ای پیوسته بگیرید که به ازای ثابت‌های مناسبی هم‌چون a, b، در معادله‌ی زیر صدق می‌کند:

$$h(x,y) = a\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) + b\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)$$

نشان دهید h در صورت کران‌دار بودن باید متحد با صفر باشد.

مسأله ۱۱. ثابت کنید عملگر خطی کران‌دار و خودتوان T بر فضای هیلبرت $(H, <,>)$، خودالحاق است اگر و تنها اگر $||T|| \in \{0,1\}$. (بنابر تعریف، خودتوان بودن عملگر T یعنی $T^2 = T$ که در آن منظور از T^2 عملگر $T \circ T$ است.)

مسأله ۱۲. فرض کنید $p(z)$ یک چندجمله‌ای درجه n با ضرایب مختلط باشد که تمامی ریشه‌هایش در گوی باز واحد واقع‌اند. قرار دهید

$$p^*(z) = z^n\overline{p(\frac{1}{\bar{z}})}$$

که آن نیز همانند $p(z)$ یک چندجمله‌ای درجه‌ی n از z است. نشان دهید تمامی ریشه‌های چندجمله‌ای $p(z) + p^*(z)$ در گوی بسته‌ی واحد واقعند.

مسأله ۱۳. فرض کنید S_0 زیرمجموعه‌ای متناهی از اعداد طبیعی باشد. زیرمجموعه‌های متناهی $S_1, S_2, \ldots$ از اعداد طبیعی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

عدد صحیح a در S_{n+1} است اگر و تنها اگر دقیقا یکی از a یا $a-1$ در S_n باشد.

نشان دهید نامتناهی عدد طبیعی N وجود دارد با این ویژگی که

$$S_N = S_0 \cup \{N + a \mid a \in S_0\}$$

مسأله ۱۴. قرار دهید $x_0 = 1$ و برای هر $n \ge 0$، x_{n+1} را به روش استقرایی و با ضابطه‌ی $x_{n+1} = 3x_n + \lfloor\sqrt{5}x_n\rfloor$ از x_n بسازید. چندجمله‌ی ابتدایی این دنباله این‌گونه خواهند بود:

$$x_1 = 5, x_2 = 26, x_3 = 136, x_4 = 712$$

فرمولی بسته برای x_{2007} بیابید.

مسأله ۱۵. تعیین کنید که آیا تابع دو متغیره‌ی $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{N}$ با این خاصیت که تساوی $f(x,y) = f(y,z)$ برای اعداد حقیقی x، y و z نتیجه بدهد که $x = y = z$ وجود دارد یا خیر؟

مسأله ۱۶. A و B دو ماتریس $n \times n$ با درایه‌های حقیقی هستند و

$$A^2 + B^2 = AB$$

ثابت کنید اگر $AB - BA$ وارون‌پذیر باشد آن‌گاه $3 \mid n$.

مسأله ۱۷. $M_n(\mathbb{C})$ را فضای برداری ماتریس‌های $n \times n$ با درایه‌های مختلط بگیرید و برای هر عضو A از آن، $C(A)$ را زیرفضای

$$\{B \in M_n(\mathbb{C}) \mid AB = BA\}$$

متشکل از ماتریس‌هایی بگیرید که با A جابه‌جا می‌شوند.

الف) ثابت کنید $\min_{A \in M_n(\mathbb{C})} (\dim_{\mathbb{C}} C(A)) = n$.

ب) فرض کنید $A \in M_n(\mathbb{C})$ چنان باشد که $C(A)$، n-بعدی شود. نشان دهید چندجمله‌ای‌های مشخصه و مینیمال A برابرند.

مسأله ۱۸. قرار دهید

$$Z = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \forall 1 \leq i \leq n : x_i \in \{0, 1\}\}$$

فرض کنید $0 \leq k \leq n$ داده شده باشد. حداکثر مقدار ممکن برای تعداد اعضای $Z \cap V$ را وقتی که V میان زیرفضاهای k-بعدی $\mathbb{R}^n$ تغییر می‌کند بیابید.

مسأله ۱۹. فرض کنید $A = [a_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n}$ یک ماتریس $n \times n$ باشد که همه‌ی درایه‌های آن نامنفی‌اند و علاوه بر این:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = n$$

الف) ثابت کنید $|\det A| \leq 1$.

ب) اگر $|\det A| = 1$ و $\lambda \in \mathbb{C}$ یک مقدار ویژه‌ی دلخواه از A باشد، نشان دهید $|\lambda| = 1$.

مسأله ۲۰. $M_n(\mathbb{R})$ را فضای برداری ماتریس‌های $n \times n$ با درایه‌های حقیقی بگیرید. فرض کنید $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ دارای این خاصیت باشد که برای هر $A, B \in M_n(\mathbb{R})$: $f(AB) = f(A)f(B)$ و f متحدا برابر صفر یا یک نیست.

الف) نشان دهید ماتریس A وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر $f(A) \neq 0$.

ب) ثابت کنید اگر علاوه بر این شرایط، $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ در نقطه‌ی متناظر ماتریس همانی مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه به ازای یک عدد حقیقی $\lambda \neq 0$، ضابطه‌ی f به یکی از صورت‌های زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ A \mapsto |\det A|^{\lambda} \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ A \mapsto sgn(\det A).|\det A|^{\lambda} \end{cases}$$

که در آن sgn نماد تابع علامت است.(راهنمایی: می‌توانید از این حکم جبرخطی استفاده کنید: اگر $g : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ تابعکی خطی باشد با این ویژگی که همواره $g(AB) = g(BA)$، آن‌گاه g مضربی از تابعک تریس خواهد بود.)

پاسخ مسأله‌ها

خشایار فیلُم

پاسخ ۱. قسمت الف: *طبق قضیه‌ی دوم سیلو، هر دو ۷-زیرگروه سیلو از G مزدوج هستند. پس تعداد ۷-زیرگروه‌های سیلوی G برابر است با تعداد مزدوج‌های P در G یعنی $[G:N_G(P)]=[G:N]$ (از نمادگذاری معمول استفاده می‌کنیم که در آن برای زیرگروه K از گروه H، نرمال‌ساز K در H به $N_H(K)$ نشان داده می‌شود.) و بنابراین $[G:N]=۵۰$. برهان خلف: فرض کنید N در G ماکسیمال نباشد. پس زیرگروه M از G موجود است که*

$$N \lneqq M \lneqq G$$

۷-زیرگروه سیلوی P از گروه متناهی G مشمول در زیرگروه M از G است و لذا یک ۷-زیرگروه سیلو از آن خواهد بود. دوباره با به کار بردن قضیه‌ی دوم سیلو، هر دو ۷-زیرگروه سیلو از M مزدوجند و لذا تعدادشان برابر است با $[M:N_M(P)]$، عددی که باید به پیمانه‌ی ۷ همنهشت با یک باشد، چرا که بنابر قضیه‌ی سوم سیلو، تعداد ۷-زیرگروه‌های سیلوی M به پیمانه‌ی ۷ برابر یک است. از طرف دیگر با توجه به تعریف نرمال‌ساز: $N_M(P)=N_G(P)\cap M$ و بنابراین چون $N_G(P)=N\lneqq M$: $N_M(P)=N$. پس

$$[M:N]\equiv ۱ \mod ۷$$

این در حالی است که $[M,N]\in\{۲,۵,۱۰,۲۵\}$، زیرا به دلیل $N\lneqq M$، $M\lneqq G$، $[M:N]$ باید مقسوم‌علیه‌ای نابدیهی از $[G:N]=۵۰$ باشد. پس به تناقض رسیده‌ایم و قسمت اول مسأله حل شد.

قسمت ب: *$Q \lhd N$ و در نتیجه $N<N_G(Q)$. ولی از قسمت قبل، N در G ماکسیمال است پس یا $N_G(Q)=G$ یا اینکه $N_G(Q)=N$. اگر حالت اول رخ دهد که $Q\lhd G$ و حکم ثابت می‌شود. پس فرض کنید حالت دوم رخ دهد و $N_G(Q)=N$. Q یک ۵-زیرگروه از گروه متناهی G است و لذا بنابر قضیه‌ای: $[G:Q]\equiv[N_G(Q):Q] \mod ۵$، که نتیجه می‌دهد: $[G:Q]\equiv[N:Q] \mod ۵$. ولی چون Q یک ۵-زیرگروه سیلو از N بود: $۵\nmid[N:Q]$ که با همنهشتی‌ای که حاصل شد در تناقض است، چرا که به دلیل $Q<N<G$، $[G:N]=۵۰$ باید $[G:Q]$ را بشمارد.*

پاسخ ۲. *یک عنصر $\tilde{s}$ از S تثبیت کنید. برای هر عدد طبیعی k، نگاشت*

$$\begin{cases} S^{(k)}\to S^{(k+۱)}\\ x\mapsto \tilde{s}x\end{cases}$$

با توجه به تعریف $S^{(k)}$ و $S^{(k+۱)}$ در صورت مسأله به عنوان مجموعه‌ی عناصری از G که ضرب به ترتیب k و $k+۱$ تا از اعضای S هستند، خوش‌تعریف و به دلیل برقرار بودن ویژگی حذف از چپ در گروه G، یک‌به‌یک است. پس $|S^{(k)}|\le|S^{(k+۱)}|$. حال توجه کنید که:

$$۰<|S=S^{(۱)}|\le|S^{(۲)}|\le\cdots\le|S^{(n)}|\le|G|=n$$

پس یا $|S^{(n)}|=n$ و به ناچار $S^{(n)}=G$ که در این حالت زیرگروه بودن $S^{(n)}$ بدیهی است یا اینکه اعداد $|S^{(۱)}|\le\cdots\le|S^{(n)}|$ همگی در $\{۱,\dots,n-۱\}$ واقع‌اند و بنابراین به ازای $۱\le k<n$ ای

$$|S^{(k)}|=|S^{(k+۱)}|$$

نشان می‌دهیم که در حالت اخیر، باز هم $S^{(n)}$ زیرگروهی از G خواهد بود. گفتیم

$$\begin{cases} S^{(k)}\to S^{(k+۱)}\\ x\mapsto \tilde{s}x\end{cases}$$

یک‌به‌یک است. پس چون $|S^{(k)}|=|S^{(k+۱)}|<\infty$، پوشا هم خواهد بود، امری که ثابت می‌کند:

(*) *اگر $s_۱,\dots,s_{k+۱}\in S$، آن‌گاه $s'_۱,\dots,s'_k\in S$ موجودند که $s_۱\dots s_{k+۱}=\tilde{s}s'_۱\dots s'_k$. $(۱\le k<n)$*

در ادامه نشان می‌دهیم که $S^{(n)}$ تحت ضرب بسته است: اگر $s_۱,\dots,s_n$ و همچنین $t_۱,\dots,t_n$ به S تعلق داشته باشند، با n بار به کار بردن (*)، می‌توان $(s_۱\dots s_n)(t_۱\dots t_n)$ را که حاصل‌ضرب دو عنصر $S^{(n)}$ است، به ازای $r_۱,\dots,r_n\in S$ مناسبی به صورت $\tilde{s}^n r_۱\dots r_n$ نوشت. ولی گروه G، n عضوی بود و لذا در آن هر عنصر به توان n همانی است. پس:

$$(s_۱\dots s_n)(t_۱\dots t_n)=\tilde{s}^n r_۱\dots r_n=r_۱\dots r_n\in S^{(n)}$$

که اثبات بسته بودن زیرمجموعه‌ی $S^{(n)}$ از گروه G تحت ضرب را تکمیل می‌کند. در نهایت برای نشان دادن اینکه $S^{(n)}$ یک زیرگروه است، باید این را که همانی و وارون هر عنصر از $S^{(n)}$ را در بردارد هم نشان داد. مورد اول بدیهی است، زیرا $e=\tilde{s}^n\in S^{(n)} \Leftarrow \tilde{s}\in S$ (برای هر $g\in G$: $g^n=e$) و درباره‌ی دومی، توجه کنید که اگر $y\in S^{(n)}$، آن‌گاه به دلیل بسته بودن $S^{(n)}$ تحت ضرب (که در بالا ثابت شد) نگاشت

$$\begin{cases} S^{(n)}\to S^{(n)}\\ x\mapsto \tilde{y}x\end{cases}$$

از مجموعه‌ی متناهی $S^{(n)}$ به خودش خوش‌تعریف و هم‌چنین به دلیل ویژگی حذف از چپ، یک‌به‌یک خواهد بود. پس پوشا هم هست. علی‌الخصوص $e \in S^{(n)}$ در برد آن قرار دارد که معادل است با $y^{-۱} \in S^{(n)}$.

پاسخ ۳. عنصر دلخواه $x \in R$ را تثبیت کنید. زیرمجموعه‌ی S از R را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S = \{x^i(۱+rx) | i \in \mathbb{N}\cup\{۰\}, r\in R\}$$

که در آن $x^۰$ برابر یک حلقه تعریف می‌شود. S یک $m.c.s$ (زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی) از R است. چرا که با قرار دادن $i=۰$ و $r=۰\in R$ در $x^i(۱+rx)$ به سادگی دیده می‌شود که $۱\in R$ را در بردارد و به علاوه تحت ضرب بسته است. زیرا:

$$(x^i(۱+rx))(x^j(۱+sx)) = x^{i+j}(۱+(r+s+rsx)x)$$

ادعا می‌کنیم $۰ \in S$. در غیر این صورت باید $S\cap(۰)=\emptyset$، امری که با توجه به $m.s.c$ بودن S، وجود ایده‌آل اول P از R را که S را قطع نمی‌کند نتیجه می‌دهد. ولی $x\in S$ و بنابراین $x\notin P$. ولی بنابر فرض مسأله P به دلیل اول بودن ماکسیمال هم هست و لذا $x\notin P$ نشان می‌دهد که $P+(x)=R$. این وجود $r\in R$ای را نتیجه می‌دهد که برای آن $۱+rx\in P$ (چرا که بنابر $P+(x)=R$، می‌توان $۱\in R$ را به صورت جمع مضربی از x و عنصری از P نوشت.) که با $P\cap S=\emptyset$ در تناقض است، زیرا بنابر تعریف $۱+rx$ در S هم واقع است. پس ثابت کردیم که $۰\in S$. این با توجه به تعریف S بدان معنی است که به ازای $a\in R$ و $k\in\mathbb{N}$ای: $x^k(۱+ax)=۰$.
حال $x+ax^۲$ پوچ‌توان است زیرا:

$$(x+ax^۲)^k = \underbrace{x^k(۱+ax)}_{=۰}(۱+ax)^{k-۱}=۰$$

پاسخ ۴. هر ایده‌آل I از حلقه‌ی خارج‌قسمتی $\frac{\mathbb{Z}_۲[x]}{(x^n-۱)}$ به ازای ایده‌آلی هم‌چون J از $\mathbb{Z}_۲[x]$ با ویژگی $(x^n-۱)\subset J$، به صورت $\frac{J}{(x^n-۱)}$ قابل بیان است. ولی اگر $I=\frac{J}{(x^n-۱)}$، آن‌گاه $I^۲=\frac{J^۲+(x^n-۱)}{(x^n-۱)}$ و بنابراین برای حل مسأله کافی است نشان داد که برای هر ایده‌آل J از $\mathbb{Z}_۲[x]$ که $x^n-۱$ را در برداشته باشد: $J=(x^n-۱)+J^۲$. ولی توجه کنید که $\mathbb{Z}_۲$ یک میدان و لذا $\mathbb{Z}_۲[x]$، یک $P.I.D.$ است. پس ایده‌آل J از $\mathbb{Z}_۲[x]$ به ازای یک چندجمله‌ای $f(x)\in\mathbb{Z}_۲[x]$ برابر $(f(x))$ خواهد بود و اینکه شامل ایده‌آل $(x^n-۱)$ باشد به معنای $f(x)|x^n-۱$ در حلقه‌ی چندجمله‌ای $\mathbb{Z}_۲[x]$ خواهد بود. حال باید نشان داد که $J=(x^n-۱)+J^۲$ یا معادلاً $(f(x))=(x^n-۱)+(f^۲(x))$. اینکه سمت راست، سمت چپ را دربردارد، بدیهی است چرا که $f(x)$ عامل هردوی $f^۲(x)$ و $x^n-۱$ است. لذا تنها باید ثابت کنیم که در تساوی مذکور، سمت راست مشمول در سمت چپ است یا به عبارت دیگر می‌توان $f(x)$ را به صورت ترکیب خطی $f^۲(x)$ و $x^n-۱$ با ضرایب در $\mathbb{Z}_۲[x]$ نوشت. اثبات این امر حل را تکمیل خواهد کرد. $f(x)$ عاملی از چندجمله‌ای $x^n-۱$ است و بنابراین $g(x)\in\mathbb{Z}_۲[x]$ موجود است که $f(x)g(x)=x^n-۱$. دو چندجمله‌ای $f(x)$ و $g(x)$، هنگامی که به ضرب عناصر تحویل‌ناپذیر در $\mathbb{Z}_۲[x]$ تجزیه شوند (توجه کنید که $\mathbb{Z}_۲[x]$ یک $U.F.D$ است.) هیچ عامل تحویل‌ناپذیر مشترکی نخواهند داشت. چرا که در غیر این صورت اگر چندجمله‌ای $h(x)\in\mathbb{Z}_۲[x]$ با درجه‌ی مثبت موجود باشد که $h(x)|f(x)$ و $h(x)|g(x)$، آن‌گاه $h^۲(x)|f(x)g(x)=x^n-۱$ و این امکان‌پذیر نیست چرا که نتیجه می‌دهد $h(x)|(x^n-۱)'=nx^{n-۱}=x^{n-۱}$ که در تساوی آخر از این استفاده کردیم که به دلیل فرد بودن n، در میدان $\mathbb{Z}_۲$، $n=۱$. پس اگر $f(x)$ و $g(x)$ عامل تحویل‌ناپذیر مشترکی در $\mathbb{Z}_۲[x]$ داشته باشند، آن‌گاه $x^{n-۱}$ و $x^n-۱$ مقسوم‌علیه مشترکی مانند $h(x)$ با درجه‌ی مثبت دارند که تناقض است. چرا که تساوی $x(x^{n-۱})-(x^n-۱)=۱$ نتیجه خواهد داد $h(x)|۱$. پس نشان دادیم که $f(x)$ و $g(x)$ نسبت به هم اولند. اکنون $P.I.D.$ بودن $\mathbb{Z}_۲[x]$ وجود عناصر $r(x),s(x)\in\mathbb{Z}_۲[x]$ را که $r(x)f(x)+s(x)g(x)=۱$ نتیجه می‌دهد. با ضرب طرفین در $f(x)$ و به کار بردن $f(x)g(x)=x^n-۱$ خواهیم داشت:

$$r(x)f^۲(x)+s(x)(x^n-۱)=f(x)$$

که نشان می‌دهد $f(x)$ به صورت ترکیب خطی $f^۲(x)$ و $x^n-۱$ با ضرایب در $\mathbb{Z}_۲[x]$ قابل بیان است.

پاسخ ۵. اگر $a\in S^۱$ دلخواه و G_a پایدارساز a در عمل G بر $S^۱$ باشد یعنی زیرگروه $\{g\in G|g.a=a\}$، آن‌گاه می‌دانیم که مدار a در عمل G یعنی $\{g.a|g\in G\}$، در تناظر یک‌به‌یک است با مجموعه‌ی همدسته‌های چپ زیرگروه G_a از G. پس چون مدار شامل a متناهی است: $[G:G_a]<\infty$ و لذا اگر برای یک $a\in S^۱$ دلخواه، متناهی بودن G_a را نشان دهیم، متناهی بودن G نتیجه می‌شود. بدین منظور $S^۱$ را دایره‌ی واحد در صفحه‌ی مختلط می‌گیریم: $S^۱=\{z\in\mathbb{C}||z|=۱\}$ و نشان می‌دهیم پایدارساز $۱\in S^۱$ -که آن را H می‌نامیم- متناهی است. چون در عمل G بر $S^۱$ مدار هر نقطه متناهی است، این درباره‌ی عمل زیرگروه H از آن هم صادق است. پس اگر $g\in H$ دلخواه باشد، همیومورفیسم

$$\begin{cases} f:S^۱\to S^۱\\ f(x)=g.x\end{cases}$$

اولاً $۱\in S^۱$ را ثابت نگه می‌دارد و ثانیاً برای هر $x\in S^۱$ زیرمجموعه‌ی $\{f^k(x)|k\in\mathbb{N}\}$ (منظور از f^k، $\overbrace{f\circ\cdots\circ f}^{k\text{مرتبه}}$ است.) متناهی است.

نشان خواهیم داد که همیومورفیسم $f : S^1 \to S^1$ باید همانی یا نگاشت $z \mapsto \bar{z}$ باشد. امری که در صورت اثبات، نشان می‌دهد پایدارساز H از $1 \in S^1$ متناهی است و بنابراین طبق آن‌چه که در بالا گفتیم، $|G| < \infty$ را به دست می‌دهد. پس توجه خود را به همیومورفیسم $f : S^1 \to S^1$ معطوف می‌کنیم. نگاشت

$$\begin{cases} p:\mathbb{R}\to S^1 \\ p(t)=e^{2\pi i t}\end{cases}$$

را نگاشت خارج قسمتی‌ای بگیرید که می‌توان از طریق آن S^1 را با فضای خارج‌قسمتی $\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}$ یکی گرفت. با ترکیب آن با f، به نگاشت پیوسته‌ی $f\circ p:\mathbb{R}\to S^1$ می‌رسیم.به سادگی می‌توان دید که: تابع پیوسته‌ی $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ موجود است که $f\circ p = p\circ h$ [1] یا معادلا:

$$(*)\quad \forall t\in\mathbb{R}: f(e^{2\pi i t}) = e^{2\pi i h(t)}$$

ولی f، $1\in S^1$ (توجه کنید که S^1 را دایره‌ی واحد در صفحه‌ی مختلط گرفتیم.) را به خودش می‌برد و لذا با قرار دادن $t=0$ در $(*)$: $h(0)\in\mathbb{Z} \Leftarrow e^{2\pi i h(0)}$. بدیهی است که اگر تابع پیوسته‌ی $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با یک عدد صحیح جمع شود، تابع حاصل باز هم $(*)$ را برآورده می‌کند و لذا چون $h(0)\in\mathbb{Z}$، بدون کاسته شدن از کلیت می‌توان فرض کرد که $h(0)=0$. با تبدیل t به $t+1$ در $(*)$، سمت چپ بدون تغییر می‌ماند و بنابراین $\forall t\in\mathbb{R}: h(t+1)-h(t)\in\mathbb{Z}$. پس عدد صحیح m موجود است که

$$(**)\quad \forall t\in\mathbb{R}: h(t+1)-h(t)=m$$

در واقع چون $h(0)=0$، $(**)$ نشان می‌دهد که $h(1)=m\in\mathbb{Z}$. تحدید p به هر بازه‌ی به شکل $[t_0,t_0+1)$ نگاشتی یک‌به‌یک از آن بازه به S^1 به دست می‌دهد و حال با توجه به $(*)$، یک‌به‌یک بودن $f:S^1\to S^1$ ایجاب می‌کند که تحدید تابع پیوسته‌ی $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ به هر بازه‌ی $[t_0,t_0+1)$ یک‌به‌یک شود، امری که تنها وقتی می‌تواند رخ دهد که h اکیدا یکنوا باشد. پس عدد صحیح $m=h(1)$ ناصفر است و به علاوه $|m|\geq 2$ هم رخ نمی‌دهد. چرا که در غیراین صورت با توجه به $h(0)=0$، بنابر قضیه‌ی مقدار میانی $t_0\in(0,1)$ای با $h(t_0)\in\{\pm1\}$ موجود خواهد بود. پس از $(*)$، $f:S^1\to S^1$، $e^{2\pi i t_0}\neq 1$ را هم علاوه بر $1\in S^1$ به $1\in S^1$ می‌برد که با یک‌به‌یک بودن f منافات دارد. پس $m=\pm1$ و باید یکی از دو حالتی که در ادامه می‌آید برای تابع اکیدا یکنوای $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (که $h(0)=0$) رخ دهد:

الف) یا $m=1$ و در نتیجه h اکیدا صعودی است و $(**)$ تبدیل می‌شود به $\forall t\in\mathbb{R}: h(t+1)-h(t)=1$

[1] این در واقع همان ترفیع fop از طریق نگاشت پوششی $p:\mathbb{R}\to S^1$ است.

ب) یا آن‌که $m=-1$، h اکیدا نزولی است و از $(**)$:

$$\forall t\in\mathbb{R}: h(t+1)-h(t)=-1$$

نشان می‌دهیم در حالت اول h همانی است و در حالت دوم نگاشت $h(t)=-t$ است. اثبات این، کار را تمام می‌کند. چرا که آن‌گاه از $(*)$، $f:S^1\to S^1$ به ترتیب همانی یا $z\mapsto\bar z$ خواهد بود. ابتدا حالت (الف) را در نظر می‌گیریم: h، $[0,1]$ را به $[h(0),h(1)]=[0,1]$ می‌برد و کافی است نشان داد که بر این بازه همانی است (زیرا همواره $h(t+1)-h(t)=1$). اگر این رخ ندهد، $t_0\in(0,1)$ موجود خواهد بود که $h(t_0)\neq t_0$. پس یا $0<t_0<h(t_0)<1$ یا اینکه $0<h(t_0)<t_0<1$. پس با توجه به اکیدا صعودی بودن $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ و $h(0)=0$ و $h(1)=1$، به ترتیب خواهیم داشت $0<t_0<h(t_0)<h\circ h(t_0)<\cdots<1$ یا $0<\cdots<h\circ h(t_0)<h(t_0)<t_0<1$. در هر حال نتیجه می‌شود اعضای دنباله‌ی $\{h^n(t_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ (ترکیب n- باره‌ی h با خودش را به h^n نمایش داده‌ایم.) از عناصر بازه‌ی $(0,1)$ دوبه‌دو متمایزند. پس با توجه به اینکه تحدید $p:\mathbb{R}\to S^1$ به $(0,1)$ یک‌به‌یک است، اعضای دنباله‌ی $\{f^n(e^{2\pi i t_0})=e^{2\pi i h^n(t_0)}=p(h^n(t_0))\}_{n\in\mathbb{N}}$ (در این‌جا دوباره $(*)$ را به کار بردیم.) از عناصر S^1 دوبه‌دو متمایزند. این تناقض است، زیرا گفتیم $\{f^k(x)|k\in\mathbb{N}\}$ برای هر $x\in S^1$ متناهی است. پس همانی بودن $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ در حالت (الف) ثابت شد. حالت (ب) هم از آن نتیجه می‌شود. چرا که اگر $\tilde h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $\tilde h(t)=h(-t)$ تعریف شود، تابع پیوسته‌ای خواهد بود که در خواص (الف) صدق می‌کند: به دلیل اکیدا نزولی بودن h اکیدا صعودی است و $\forall t\in\mathbb{R}:\tilde h(t+1)-\tilde h(t)=1$، زیرا $t\mapsto h(t+1)-h(t)$ متحد با -1 بود. حال کافی است همان استدلال (الف) را برای $\tilde h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ و همیومورفیسم

$$\begin{cases}\tilde f: S^1\to S^1\\ \tilde f(z)=f(\bar z)\end{cases}$$

که به جای f قرار می‌گیرد (و ویژگی‌ای مشابه f دارد: $\{\tilde f^k(x)|k\in\mathbb{N}\}$ متناهی است.) به کار برد که نشان می‌دهد $\tilde h$ همانی و لذا h نگاشت $h(t)=-t$ است. این بررسی حالت (ب) را تکمیل می‌کند. پس نشان دادیم که در عمل G بر $S^1=\{z\in\mathbb{C}||z|=1\}$، پایدارساز ۱ حداکثر دو عضوی است و این همان‌گونه که در بالا بیان شد، متناهی بودن G را به دست می‌دهد.

پاسخ ۶. حکم را با استقرا بر n ثابت می‌کنیم. نامساوی داده شده در حالت $n=1$ به $\forall\alpha\in(0,\pi):\sin\alpha>0$ تبدیل می‌شود که برقرار است. حال فرض کنید حکم برای $n-1$ درست باشد. به منظور اثبات

آن برای n، تابع f را با تعریف زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} f:[0,\pi]\to\mathbb{R}\\ f(x)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\cdots+\frac{1}{n}\sin nx\end{cases}$$

f تابعی مشتق‌پذیر است و لذا اگر مینیمم مطلق f بر $[0,\pi]$ در c رخ دهد، $c\in\{0,\pi\}$ یا اینکه $c\in(0,\pi)$ و $f'(c)=0$. بنابراین صفرهای f' در $(0,\pi)$ را بررسی می‌کنیم: $f'(x)=\sum_{k=1}^{n}\cos kx$ بنابراین اگر $c\in(0,\pi)$ چنان باشد که $f'(c)=0$، آن‌گاه $\sum_{k=1}^{n}\cos kc=0$ و این را چون $\sin\frac{c}{2}\neq 0$ (به دلیل $c\in(0,\pi)$)، می‌توان این‌گونه نوشت:

$$\begin{aligned}
0&=\sum_{k=1}^{n}\cos kc\\
&=\frac{1}{2\sin\frac{c}{2}}\sum_{k=1}^{n}2\cos kc\sin\frac{c}{2}\\
&=\frac{1}{2\sin\frac{c}{2}}\sum_{k=1}^{n}\big(\sin(kc+\frac{c}{2})-\sin(kc-\frac{c}{2})\big)\\
&=\frac{1}{2\sin\frac{c}{2}}\sum_{k=1}^{n}\big(\sin\frac{(2k+1)c}{2}-\sin\frac{(2k-1)c}{2}\big)\\
&=\frac{2}{2\sin\frac{c}{2}}\big(\sin\frac{(2n+1)c}{2}-\sin\frac{c}{2}\big)
\end{aligned}$$

پس ریشه‌های f' در $(0,\pi)$ عبارتند از ریشه‌های معادله‌ی $\sin\frac{(2n+1)c}{2}=\sin\frac{c}{2}$ در همان بازه. تساوی اخیر دقیقا زمانی برقرار می‌گردد که $(n+1)c=\frac{(2n+1)c}{2}+\frac{c}{2}$ مضرب فردی از π یا $nc=\frac{(2n+1)c}{2}-\frac{c}{2}$ مضرب زوجی از π باشد. پس اگر قرار دهیم:

$$A=\big\{\frac{(2k+1)\pi}{n+1}\big|k\in\mathbb{Z},\frac{(2k+1)\pi}{n+1}\in(0,\pi)\big\}$$

$$B=\big\{\frac{2k'\pi}{n}\big|k'\in\mathbb{Z},\frac{2k'\pi}{n}\in(0,\pi)\big\}$$

نتیجه می‌شود که ریشه‌های f' در $(0,\pi)$ عبارتند از اعضای $A\cup B$. حال اگر نشان دهیم که مقادیری که f بر نقاط واقع در $A\cup B$ می‌گیرد مثبت‌اند، حل به اتمام می‌رسد. چرا که گفتیم مینیمم مطلق $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ یا در دو سر بازه رخ می‌دهد یا در $c\in(0,\pi)$هایی که $f'(c)=0$ یعنی همان نقاط واقع در $A\cup B$. پس چون $f(0)=f(\pi)=0$، اگر ثابت کنیم که f بر $A\cup B$ مثبت است، نتیجه می‌شود که مینیمم مطلق $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ برابر صفر است که در دو سر بازه رخ می‌دهد و لذا

$$\forall x\in(0,\pi):f(x)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\cdots+\frac{1}{n}\sin nx>0$$

که همان حکم استقرا است. پس به بررسی مقدار f' در $c\in A\cup B$ می‌پردازیم: اگر $c\in B$، $c=\frac{2k'\pi}{n}\in(0,\pi)$ به ازای یک عدد صحیح k' و در این صورت خواهیم داشت: $\sin nc=\sin 2k'\pi=0$ و در نتیجه:

$$f(c)=\sin c+\frac{1}{2}\sin 2c+\cdots+\frac{1}{n-1}\sin(n-1)c$$

که بنابر فرض استقرا مثبت است. حال اگر $c\in A$، آن‌گاه به ازای $k\in\mathbb{Z}$ای $c=\frac{(2k+1)\pi}{n+1}\in(0,\pi)$. بنابراین باید $0\leq 2k<n$ و در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\sin nc&=\sin(nc-2k\pi)\\
&=\sin\big(\frac{(2k+1)n\pi}{n+1}-2k\pi\big)\\
&=\sin\big(\frac{\overbrace{(n-2k)\pi}^{\in(0,\pi)\ \text{زیرا}\ 0\leq 2k<n}}{n+1}\big)>0
\end{aligned}$$

پس

$$f(c)-(\sin c+\frac{1}{2}\sin 2c+\cdots+\frac{1}{n-1}\sin(n-1)c)$$

$$=\frac{1}{n}\sin nc>0$$

و این در حالی است که از فرض استقرا

$$\sin c+\frac{1}{2}\sin 2c+\cdots+\frac{1}{n-1}\sin(n-1)c>0$$

که ثابت می‌کند در این حالت هم $f(c)>0$.

پاسخ ۷. تابع F را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(a)=\int_{0}^{1}\frac{\ln(ax+1)}{x^2+1}\mathrm{d}x$$

پس $F:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر است و $F(1)$ همان عددی است که در پی آن هستیم. تلاش می‌کنیم با بررسی این تابع، انتگرال مطلوب را محاسبه کنیم. داریم:

$$F'(a)=\int_{0}^{1}\frac{\partial\big(\frac{\ln(ax+1)}{x^2+1}\big)}{\partial a}\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}\frac{x}{(ax+1)(x^2+1)}\mathrm{d}x$$

در ادامه با تجزیه به کسرهای جزئی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&\frac{x}{(ax+1)(x^2+1)}\\
&=\frac{1}{a^2+1}\big(\frac{x}{x^2+1}\big)+\frac{a}{a^2+1}\big(\frac{1}{x^2+1}\big)-\frac{a}{a^2+1}\big(\frac{1}{ax+1}\big)
\end{aligned}$$

با قرار دادن در تساوی قبلی:

$$\begin{aligned}
F'(a) &= \\
&\int_0^1 \Big(\frac{1}{a^2+1}\big(\frac{x}{x^2+1}\big)+\frac{a}{a^2+1}\big(\frac{1}{x^2+1}\big)-\frac{a}{a^2+1}\big(\frac{1}{ax+1}\big)\Big)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{a^2+1}\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x+\frac{a}{a^2+1}\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x \\
&- \frac{1}{a^2+1}\int_0^1 \frac{a}{ax+1}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{a^2+1}\big(\frac{1}{2}\ln(x^2+1)|_0^1\big)+\frac{a}{a^2+1}(\arctan x|_0^1) \\
&- \frac{1}{a^2+1}(\ln(ax+1)|_0^1) \\
&= \frac{\ln 2}{2(a^2+1)}+\frac{\pi a}{4(a^2+1)}-\frac{\ln a+1}{a^2+1}
\end{aligned}$$

از طرفی، به وضوح $F(0)=0$ و لذا $F(t)=\int_0^t F'(a)\mathrm{d}a$. اگر در سمت راست آن‌چه را که در بالا برای $F'(a)$ حاصل شد قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$F(t)=\int_0^t \frac{\ln 2}{2(a^2+a)}\mathrm{d}a+\int_0^t \frac{\pi a}{4(a^2+1)}\mathrm{d}a-\int_0^t \frac{\ln a+1}{a^2+1}\mathrm{d}a$$

اگر قرار دهیم $t=1$، این با توجه به $F(1)=\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1}$ تبدیل می‌شود به:

$$\begin{aligned}
F(1) &= \int_0^1 \frac{\ln 2}{2(a^2+1)}\mathrm{d}a+\int_0^1 \frac{\pi a}{4(a^2+1)}\mathrm{d}a-F(1)\Rightarrow F(1) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\int_0^1 \frac{\ln 2}{2(a^2+1)}\mathrm{d}a+\int_0^1 \frac{\pi a}{4(a^2+1)}\mathrm{d}a\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\frac{\ln 2}{2}(\arctan a|_{a=0}^1)+\frac{\pi}{4}\big(\frac{\ln(a^2+1)}{2}|_0^1\big)\Big) \\
&= \frac{\pi\ln 2}{8}
\end{aligned}$$

بنابراین انتگرال $\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1}$ برابر است با $\frac{\pi\ln 2}{8}$.

پاسخ ۸. ویژگی نخست ثابت می‌کند که تمامی توابع متعلق به $\mathcal{F}$ نامنفی‌اند و لذا $\forall f\in\mathcal{F}:\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geq 0$. پس با انتخاب یک $\epsilon>0$ دلخواه، برای اثبات حکم مطلوب کافی است نشان داد که $f\in\mathcal{F}$ای موجود است که $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<\epsilon$. برای هر $x\in[a,b]$ دلخواه، چون بنابر ویژگی دوم $\inf_{g\in\mathcal{F}} g(x)=0$، عضوی از $\mathcal{F}$ مانند تابع پیوسته‌ی $f_x:[a,b]\to\mathbb{R}$ موجود است که $f_x(x)<\frac{\epsilon}{b-a}$. به دلیل پیوستگی، همسایگی باز I_x حول نقطه‌ی x در بازه‌ی $[a,b]$ موجود است که برای هر $t\in I_x$ داریم: $f_x(t)<\frac{\epsilon}{b-a}$.
حال خانواده‌ی $\{I_x\}_{x\in[a,b]}$ از بازهای $[a,b]$، این بازه را می‌پوشاند و بنابراین به دلیل فشردگی $[a,b]$، متناهی‌تا از I_xها $[a,b]$ را می‌پوشانند: نقاط $x_1,\dots,x_n\in[a,b]$ موجودند که $[a,b]=I_{x_1}\cup\cdots\cup I_{x_n}$. پس چون برای هر $1\leq i\leq n$، مقدار تابع $f_{x_i}:[a,b]\to\mathbb{R}$ در نقاط I_{x_i} از $\frac{\epsilon}{b-a}$ کمتر بود، $f:=\min(f_1,\dots,f_n)$ که با استفاده‌ی مکرر از ویژگی دوم به $\mathcal{F}$ تعلق دارد، یک تابع پیوسته‌ی $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ خواهد بود که برای آن $\forall t\in[a,b]:f(t)<\frac{\epsilon}{b-a}$ و لذا $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<\epsilon$. پس این همان عنصر مطلوب از $\mathcal{F}$ است.

پاسخ ۹. برهان خلف: برای هر $c\in(0,1)$ داریم $f(c)\neq\int_0^c f(x)\mathrm{d}x$. تابع $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(t)=e^{-t}\int_0^t f(x)\mathrm{d}x$$

بنابراین $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر است و $g(0)=0$. حال فرض خلف نتیجه می‌دهد که $g(c)\neq 0$ برای هر $c\in(0,1]$. چرا که اگر این‌گونه نباشد باید $g'(t)=e^{-t}(f(t)-\int_0^t f(x)\mathrm{d}x)$ بنابر قضیه‌ی رول در نقطه‌ای از $(0,1)$ صفر شود که بنابر فرض خلف امکان‌پذیر نیست. پس $g(c)\neq 0$ برای هر $c\in(0,1]$ که علی‌الخصوص در $c=1$ نتیجه می‌دهد $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\neq 0$. بدون کاسته شدن از کلیت و با جایگزین کردن f با $-f$ در صورت لزوم، می‌توان فرض کرد که $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x>0$. حال توجه کنید که چون بنابر فرض خلف $f(c)\neq\int_0^c f(x)\mathrm{d}x$ برای هر $c\in(0,1)$، به دلیل پیوستگی یا باید $\forall t\in(0,1):f(t)>\int_0^t f(x)\mathrm{d}x$ یا آن‌که $\forall t\in(0,1):f(t)<\int_0^t f(x)\mathrm{d}x$. اولی رخ نمی‌دهد چرا که

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x>f(1)=0$$

لاجرم باید گزاره‌ی دوم صحیح باشد:

$$\forall t\in(0,1):f(t)<\int_0^t f(x)\mathrm{d}x$$

ولی همان‌گونه که قبلاً دیدیم $g'(t)=e^{-t}(f(t)-\int_0^t f(x)\mathrm{d}x)$ و بنابراین $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ که با $g(t)=e^{-t}\int_0^t f(x)\mathrm{d}x$ داده می‌شد اکیداً نزولی است. اما این هم به تناقض منتهی می‌گردد، زیرا با توجه به $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x>0$: $g(1)=\frac{1}{e}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x>g(0)=0$. این حل را تکمیل می‌کند.

پاسخ ۱۰. معادله‌ای که در صورت مسأله داده شده، اطلاعاتی درباره‌ی چگونگی رفتار تابع حاصل از تحدید h به خطوطی در صفحه که موازی بردار (a,b) هستند به دست می‌دهد: فرض کنید $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ دلخواه باشد و تابع

$$\begin{cases} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f(t)=h(x_0+at,y_0+bt)\end{cases}$$

را در نظر بگیرید. به کمک قاعده‌ی زنجیره‌ای و معادله‌ای که h در آن صدق می‌کند:

$$\begin{aligned}
f'(t) &= a\frac{\partial h}{\partial x}(x_0+at,y_0+bt)+b\frac{\partial h}{\partial y}(x_0+at,y_0+bt) \\
&= h(x_0+at,y_0+bt)=f(t)
\end{aligned}$$

پس $f(t)=f(۰)e^t$. بنابراین اگر $f(۰)=h(x_۰,y_۰)\neq ۰$:
$$\lim_{t\to+\infty}|h(x_۰+at,y_۰+bt)|=\lim_{t\to+\infty}|f(t)|=+\infty$$
که با کران‌دار بودن h در تناقض است. پس مقدار h در نقطه‌ی $(x_۰,y_۰)$ که به دلخواه انتخاب شده بود صفر است و این حل را تکمیل می‌کند.

پاسخ ۱۱. ابتدا توجه کنید که اگر $T:H\to H$ خودتوان باشد، یعنی $T=T^۲$، آن‌گاه $\|T\|\in\{۰\}\cup[۱,\infty)$. چرا که
$$\|T\|=\|T^۲\|\le\|T\|^۲\Rightarrow\|T\|.(\|T\|-۱)\ge ۰$$

پس برای حل یک طرف مسأله، کافی است نشان دهیم که اگر این عملگر خودالحاق هم باشد، آن‌گاه همواره $|Tx|\le|x|$. چرا که در این صورت برقرار بودن این، باید $\|T\|\le ۱$ که به همراه آن‌چه که در بالا بیان شد، نتیجه می‌دهد که نرم عملگر T صفر یا یک است. به منظور اثبات $|Tx|\le|x|$، توجه کنید که هر $x\in H$ دلخواه را می‌توان به شکل $x=Tx+(x-Tx)$ نوشت و در سمت راست تساوی، بردارهای ظاهر شده بر هم عمودند. زیرا:
$$<Tx,x>\overbrace{=}^{\text{از } T^۲=T}<T(Tx),x>\overbrace{=}^{\text{زیرا } T \text{ خودالحاق است}}<Tx,Tx>$$
$$\Rightarrow<Tx,x-Tx>=۰$$
بنابراین $x=Tx+(x-Tx)$ نتیجه می‌دهد که:
$$|x|^۲=|Tx|^۲+|x-Tx|^۲$$
که آن هم $|Tx|\le|x|$ را به دست می‌دهد. برای حل طرف دیگر مسأله باید نشان داد که اگر $T:H\to H$ خودتوان باشد و $\|T\|\in\{۰,۱\}$، آن‌گاه T خودالحاق هم خواهد بود. صفر بودن نرم عملگر T به معنای $T\equiv ۰$ است که در آن حالت حکم بدیهی است. پس فرض کنید $\|T\|=۱$. عملگر T^* را الحاقی T و $x\in H$ را دلخواه بگیرید. داریم:
$$(x-Tx)-T^*x=(x-T^*x)-Tx$$
در طرفین این تساوی بردارهای ظاهر شده متعامدند:
$$\begin{cases}<x-Tx,T^*x>=<x,T^*x>-<Tx,T^*x>\\ \overbrace{=}^{\text{استفاده از تعریف الحاقی}}<Tx,x>-<T(Tx),x>\overbrace{=}^{\text{از } T^۲=T}۰\\ <x-T^*x,Tx>=<x,Tx>-<T^*x,Tx>\\ \underbrace{=}_{\text{استفاده از تعریف الحاقی}}<x,Tx>-<x,T(Tx)>\underbrace{=}_{\text{از } T^۲=T}۰\end{cases}$$
پس با محاسبه‌ی نرم دوطرف تساوی
$$(x-Tx)-T^*x=(x-T^*x)-Tx$$
گزاره‌ی زیر را خواهیم داشت:
$$\forall x\in H:|x-Tx|^۲+|T^*x|^۲=|x-T^*x|^۲+|Tx|^۲$$
اکنون به جای x را با Tx جایگزین می‌کنیم و با استفاده‌ی مجدد از خودتوان بودن T، خواهیم داشت:
$$|T^*(Tx)|^۲=|Tx-T^*(Tx)|^۲+|Tx|^۲$$
ولی می‌دانیم که نرم هر عملگری با الحاقی‌اش برابر است و بنابراین همانند T برای T^* هم $\|T^*\|=۱$ که نشان می‌دهد در تساوی اخیر: $|T^*(Tx)|\le|Tx|$ و با توجه به تساوی مذکور، این تنها وقتی می‌تواند برقرار باشد که جمله‌ی $|Tx-T^*(Tx)|^۲$ صفر شود. پس $Tx=T^*(Tx)$ و در نتیجه $T=T^*\circ T$. ولی $T^*\circ T$ عملگری خودالحاق بر فضای هیلبرت H است و بنابراین T هم باید چنین باشد.

پاسخ ۱۲. با توجه با مفروضات مسأله، می‌توان چندجمله‌ای $p(z)$ را این‌گونه نوشت:
$$p(z)=A\prod_{i=۱}^{n}(z-\alpha_i)\quad A\neq ۰,\forall ۱\le i\le n:|\alpha_i|<۱$$
بنابراین $p^*(z)$ برابر خواهد بود با:
$$\begin{aligned}&p(z)=A\prod_{i=۱}^{n}(z-\alpha_i)\\ &\Rightarrow\overline{p(\frac{۱}{\bar z})}=\overline{A\prod_{i=۱}^{n}(\frac{۱}{\bar z}-\alpha_i)}=\bar A\prod_{i=۱}^{n}(\frac{۱}{z}-\bar\alpha_i)\\ &\Rightarrow p^*(z)=z^n\overline{p(\frac{۱}{\bar z})}=\bar A\prod_{i=۱}^{n}(۱-z\bar\alpha_i)\end{aligned}$$
پس چندجمله‌ای‌های $p(z)$ و $p^*(z)$ به صورت به ترتیب $A\prod_{i=۱}^{n}(z-\alpha_i)$ و $\bar A\prod_{i=۱}^{n}(۱-z\bar\alpha_i)$ تجزیه شدند. حال نکته‌ی ساده‌ی زیر نتیجه می‌دهد که $|p^*(z)|<|p(z)|$ هرگاه $|z|>۱$:

$(*)$ اگر هر دو عدد مختلط z و α چنان باشند که $|z|>۱$ و $|\alpha|<۱$، آن‌گاه $|۱-\bar\alpha z|<|z-\alpha|$.

برای دیدن دلیل درستی $(*)$، داریم:
$$\begin{aligned}&|z-\alpha|^۲-|۱-\bar\alpha z|^۲\\ &=(|z|^۲+|\alpha|^۲-۲Re(z\bar\alpha))-(۱+|\bar\alpha z|^۲-۲Re(\bar\alpha z))\\ &=|z|^۲+|\alpha|^۲-۱-|z|^۲.|\alpha|^۲\\ &=-(|z|^۲-۱)(|\alpha|^۲-۱)\ge ۰\end{aligned}$$
به کار بردن $(*)$ و با توجه به تجزیه‌هایی که برای $p(z)$ و $p^*(z)$ ارائه گردید، نشان می‌دهد که:
$$(**)\forall z\in\mathbb{C}:|z|>۱\Rightarrow|p^*(z)|<|p(z)|$$
حال $\epsilon>۰$ را دلخواه بگیرید. از $(**)$، دو چندجمله‌ای $p(z)$ و $p^*(z)$ بر خم $|z|=۱+\epsilon$ نامساوی $|p^*(z)|<|p(z)|$ را برآورده می‌کنند و لذا از قضیه‌ی روشه تعداد ریشه‌های $p(z)$ و $p(z)+p^*(z)$

با حساب تکرر در گوی باز $\{z \in \mathbb{C}||z| < ۱+\epsilon\}$ یکی است. ولی از فرض مسأله، تمامی n ریشه‌ی $p(z)$ با حساب تکرر، در گوی باز واحد واقعند. پس $p(z)+p^*(z)$ که یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر n است ($p(z)$ و $p^*(z)$ هر دو از درجه‌ی n بودند.) با حساب تکرر در $\{z \in \mathbb{C}||z| < ۱+\epsilon\}$، n ریشه دارد. امری که نتیجه می‌دهد این چندجمله‌ای خارج گوی باز به شعاع $۱+\epsilon$ حول مبدا ریشه ندارد. پس با توجه به دلخواه بودن $\epsilon > ۰$، باید تمامی ریشه‌های $p(z)+p^*(z)$ در گوی بسته‌ی واحد واقع شوند.

پاسخ ۱۳. برای زیرمجموعه‌ی دلخواه A از $\mathbb{N}$ تعریف می‌کنیم:

$$f(A)=\{a+۱|a\in A\}$$

لذا $x-۱\in A \iff x\in f(A)$. پس طبق روش ساختن $S_{n+۱}$ از روی S_n در صورت مسأله، عدد طبیعی دلخواه x به $S_{n+۱}$ تعلق دارد، اگر و تنها اگر در دقیقا یکی از S_n و $f(S_n)$ واقع باشد. پس $S_{n+۱}=S_n\Delta f(S_n)$ که در آن Δ نمایانگر تفاضل متقارن دو زیرمجموعه از اعداد طبیعی است.به سادگی می‌توان تحقیق کرد که $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (مجموعه‌ی تمامی زیرمجموعه‌های $\mathbb{N}$) با عمل Δ یک گروه آبلی تشکیل می‌دهد که عنصر همانی در آن $\emptyset$، مرتبه‌ی سایر عناصر دو و $f:(\mathcal{P}(\mathbb{N}),\Delta)\to(\mathcal{P}(\mathbb{N}),\Delta)$ در این ساختار گروهی یک همریختی است: $f(A\Delta B)=f(A)\Delta f(B)$. به کمک این موارد، با استقرا نشان خواهیم داد که:

$$\forall n,k\geq ۰; S_{n+۲^k}=S_n\Delta f^{۲^k}(S_n)$$

که در آن منظور از f^i، $\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{i\ \text{مرتبه}}$ است. $S_{n+۲^k}=S_n\Delta f^{۲^k}(S_n)$ را با استقرا بر $k\geq ۰$ ثابت می‌کنیم: این در حالت $k=۰$ همان $S_{n+۱}=S_n\Delta f(S_n)$ است که در بالا بیان شد و با فرض درستی $\forall n: S_{n+۲^k}=S_n\Delta f^{۲^k}(S_n)$ داریم:

$$\begin{aligned}&\forall A,B\subset\mathbb{N}: f(A\Delta B)=f(A)\Delta f(B)\\&\Rightarrow f^{۲^k}(S_{n+۲^k})=f^{۲^k}(S_n\Delta f^{۲^k}(S_n))\\&=f^{۲^k}(S_n)\Delta f^{۲^{k+۱}}(S_n)\end{aligned}$$

حال از فرض استقرا

$$S_{n+۲^k}=S_n\Delta f^{۲^k}(S_n)$$

و

$$S_{n+۲^{k+۱}}=S_{n+۲^k}\Delta f^{۲^k}(S_{n+۲^k})$$

با ترکیب این موارد

$$\begin{aligned}S_{n+۲^{k+۱}}&=S_{n+۲^k}\Delta f^{۲^k}(S_{n+۲^k})\\&=(S_n\Delta f^{۲^k}(S_n))\Delta(f^{۲^k}(S_n)\Delta f^{۲^{k+۱}}(S_n))\\&=(S_n\Delta f^{۲^{k+۱}}(S_n)\Delta\big(\overbrace{f^{۲^k}(S_n)\Delta f^{۲^k}(S_n)}^{=\emptyset}\big)\\&=S_n\Delta f^{۲^{k+۱}}(S_n)\end{aligned}$$

که تساوی مطلوب را به دست می‌دهد. در نتیجه برای هر $k\geq ۰$: $S_{۲^k}=S_۰\Delta f^{۲^k}(S_۰)$. طبق تعریف f: $f^{۲^k}(S_۰)=\{۲^k+a|a\in S_۰\}$ و بنابراین به دلیل متناهی بودن $S_۰$، اگر k به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد: $S_۰\cap f^{۲^k}(S_۰)=\emptyset$ و لذا در بالا تفاضل متقارن به اجتماع تبدیل می‌گردد:

$$S_{۲^k}=S_۰\cup f^{۲^k}(S_۰)=S_۰\cup\{۲^k+a|a\in S_۰\}$$

برای kهای به اندازه‌ی کافی بزرگ. این حکم خواسته شده را ثابت می‌کند.

پاسخ ۱۴. ایده‌ی حل مسأله آن است که به دنبال رابطه‌ای بازگشتی باشیم که $x_{n+۲}$ را به صورت ترکیب خطی x_n و $x_{n+۱}$ با ضرایب ثابت بیان کند. بررسی چندجمله‌ی ابتدایی، نامزدی برای چنین رابطه‌ی بازگشتی‌ای ارائه می‌دهد: $x_۲=۲۶$ و $x_۳=۱۳۶$ را می‌توان به صورت به ترتیب $۶x_۱-۴x_۰=۶\times۵-۴\times۱$ و $۶x_۲-۴x_۱=۶\times۲۶-۴\times۵$ نوشت. بررسی جمله‌ی $x_۴=۷۱۲$ هم احتمال برقراری چنین نظمی را تقویت می‌کند: $۷۱۲=۶\times۱۳۶-۴\times۲۶=۶x_۳-۴x_۲$. پس حدس می‌زنیم که $\forall n\geq ۰: x_{n+۲}=۶x_{n+۱}-۴x_n$. اگر این برقرار باشد، x_n باید به ازای ضرایب مناسب α,β با $x_n=\alpha(۳+\sqrt{۵})^n+\beta(۳-\sqrt{۵})^n$ داده شود (توجه کنید که $۳\pm\sqrt{۵}$ ریشه‌های معادله‌ی $\lambda^۲-۶\lambda+۴=۰$ هستند.) و با توجه به $x_۰=۱$ و $x_۱=۵$، با حل یک دستگاه دو معادله و دو مجهول به سادگی می‌توان دید که $\alpha=\frac{۵+۲\sqrt{۵}}{۱۰}$ و $\beta=\frac{۵-۲\sqrt{۵}}{۱۰}$. پس می‌توانیم حدس خود درباره‌ی این دنباله را این‌گونه بنویسیم:

$$\forall n\geq ۰: x_n=\frac{۵+۲\sqrt{۵}}{۱۰}(۳+\sqrt{۵})^n+\frac{۵-۲\sqrt{۵}}{۱۰}(۳-\sqrt{۵})^n$$

که در ادامه آن را با استقرا بر $n\geq ۰$ ثابت می‌کنیم و این مسئله را حل خواهد کرد:

$$x_{۲۰۰۷}=\frac{۵+۲\sqrt{۵}}{۱۰}(۳+\sqrt{۵})^{۲۰۰۷}+\frac{۵-۲\sqrt{۵}}{۱۰}(۳-\sqrt{۵})^{۲۰۰۷}$$

با توجه به روش انتخاب α و β در بالا، فرمول مذکور برای $x_۰$ و $x_۱$ برقرار است و تنها کافی است با فرض صحت آن برای x_n نشان داد که $x_{n+۱}$ هم با این فرمول داده می‌شود. با توجه به رابطه‌ی بازگشتی

داده شده در صورت مسأله داریم:

$$\begin{aligned}
x_{n+۱} &= ۳x_n + \lfloor\sqrt{۵}x_n\rfloor = \lfloor(۳+\sqrt{۵})x_n\rfloor \\
&= \lfloor(۳+\sqrt{۵})\Big(\frac{۵+۲\sqrt{۵}}{۱۰}(۳+\sqrt{۵})^n + \frac{۵-۲\sqrt{۵}}{۱۰}(۳-\sqrt{۵})^n\Big)\rfloor \\
&= \lfloor\frac{۵+۲\sqrt{۵}}{۱۰}(۳+\sqrt{۵})^{n+۱} + \frac{۵-۲\sqrt{۵}}{۱۰}(۳+\sqrt{۵})(۳-\sqrt{۵})^n\rfloor \\
&= \lfloor\overbrace{\frac{۵+۲\sqrt{۵}}{۱۰}(۳+\sqrt{۵})^{n+۱} + \frac{۵-۲\sqrt{۵}}{۱۰}(۳-\sqrt{۵})^{n+۱}}^{\in\mathbb{Z}} \\
&\quad + \frac{۵-۲\sqrt{۵}}{۱۰}(۲\sqrt{۵})(۳-\sqrt{۵})^n\rfloor \\
&= \frac{۵+۲\sqrt{۵}}{۱۰}(۳+\sqrt{۵})^{n+۱} + \frac{۵-۲\sqrt{۵}}{۱۰}(۳-\sqrt{۵})^{n+۱} \\
&\quad + \lfloor\overbrace{(\sqrt{۵}-۲)(۳-\sqrt{۵})^n}^{\in(۰,۱)}\rfloor \\
&= \frac{۵+۲\sqrt{۵}}{۱۰}(۳+\sqrt{۵})^{n+۱} + \frac{۵-۲\sqrt{۵}}{۱۰}(۳-\sqrt{۵})^{n+۱}
\end{aligned}$$

که حکم استقرا را ثابت می‌کند.

پاسخ ۱۵. نشان می‌دهیم چنین تابعی وجود دارد. $\mathcal{P}(N)$ را مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های $\mathbb{N}$ می‌گیریم و تعریف می‌کنیم:

$$S := \{A\in\mathcal{P}(N) | \forall k\in\mathbb{N} : |A\cap\{۲k-۱,۲k\}| = ۱\}$$

تابع $\phi : S\to\mathcal{P}(\mathbb{N})$ را با ضابطه‌ی $\phi(A) = \{k\in\mathbb{N} | ۲k-۱\in A\}$ در نظر بگیرید. این تابع یک‌به‌یک و پوشاست. زیرا به سادگی می‌توان تحقیق کرد که

$$\begin{cases}\phi' : \mathcal{P}(\mathbb{N})\to S \\ \phi'(X) = \{۲k-۱ | k\in X\}\cup\{۲k | k\in\mathbb{N}-X\}\end{cases}$$

وارون آن است. بنابراین $\phi : S\to\mathcal{P}(\mathbb{N})$ یک‌به‌یک و پوشاست، امری که ثابت می‌کند کاردینال S با $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ و لذا مجموعه‌ی اعداد حقیقی یکی است (چرا که می‌دانیم کاردینال مجموعه‌ی تمامی زیرمجموعه‌های $\mathbb{N}$ یا همان $\mathcal{P}(\mathbb{N})$، با کاردینال $\mathbb{R}$ یکی است.) و بنابراین یک تابع یک‌به‌یک و پوشای $\psi : \mathbb{R}\to S$ موجود است. برای هر $x\in\mathbb{R}$، زیرمجموعه‌ی $\psi(x)$ از $\mathbb{N}$ را به A_x نمایش می‌دهیم. پس با توجه به یک‌به‌یک بودن ψ، $\{A_x\}_{x\in\mathbb{R}}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های $\mathbb{N}$ است که برای هر $x\in\mathbb{R}$، $A_x\in S$ و به علاوه $A_x\neq A_y$ هرگاه $x\neq y$ دو عدد حقیقی باشند. پس اگر $x\neq y$، باید $A_x\not\subseteq A_y$. چرا که در غیر این صورت اگر $A_x\subset A_y$، برای هر $k\in\mathbb{N}$ باید $A_x\cap\{۲k-۱,۲k\}\subset A_y\cap\{۲k-۱,۲k\}$. ولی $A_x, A_y\in S$ و بنابراین از تعریف S، در شمول اخیر دو مجموعه‌ی ظاهر شده تک عضوی‌اند و در نتیجه باید مساوی باشند. پس اگر $A_x\subset A_y$، آن‌گاه $A_x\cap\{۲k-۱,۲k\} = A_y\cap\{۲k-۱,۲k\}$ برای هر $k\in\mathbb{N}$ و لذا دو مجموعه‌ی A_x و A_y از اعداد طبیعی برابرند در حالی که گفتیم این با توجه به $x\neq y$ نمی‌تواند رخ دهد. پس در خانواده‌ی $\{A_x\}_{x\in\mathbb{R}}$ از زیرمجموعه‌های اعداد طبیعی، هیچ عضوی شامل دیگری نیست و در نتیجه $A_x - A_y\neq\emptyset$ برای هر دو عدد حقیقی متمایز x و y. پس اصل انتخاب وجود یک تابع $g : \{(x,y)\in\mathbb{R}^۲ | x\neq y\}\to\mathbb{N}$ را نتیجه می‌دهد، با این ویژگی که $g(x,y)\in A_x - A_y$. حال تابع مطلوب $f : \mathbb{R}^۲\to\mathbb{N}$ را به کمک g این‌گونه می‌سازیم:

$$\begin{cases} f : \mathbb{R}^۲\to\mathbb{N} \\ f(x,y) = \begin{cases} g(x,y)+۱ & \text{اگر } x\neq y \\ ۱ & \text{در غیر این صورت}\end{cases}\end{cases}$$

در نهایت برقراری ویژگی موردنظر را برای این تابع تحقیق می‌کنیم: از تعریف فوق و با توجه به اینکه مقادیر g مثبت بودند، $f(x,y)\geq ۱$ با تساوی دقیقا در حالتی که $x=y$. پس در اثبات

$$f(x,y)=f(y,z)\Rightarrow x=y=z$$

می‌توان فرض کرد که $y\neq x$ و $z\neq y$. ولی در چنین حالتی، $f(x,y)=f(y,z)$ یعنی $g(x,y)=g(y,z)$ که امکان‌پذیر نیست. چرا که از خواص g، $g(x,y)$ و $g(y,z)$ به زیرمجموعه‌های به ترتیب $A_x - A_y$ و $A_y - A_z$ از $\mathbb{N}$ تعلق دارند که زیرمجموعه‌هایی مجزایند. پس $f(x,y)=f(y,z)$ تنها می‌تواند در حالتی رخ دهد که $x=y$ و $y=z$.

پاسخ ۱۶. قرار دهید $\omega = e^{\frac{۲\pi i}{۳}}$. حال داریم:

$$\begin{cases}
(\omega A+B)(\omega^۲A+B) = \overbrace{\underbrace{\omega^۳}_{=۱}A^۲+B^۲}^{=AB}+\omega AB+\omega^۲BA \\
= \overbrace{(۱+\omega)}^{=-\omega^۲}AB+\omega^۲BA = \omega^۲(BA-AB) \\
(\omega^۲A+B)(\omega A+B) = \overbrace{\underbrace{\omega^۳}_{=۱}A^۲+B^۲}^{=AB}+\omega^۲AB+\omega BA \\
= \overbrace{(۱+\omega^۲)}^{=-\omega}AB+\omega BA = \omega(BA-AB)
\end{cases}$$

بنابراین باید دترمینان سمت راست این دو تساوی یکسان باشد که نتیجه می‌دهد:

$$\det(\omega^۲(BA-AB)) = \det(\omega(BA-AB))$$

$$\Rightarrow \omega^{۲n}\det(BA-AB) = \omega^n\det(BA-AB)$$

$$\xrightarrow{\text{وارون‌پذیر } AB-BA} \omega^{۲n} = \omega^n$$

که با توجه به $\omega = e^{\frac{۲\pi i}{۳}}$ تنها وقتی می‌تواند رخ دهد که $۳|n$.

پاسخ ۱۷. **قسمت الف)** $A\in M_n(\mathbb{C})$ را دلخواه بگیرید. بدیهی است که با مزدوج کردن A بعد زیرفضای $C(A)$ تغییر نمی‌کند، زیرا

$C(PAP^{-۱}) = \{PBP^{-۱} | B \in C(A)\}$ و بنابراین بدون کاسته شدن از کلیت می‌توان فرض کرد که A در فرم ژردان خود است:

$$A = \begin{bmatrix} J_۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & J_۲ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & J_k \end{bmatrix}_{n\times n}$$

که در آن برای هر $۱ \le i \le k$، J_i یک بلوک ژردان $m_i \times m_i$ متناظر مقدار ویژه‌ی λ_i از A است:

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ \\ ۱ & \lambda_i & ۰ \cdots & & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & \lambda_i & \cdots & ۰ & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۱ & \lambda_i \end{bmatrix}_{m_i\times m_i}$$

و طبعا باید $m_۱ + \cdots + m_k = n$. توجه کنید که اگر برای هر $۱ \le i \le k$، $B_i \in M_{m_i}(\mathbb{C})$ با J_i جابه‌جا شود، آن‌گاه ماتریس

$$\begin{bmatrix} B_۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & B_۲ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & B_k \end{bmatrix}_{n\times n}$$

به $C(A)$ تعلق خواهد داشت و لذا می‌توان $\oplus_{i=۱}^{k} C(J_i)$ را -که در آن $C(J_i)$ در $M_{m_i}(\mathbb{C})$ در نظر گرفته شده و زیرفضای ماتریس‌های $m_i \times m_i$ای است که با J_i جابه‌جا می‌شوند- به عنوان زیرفضایی از $C(A)$ در نظر گرفت. پس $\dim_{\mathbb{C}} C(A) \ge \sum_{i=۱}^{k} \dim_{\mathbb{C}} C(J_i)$. ولی زیرفضای $C(J_i)$ از $M_{m_i}(\mathbb{C})$ حداقل m_i-بعدی است. چرا که J_i با ماتریس‌های $I_{m_i}, J_i, \dots, (J_i)^{m_i-۱}$ جابه‌جا می‌شود که عناصری مستقل خطی از $M_{m_i}(\mathbb{C})$ هستند. چرا که در صورت وابستگی خطی آن‌ها، باید J_i در یک چندجمله‌ای ناصفر از درجه‌ی کمتر از m_i صدق کند در حالی که J_i بلوک ژردان $m_i \times m_i$ متناظر $\lambda_i \in \mathbb{C}$ است و لذا چندجمله‌ای مینیمال آن برابر است با $(x-\lambda_i)^{m_i} \in \mathbb{C}[x]$. پس $\forall ۱ \le i \le k : \dim_{\mathbb{C}} C(J_i) \ge m_i$ و اکنون نامساوی‌ای که در بالا ذکر شد نتیجه می‌دهد که $\dim_{\mathbb{C}} C(A) \ge \sum_{i=۱}^{k} m_i = n$. پس نشان دادیم که برای یک $A \in M_n(\mathbb{C})$ دلخواه: $\dim_{\mathbb{C}} C(A) \ge n$ و تنها مطلبی که در حل قسمت (الف) باقی می‌ماند، ارائه‌ی $A \in M_n(\mathbb{C})$ای است که برای آن بعد $C(A)$ دقیقا n باشد. بدین منظور توجه کنید که اگر

$$D := \begin{bmatrix} \alpha_۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & \alpha_۲ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & \alpha_k \end{bmatrix}_{n\times n}$$

ماتریسی قطری با درایه‌های دوبه‌دو متمایز در امتداد قطر باشد، آن‌گاه زیرفضای عناصری از $M_n(\mathbb{C})$ که با آن جابه‌جا می‌شوند، زیرفضای ماتریس‌های قطری خواهد بود. چرا که برای یک ماتریس $n \times n$ دلخواه مانند $B = [b_{ij}]_{۱\le i,j\le n}$، به سادگی می‌توان دید که:

$$\begin{aligned} DB - BD &= \begin{bmatrix} \alpha_۱ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} [b_{ij}]_{۱\le i,j\le n} \\ &\quad - [b_{ij}]_{۱\le i,j\le n} \begin{bmatrix} \alpha_۱ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} \\ &= [(\alpha_i - \alpha_j) b_{ij}]_{۱\le i,j\le n} \end{aligned}$$

و لذا به دلیل دوبه‌دو متمایز بودن $\alpha_۱, \dots, \alpha_n$،

$$DB = BD \iff [(\alpha_i - \alpha_j) b_{ij}]_{۱\le i,j\le n} = ۰$$

منوط است به آن‌که $b_{ij} = ۰$ هرگاه $i \ne j$ یا معادلا B قطری باشد. پس $C(D)$ زیرفضای متشکل از ماتریس‌های قطری در $M_n(\mathbb{C})$ و لذا n بعدی است.

قسمت ب) دوباره مشابه قسمت قبل، A را در فرم ژردان می‌گیریم:

$$A = \begin{bmatrix} J_۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & J_۲ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & J_k \end{bmatrix}_{n\times n}$$

و با همان نمادگذاری‌های قبلی کار می‌کنیم: J_i بلوک ژردان $m_i \times m_i$ با مقدار ویژه‌ی λ_i از A در امتداد قطر است و $\sum_{i=۱}^{k} m_i = n$. در حل قسمت (الف) گفتیم که می‌توان جمع مستقیم زیرفضاهای

$$۱ \le i \le k, C(J_i) = \{B \in M_{m_i}(\mathbb{C}) | J_i B = B J_i\}$$

را -که دیدیم فضایی n بعدی است- از طریق نگاشت

$$\begin{cases} \oplus_{i=۱}^{k} C(J_i) \to C(A) \\ (B_i)_{۱\le i\le k} \mapsto \begin{bmatrix} B_۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & B_۲ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & B_k \end{bmatrix} \end{cases}$$

در $C(A)$ نشاند. بنابراین در این حالت که $C(A)$، n-بعدی است، این نگاشت باید یکریختی باشد. امری که به ویژه ثابت می‌کند هر ماتریسی که با

$$A = \begin{bmatrix} J_۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & J_۲ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & J_k \end{bmatrix}$$

جابه‌جا شود، باید در چنین نمایش بلوکی‌ای قطری باشد: بلوک‌های به ترتیب $m_۱ \times m_۱$ و ... و $m_k \times m_k$ در امتداد قطر و سایر درایه‌ها صفر. ولی اگر دو تا از $\lambda_۱, \dots, \lambda_k$ مساوی باشند، $C(A)$ عضوی

خواهد داشت که این نمایش بلوکی‌ای از آن درایه‌های ناصفری خارج بلوک‌های در امتداد قطر هم دارد: فرض کنید که مثلا $\lambda_2 = \lambda_1$ یعنی ماتریس‌های مقدماتی ژردان J_1 و J_2 متناظر یک مقدار ویژه باشند و J_2 بزرگ‌تر باشد، یعنی $m_1 \le m_2$ (فرضی که از کلیت نمی‌کاهد زیرا با مزدوج کردن در صورت لزوم، می‌توان بلوک‌های ژردان را در امتداد قطر جابگشت داد). آن‌گاه عنصر زیر از $M_n(\mathbb{C})$ (که مشابه

$$A = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_k \end{bmatrix}$$

بلوک‌بندی شده) به $C(A)$ تعلق دارد:

$$X := \begin{bmatrix} 0 & Y & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$ که در آن $\rightsquigarrow Y = [I_{m_1}|0]_{m_1\times m_2}$

در واقع برای دیدن این‌که X با A جابه‌جا می‌گردد، تنها کافی است به زیرماتریس $(m_1+m_2)\times(m_1+m_2)$ واقع در گوشه‌ی بالا و چپ توجه کرد که در آن‌جا داریم:

$$\begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & Y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & J_1Y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & Y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & YJ_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

و این دو حاصل‌ضرب برابرند، زیرا $\lambda_2 = \lambda_1$ بود و اکنون اگر J را ماتریس مقدماتی ژردان

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}_{m_1\times m_1}$$

بگیریم که متناظر مقدار ویژه‌ی صفر است، به سادگی می‌توان تحقیق کرد:

$$\begin{cases} J_1Y = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda_1 \end{bmatrix}_{m_1\times m_1} [I_{m_1}|0]_{m_1\times m_2} \\ \quad = \lambda_1 Y + [J|0]_{m_1\times m_2} \\ YJ_2 = [I_{m_1}|0]_{m_1\times m_2} \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda_2 \end{bmatrix}_{m_2\times m_2} \\ \quad = \lambda_2 Y + [J|0]_{m_1\times m_2} \end{cases}$$

پس نشان دادیم که اگر برای ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} J_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & J_k \end{bmatrix}$$

-که در فرم ژردان خود در نظر گرفته شده- بلوک‌های ژردان ظاهر شده در امتداد قطر متناظر مقدار ویژه‌های دوبه‌دو متمایز نباشند، آن‌گاه $C(A)$ عضوی خارج از زیرفضای n-بعدی $\oplus_{i=1}^{k} C(J_i)$ از خود دربردارد و لذا بعدی بیشتر از n دارد که با روش انتخاب A در تناقض است. پس $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ دوبه‌دو متمایزند. حال توجه کنید که چندجمله‌ای ویژه و هم‌چنین مینیمال هر J_i -که بلوک ژردان $m_i \times m_i$ متناظر مقدار ویژه‌ی λ_i بود- برابر $(x-\lambda_i)^{m_i}$ است. حال با توجه به نمایش بلوکی فوق، چندجمله‌ای‌های ویژه و مینیمال A به ترتیب ضرب چندجمله‌ای‌های ویژه‌ی ماتریس‌های $J_1,\dots J_k$ و ک.م.م چندجمله‌ای‌های مینیمال ماتریس‌های $J_1,\dots J_k$ هستند. ولی در این‌جا ک.م.م چندجمله‌ای‌های $(x-\lambda_i)^{m_i}$، $1 \le i \le k$ به دلیل دوبه‌دو متمایز بودن $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ بر $\prod_{i=1}^{k}(x-\lambda_i)^{m_i}$ منطبق است و این بنابر بالا یکسان بودن چندجمله‌ای‌های ویژه و مینیمال A را به دست می‌دهد.

پاسخ ۱۸. نشان می‌دهیم که پاسخ 2^k است. ابتدا توجه کنید که اگر زیرفضای k-بعدی V از $\mathbb{R}^n$ برابر اشتراک ابرصفحه‌های $x_i = 0$ در $\mathbb{R}^n$ برای $k < i \le n$ در نظر گرفته شود، آن‌گاه

$$V \cap Z =$$
$$\{(x_1,\dots,x_n) | \forall 1 \le i \le k : x_i \in \{0,1\}, \forall k < i \le n : x_i = 0\}$$

که 2^k عضو دارد. پس برای اثبات ادعای خود تنها کافی است نشان دهیم که $|V\cap Z| \le 2^k$ برای یک زیرفضای k-بعدی از $\mathbb{R}^n$. با جمع زدن بردارهای n-تایی به پیمانه‌ی دو، Z یک فضای برداری n-بعدی بر میدان دو عضوی $\mathbb{Z}_2$ می‌شود. اگر $|V\cap Z| > 2^k$، آن‌گاه زیرفضایی از فضای برداری n-بعدی Z بر میدان $\mathbb{Z}_2$ که زیرمجموعه‌ی $V\cap Z$ از Z تولید می‌کند، بیش از 2^k عضو خواهد داشت و بنابراین باید بعد آن بر $\mathbb{Z}_2$ بیش از k باشد، چرا که یک فضای برداری k-بعدی بر میدان $\mathbb{Z}_2$ دقیقا 2^k عضو دارد. بنابراین اگر $|V \cap Z| \le 2^k$ برقرار نشود، زیرمجموعه‌ی $V \cap Z$ از فضای برداری Z باید $k+1$ عنصر مستقل خطی بر $\mathbb{Z}_2$ را دربرداشته باشد که آن‌ها را به $v_1,\dots,v_{k+1}$ نمایش می‌دهیم که بردارهایی از زیرفضای V از $\mathbb{R}^n$ با مولفه‌های متعلق به $\{0,1\}$اند. حال نشان خواهیم داد که این عناصر از V بر $\mathbb{R}$ هم مستقل خطی‌اند: اگر اعداد حقیقی $a_1,\dots,a_{k+1}$ چنان باشند که در $\mathbb{R}^n$:

$$a_1v_1 + \cdots + a_{k+1}v_{k+1} = 0$$

و حداقل یکی از a_iها غیرصفر باشد، آن‌گاه چون درایه‌های بردارهای $v_1,\dots,v_{k+1} \in \mathbb{R}^n$ گویا هستند، می‌توان $a_1,\dots,a_{k+1}$ را (که حداقل یکی از آن‌ها ناصفر بود) از میان اعداد گویا انتخاب کرد (در واقع از این نکته‌ی ساده استفاده می‌کنیم که اگر E/F یک توسیع میدانی باشد، زیرمجموعه‌ای از عناصر فضای برداری E^n با مولفه‌های در F، اگر بر میدان E وابسته‌ی خطی باشند، بر میدان F هم وابسته‌ی خطی‌اند.) و لذا به تساوی $a_1v_1+\cdots+a_{k+1}v_{k+1}=0$ در $\mathbb{R}^n$ می‌رسیم که در آن a_iها گویا و حداقل یکی از آن‌ها ناصفر است. پس با ضرب طرفین تساوی در عدد صحیح مناسبی، بدون کاسته شدن از کلیت می‌توان a_iها را در بالا صحیح گرفت. چون همه‌ی اعداد صحیح $a_1,\dots,a_{k+1}$ صفر نیستند، با تقسیم آن‌ها بر توان مناسبی از ۲، می‌توان فرض کرد که حداقل یکی از آن‌ها فرد است. حال در $a_1v_1+\cdots+a_{k+1}v_{k+1}=0$ با در نظر گرفتن ضرایب به پیمانه‌ی دو، به تساوی

$$(a_1 \mod 2)v_1+\cdots+(a_{k+1} \mod 2)v_{k+1}=0$$

در فضای برداری $Z=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid x_i\in\{0,1\}\}$ می‌رسیم که در آن‌ها حداقل یکی از ضرایب $a_i \mod 2$ واقع در میدان $\mathbb{Z}_2$، ناصفر است، چرا که حداقل یکی از اعداد صحیح $a_1,\dots,a_{k+1}$ فرد بود. پس عناصر $v_1,\dots,v_{k+1}$ از فضای برداری Z بر میدان $\mathbb{Z}_2$، وابسته‌ی خطی‌اند که با روش انتخاب آن‌ها منافات دارد و این استقلال خطی بردارهای $v_1,\dots,v_{k+1}$ در فضای برداری $\mathbb{R}^n$ را نتیجه می‌دهد. ولی این بردارها همگی در زیرفضای k- بعدی V از $\mathbb{R}^n$ واقع بودند و بنابراین فرض $|V\cap Z|>2^k$ به تناقض می‌رسد.

پاسخ ۱۹. قسمت الف) *بنابر تعریف:*

$$\det A=\sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma)\prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)j}$$

که در آن S_n گروه جایگشت‌ها مجموعه‌ی $\{1,\dots,n\}$ و sgn نمایانگر علامت یک جایگشت است. چون در مجموع فوق تمامی $a_{\sigma(j)j}$ها نامنفی‌اند و $sgn(\sigma)\in\{0,1\}$:

$$|\det A|=|\sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma)\prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)j}|\leq \sum_{\sigma\in S_n}\prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)j}$$

$$\underbrace{\leq}_{\text{زیرا } a_{ij} \text{ نامنفی‌اند.}} \sum_{f:\{1,\dots,n\}\to\{1,\dots,n\}}\prod_{j=1}^{n} a_{f(j)j}=\prod_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n} a_{ij})$$

برای هر $1\leq j\leq n$، $c_j:=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$ را جمع درایه‌های ستون jام می‌گیریم. پس فرض مسأله را درباره‌ی مجموع تمامی درایه‌های A، می‌توان به صورت $\sum_{j=1}^{n} c_j=n$ نوشت و البته توجه کنید که به دلیل نامنفی بودن درایه‌های A، c_jها همگی نامنفی‌اند. بنابر روش تعریف c_jها، نامساوی حاصل در بالا نشان می‌دهد $|\det A|\leq\prod_{j=1}^{n} c_j$ و حال از نامساوی میانگین حسابی- هندسی:

$$|\det A|\leq\prod_{j=1}^{n} c_j\leq\big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} c_j\big)^n=1$$

قسمت ب) اگر $|\det A|=1$، باید در نامساوی میانگین حسابی- هندسی‌ای که در بالا به کار رفت تساوی برقرار شود: $\prod_{j=1}^{n} c_j=\big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} c_j\big)^n$ که می‌دانیم تنها وقتی رخ می‌دهد که c_jها برابر باشند. ولی $\sum_{j=1}^{n} c_j$ برابر n بود و لذا $c_1=\cdots=c_n=1$، یعنی جمع درایه‌های هر ستون از A یک است. حال $\lambda\in\mathbb{C}$ را یک مقدار ویژه‌ی دلخواه از A بگیرید. پس بردار $X=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{C}^n-\{0\}$ موجود است که $AX=\lambda X$. این با در نظر گرفتن درایه‌ی iام طرفین، نشان می‌دهد که $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=\lambda x_i$. با اعمال نامساوی مثلث و استفاده از نامنفی بودن a_{ij}ها:

$$|\lambda||x_i|=|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j|\leq\sum_{j=1}^{n} a_{ij}|x_j|$$

پس نشان دادیم که:

$$\forall 1\leq i\leq n: |\lambda||x_i|\leq\sum_{j=1}^{n} a_{ij}|x_j|$$

با جمع زدن تمامی این نامساوی‌ها:

$$|\lambda|(\sum_{i=1}^{n}|x_i|)=\sum_{i=1}^{n}|\lambda||x_i|\leq\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}|x_j|)$$

$$=\sum_{j=1}^{n}(\overbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}}^{\text{جمع درایه‌های ستون } j\text{ام}=1})|x_j|=\sum_{j=1}^{n}|x_j|$$

در بالا می‌توان $\sum_{i=1}^{n}|x_i|>0$ را از طرفین نامساوی حذف کرد. چرا که $X=(x_1,\dots,x_n)$ عضوی ناصفر از $\mathbb{C}^n$ بود و با حذف آن، به $|\lambda|\leq 1$ می‌رسیم. پس اگر $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ را تمامی مقادیر ویژه‌ی ماتریس A (که $n\times n$ بود) بگیریم که در آن هر مقدار ویژه به تعداد تکررش نوشته شده، آن‌گاه از آن‌چه در بالا ثابت گردید، نرم هیچ‌یک از $\lambda_1,\dots,\lambda_n$، از یک تجاوز نمی‌کند. از طرف دیگر، $\det A=\lambda_1\dots\lambda_n$ نرمی برابر یک دارد و لذا باید در همه‌ی نامساوی‌های $\forall 1\leq i\leq n: |\lambda_i|\leq 1$ تساوی برقرار گردد که نشان می‌دهد نرم هر مقدار ویژه از A برابر یک است.

پاسخ ۲۰. قسمت الف) ابتدا توجه کنید که $f(I_n)=1$ و $f(O_{n\times n})=0$ (در این راه‌حل، منظور از I_n ماتریس همانی $n\times n$ و منظور از $O_{k\times l}$ ماتریس $k\times l$ با درایه‌های صفر است). چرا که با به کار بردن ویژگی مفروض برای f:

$$f(I_n)=f(I_nI_n)=(f(I_n))^2\Rightarrow f(I_n)\in\{0,1\}$$

$$f(O_{n\times n}) = f(O_{n\times n}O_{n\times n}) = (f(O_{n\times n}))^2$$

$$\Rightarrow f(O_{n\times n}) \in \{0,1\}$$

اگر $f(I_n)=0$، آن‌گاه برای هر $A\in M_n(\mathbb{R})$:

$$f(A)=f(AI_n)=f(A)f(I_n)=0$$

و لذا $f\equiv 0$ و اگر هم $f(O_{n\times n})=1$، آن‌گاه برای هر $A\in M_n(\mathbb{R})$:

$$1=f(O_{n\times n})=f(AO_{n\times n})=f(A)f(O_{n\times n})=f(A)$$

و لذا $f\equiv 1$ که هیچ‌یک از این دو حالت بنابر فرض مسأله رخ نمی‌دهد و بنابراین $f(I_n)=1$ و $f(O_{n\times n})=0$ نتیجه می‌شوند. به کمک این، یک سمت حکم به سادگی حاصل می‌گردد: اگر ماتریس A متعلق به $M_n(\mathbb{R})$ وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه $1=f(I_n)=f(AA^{-1})=f(A)f(A^{-1})$ و بنابراین $f(A)$ نمی‌تواند صفر باشد. حال برای تکمیل کار، باید عکس این را هم ثابت کنیم: اگر $f(A)\neq 0$ آن‌گاه A وارون‌پذیر است. بدین منظور از برهان خلف استفاده می‌کنیم: فرض کنید $A\in M_n(\mathbb{R})$ با $\det A=0$ چنان باشد که $f(A)\neq 0$. می‌توان چنین Aای را به قسمی برگزید که $k:=rank(A)<n$ حداقل مقدار ممکن باشد. به دلیل آن‌که ثابت کردیم $f(O_{n\times n})=0$، A ماتریس صفر نیست و لذا k یک عدد طبیعی است. قضیه‌ای استاندارد در جبرخطی حکم می‌کند که ماتریس‌های وارون‌پذیر $P,Q\in GL_n(\mathbb{R})$ موجودند که

$$PAQ=\begin{bmatrix} I_k & O_{k\times(n-k)}\\ O_{(n-k)\times k} & O_{(n-k)\times(n-k)}\end{bmatrix}$$

با f گرفتن از طرفین و استفاده از ضربی بودن f:

$$f(P)f(A)f(Q)=f\Big(\begin{bmatrix} I_k & O_{k\times(n-k)}\\ O_{(n-k)\times k} & O_{(n-k)\times(n-k)}\end{bmatrix}\Big)$$

که در این تساوی، اعداد $f(P)$ و $f(Q)$ به دلیل وارون‌پذیر بودن P و Q، بنابر طرف دیگر حکم که ثابت شد، ناصفرند. پس

$$f\Big(\begin{bmatrix} I_k & O_{k\times(n-k)}\\ O_{(n-k)\times k} & O_{(n-k)\times(n-k)}\end{bmatrix}\Big)\neq 0$$

این نشان می‌دهد که مقدار f بر هر ماتریس رتبه‌ی k ناصفر است. چرا که به کار بردن مجدد همان قضیه ثابت می‌کند که هر عنصر رتبه‌ی k از $M_n(\mathbb{R})$ مانند B را می‌توان به ازای $P',Q'\in GL_n(\mathbb{R})$ مناسبی به صورت

$$P'\begin{bmatrix} I_k & O_{k\times(n-k)}\\ O_{(n-k)\times k} & O_{(n-k)\times(n-k)}\end{bmatrix}Q'$$

نوشت و حال با تکرار همان استدلال فوق، $f(B)$ برابر ضرب

$$f\Big(\begin{bmatrix} I_k & O_{k\times(n-k)}\\ O_{(n-k)\times k} & O_{(n-k)\times(n-k)}\end{bmatrix}\Big)\neq 0$$

خواهد بود در $f(P'),f(Q')$ که به دلیل وارون‌پذیر بودن P' و Q' ناصفرند. این علی‌الخصوص نتیجه می‌دهد که

$$f\Big(\begin{bmatrix} O_{(n-k)\times(n-k)} & O_{k\times(n-k)}\\ O_{k\times(n-k)} & I_k\end{bmatrix}\Big)\neq 0$$

ولی توجه کنید که ضرب دو ماتریس

$$\begin{bmatrix} I_k & O_{k\times(n-k)}\\ O_{(n-k)\times k} & O_{(n-k)\times(n-k)}\end{bmatrix}$$

و

$$\begin{bmatrix} O_{(n-k)\times(n-k)} & O_{k\times(n-k)}\\ O_{k\times(n-k)} & I_k\end{bmatrix}$$

(که $n\times n$ و از رتبه‌ی kاند)، رتبه‌ای کمتر از k خواهد داشت. زیرا اگر $k>\frac{n}{2}$:

$$\begin{bmatrix} I_k & O_{k\times(n-k)}\\ O_{(n-k)\times k} & O_{(n-k)\times(n-k)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} O_{(n-k)\times(n-k)} & O_{(n-k)\times k}\\ O_{k\times(n-k)} & I_k\end{bmatrix}$$

$$=\left[\begin{array}{c|c|c} O_{n\times(n-k)} & \begin{matrix} O_{(n-k)\times(2k-n)}\\ I_{2k-n}\\ O_{(n-k)\times(2k-n)}\end{matrix} & O_{n\times(n-k)}\end{array}\right]$$

و در حالت $k\leq\frac{n}{2}$ این حاصل‌ضرب صفر خواهد بود. پس رتبه‌ی حاصل‌ضرب

$$\begin{bmatrix} I_k & O_{k\times(n-k)}\\ O_{(n-k)\times k} & O_{(n-k)\times(n-k)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} O_{(n-k)\times(n-k)} & O_{(n-k)\times k}\\ O_{k\times(n-k)} & I_k\end{bmatrix}$$

یا صفر است یا $2k-n$، و لذا با توجه به $0<k<n$ از k کمتر است. پس از روش انتخاب k، باید مقدار f بر حاصل‌ضرب فوق صفر باشد که چون

$$f\Big(\begin{bmatrix} I_k & O_{k\times(n-k)}\\ O_{(n-k)\times k} & O_{(n-k)\times(n-k)}\end{bmatrix}\Big)\neq 0$$

و

$$f\Big(\begin{bmatrix} O_{(n-k)\times(n-k)} & O_{(n-k)\times k}\\ O_{k\times(n-k)} & I_k\end{bmatrix}\Big)\neq 0$$

به دلیل ضربی بودن f رخ نخواهد داد. تناقض حاصله نشان می‌دهد که اگر $f(A)\neq 0$، آن‌گاه A وارون‌پذیر است.

قسمت ب) $f:M_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ را با خواص قسمت (الف) و هم‌چنین مشتق‌پذیر در نقطه‌ی $I_n\in M_n(\mathbb{R})$ بگیرید. هر دو ضابطه‌ای که برای f که در صورت مساله بیان شده‌اند، بر باز $GL_n^+(\mathbb{R})=\{A\mid \det A>0\}$ از $M_n(\mathbb{R})$ متشکل از ماتریس‌های با دترمینان مثبت، به صورت $A\mapsto|\det A|^\lambda$ به ازای یک $\lambda\neq 0$ داده می‌شوند. پس ابتدا نشان می‌دهیم که اگر تحدید f به باز $GL_n^+(\mathbb{R})$ از $M_n(\mathbb{R})$ (که مولفه‌ی همبندی $GL_n(\mathbb{R})$ حول I_n است.) به صورت $A\mapsto|\det A|^\lambda$ باشد، آن‌گاه $f:M_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ یکی از دو مورد بیان شده در قسمت (ب) خواهد بود. از قسمت (الف)،

f بر ماتریس‌های وارون‌ناپذیر صفر است و بنابراین مقدار آن را بر ماتریس‌های با دترمینان منفی بررسی می‌کنیم. ماتریس قطری

$$R := \begin{bmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

با دترمینان منفی یک را در نظر بگیرید. فرض کنید A ماتریسی $n\times n$ با $\det A < 0$ باشد. پس $RA \in GL_n^+(\mathbb{R})$ و با توجه به این که ضابطه‌ی f بر $GL_n^+(\mathbb{R})$ را می‌دانیم:

$$f(R)f(A) = f(RA) = |\det(RA)|^\lambda = |\det A|^\lambda$$

$$\Rightarrow f(A) = \frac{|\det(A)|^\lambda}{f(R)}$$

ولی $R^2 = I_n$ و بنابراین چون در قسمت (الف) نشان دادیم که $f(I_n) = 1$:

$$(f(R))^2 = f(R^2) = f(I_n) = 1 \Rightarrow f(R) \in \{\pm 1\}$$

پس از بالا، $f(A) = |\det(A)|^\lambda$ یا $f(A) = -|\det(A)|^\lambda$ برای هر ماتریس A با دترمینان منفی، بسته به این که به ترتیب $f(R) = 1$ یا $f(R) = -1$ که ضابطه‌ی $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ را (که بر ماتریس‌های با دترمینان صفر، صفر می‌شد.) به صورت به ترتیب $f(A) = |\det A|^\lambda$ یا

$$f(A) = \begin{cases} |\det A|^\lambda & \det A > 0 \\ 0 & \det A = 0 \\ -|\det A|^\lambda & \det A < 0 \end{cases}$$
$$= sgn(\det A).|\det A|^\lambda$$

به دست می‌دهد. پس توجه خود را به تحدید f به باز $GL_n^+(\mathbb{R})$ از فضای برداری $M_n(\mathbb{R})$ معطوف می‌کنیم که بنابر (الف) با مقادیر در $\mathbb{R} - \{0\}$ خواهد بود و مساله تقلیل می‌یابد به اثبات این امر که هر همریختی گروهی $f : GL_n^+(\mathbb{R}) \to (\mathbb{R} - \{0\}, \times)$ که در I_n مشتق‌پذیر باشد، به ازای یک عدد حقیقی λ، با ضابطه‌ی $A \mapsto |\det A|^\lambda = (\det A)^\lambda$ داده می‌شود که البته در حالت موردنظر ما، چون بنابر فرض $f \not\equiv 1$، λ ناصفر خواهد بود. پس یک همریختی $f : GL_n^+(\mathbb{R}) \to (\mathbb{R} - \{0\}, \times)$ را مشابه بالا در نظر بگیرید. مشتق آن در I_n یک نگاشت خطی $\mathrm{D}f(I_n) : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ است. ادعا می‌کنیم که $\mathrm{D}f(I_n)(AB) = \mathrm{D}f(I_n)(BA)$ برای هر $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. کافی است این را با فرض وارون‌پذیر بودن B ثابت کنیم. چرا که به ازای $\mu \in \mathbb{R}$ای $B - \mu I_n$ وارون‌پذیر است و به دلیل خطی بودن، $\mathrm{D}f(I_n)(A(B - \mu I_n)) = \mathrm{D}f(I_n)((B - \mu I_n)A)$ تساوی $\mathrm{D}f(I_n)(AB) = \mathrm{D}f(I_n)(BA)$ را نتیجه می‌دهد. $t \mapsto e^{tAB}$ و $t \mapsto e^{tBA}$ خم‌های همواری در باز $GL_n^+(\mathbb{R})$ از فضای برداری $M_n(\mathbb{R})$ هستند که در $t = 0$ از نقطه‌ی I_n با بردارهای مماس به ترتیب AB و BA می‌گذرند و لذا از قاعده‌ی زنجیره‌ای:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t \mapsto f(e^{tAB}))|_{t=0} = \mathrm{D}f(I_n)(AB)$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t \mapsto f(e^{tBA}))|_{t=0} = \mathrm{D}f(I_n)(BA)$$

این با توجه به

$$\begin{aligned} f(e^{tAB}) &= f(e^{B^{-1}(tBA)B}) \\ &= f(B^{-1}(e^{tBA})B) \\ &= f(B^{-1})f(e^{tBA})f(B) \\ &= f(e^{tBA})\overbrace{f(B^{-1}B)}^{=f(I_n)=1} \end{aligned}$$

تساوی $\mathrm{D}f(I_n)(AB) = \mathrm{D}f(I_n)(BA)$ برای هر $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ را نتیجه می‌دهد. بنابر حکم ساده‌ای از جبرخطی، چنین تابعکی بر $M_n(\mathbb{R})$ باید مضربی از تریس باشد: عدد حقیقی λ موجود است به قسمی که

$$(*)\forall A \in M_n(\mathbb{R}) : \mathrm{D}f(I_n)(A) = \lambda tr(A)$$

ولی به جز $f : GL_n^+(\mathbb{R}) \to (\mathbb{R} - \{0\}, \times)$، یک همریختی دیگر $GL_n^+(\mathbb{R}) \to (\mathbb{R} - \{0\}, \times)$ هم که در همانی مشتق‌پذیر باشد و تابعک خطی حاصل از مشتق آن در همانی با $A \mapsto \lambda tr(A)$ داده شود موجود است و آن $A \mapsto (\det A)^\lambda$ است. چرا که می‌دانیم مشتق تابع هموار $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ در I_n برابر است با تابعک $tr : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. پس نسبت این دو یعنی $A \mapsto \frac{f(A)}{(\det A)^\lambda}$، یک همریختی دیگر $g : GL_n^+(\mathbb{R}) \to (\mathbb{R} - \{0\}, \times)$ خواهد بود که در I_n مشتق‌پذیر و مشتق آن در این نقطه صفر است. زیرا با مشتق‌گیری از

$$\begin{cases} g : GL_n^+(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ A \mapsto f(A)(\det A)^{-\lambda} \end{cases}$$

در I_n:

$$\begin{aligned} \mathrm{D}g(I_n)(A) = {} & \overbrace{\mathrm{D}f(I_n)(A)}^{=\lambda tr(A)\ (*)\text{از}}(\det I_n)^{-\lambda} \\ & - \lambda \overbrace{f(I_n)}^{=1\ \text{از حل قسمت (الف)}} (\det I_n)^{-\lambda-1} \overbrace{\mathrm{D}(\det)(I_n)}^{=tr:M_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}}(A) \\ = {} & 0 \end{aligned}$$

پس به منظور اثبات $\forall A \in GL_n^+(\mathbb{R}) : f(A) = (\det A)^\lambda$ که حل را تکمیل خواهد کرد، کافی است نشان دهیم هر همریختی گروهی $g : GL_n^+(\mathbb{R}) \to (\mathbb{R} - \{0\}, \times)$ که در نقطه‌ی متناظر ماتریس همانی مشتق‌پذیر و با مشتق صفر باشد، نگاشت ثابت با مقدار یک خواهد بود. بدین منظور توجه کنید که مشتق‌پذیری g در

I_n و $\mathrm{D}g(I_n) = ۰$، نشان می‌دهد که $g : GL_n^+(\mathbb{R}) \to (\mathbb{R} - \{۰\}, \times)$ در سایر نقاط هم مشتق‌پذیر با مشتق صفر است، چرا که برای $A \in GL_n^+(\mathbb{R})$ دلخواه، g را به دلیل همریختی بودن می‌توان به شکل $X \mapsto g(A)g(A^{-۱}X)$ نوشت و آن‌گاه مشتق‌پذیری g در I_n مشتق‌پذیری $X \mapsto g(A^{-۱}X)$ در $X = A$ را نتیجه می‌دهد و لذا g با ضابطه‌ی $X \mapsto g(A)g(A^{-۱}X)$ در A مشتق‌پذیر و مشتق آن در A به کمک قاعده‌ی زنجیره‌ای برابر است با

$$\begin{cases} M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ X \mapsto g(A)\mathrm{D}g(I_n)(A^{-۱}X) \end{cases}$$

که به دلیل $\mathrm{D}g(I_n) \equiv ۰$ صفر است. پس g تابعی حقیقی مقدار بر باز همبند $GL_n^+(\mathbb{R})$ از فضای برداری $M_n(\mathbb{R})$ است که مشتق آن در هر نقطه صفر است و لذا متحد است با $g(I_n) = ۱$ ($g : GL_n^+(\mathbb{R}) \to$ $(\mathbb{R} - \{۰\}, \times)$ همریختی است و لذا ماتریس همانی را به یک می‌برد.) که همان چیزی است که در پی اثبات آن بودیم.[۲]

---

[۲] اگر بپذیریم که زیرگروه مشتق $GL_n(\mathbb{R})$ برابر است $SL_n(\mathbb{R})$، می‌توان راه‌حل کوتاه‌تری برای این مسأله ارائه کرد.

گپ ریاضی،سلسله جلساتی است که هرهفته با بررسی موضوعی درریاضیات دردانشکده‌ی علوم ریاضی برگزارمی‌شود.

اولین دوره‌ی برگزاری این جلسات برمی‌گردد به شروع کارانجمن علمی وفوق برنامه‌ی دانشکده‌ی علوم ریاضی وازآن زمان تاکنون باتلاش تعدادی ازدانشجویان دانشکده، جلسات به صورت مداوم ادامه داشته است. هدف ازبرگزاری گپ ریاضی،ایجاد فضایی دوستانه است که درآن دانشجویان به بحث درباره مطالب علمی می‌پردازند. مخاطب اصلی این جلسات دانشجویان دوره کارشناسی هستند لذا سعی می‌شود مطالب ازمباحث ساده ودرعین حال جذاب ریاضی انتخاب شود.همچنین گاهی نیزاین جلسات درقالب پخش فیلم ومستند یا گفتگو بین اساتید برگزارمی‌شود.

اگرشما نیزبه مطلبی جالب درریاضیات برخوردید آن راباما درمیان بگذارید تا درگپ هفته بعد با هم آن را بررسی کنیم.

"دور هم‌خوانی مطالبی در علوم کامپیوتر نظری"، ایده‌ای بود که توسط تعداد از دانشجویان با هدف پرداختن به نظریه‌ی علوم کامپیوتر، و بررسی مطالبی که تمایز بین علوم کامپیوتر و مهندسی کامپیوتر را مشخص‌تر می‌نماید، مطرح شد. در حال حاضر، حدود یک سال از کلاس‌هایی که با این هدف آغاز شد، می‌گذرد. در شروع این کار، به دلیل پیش‌نیازهای اولیه‌ی ریاضی، کتاب:

Basics of Algebra and Analysis for Computer Science/Jean Gallier

مورد مطالعه قرار گرفت. بعد از مطالعه‌ی این کتاب، با توجه به نظر جمعی، مبحث داده‌کاوی در این گروه مورد مطالعه قرار گرفت. اساس کار در این زمینه کتاب:

Mining of Massive DataSets/Anand Rajaraman & Jeffrey D. Ullman

بود. اما زمینه‌ی بعد ی که در این گروه مطرح شد، "نظریه‌ی الگوریتمی بازی‌ها" بود که تو کنون نیز ادامه داشته است. در این زمینه نیز یک کتاب مرجع انتخاب شده است که بر اساس آن گروه مطالعات خود را پی می‌گیرد. کتاب انتخاب شده:

Algorithmic Game Theory/Noam Nisan & Tim Roughgarden & Eva Tardos & Vijay V. Vazirani

است.
اما نحوه‌ی ارائه‌ی مطالب به این گونه است که پس از مشخص شدن مبحث، یک نفر از گروه داوطلبانه قبول می‌کند که مبحث را ارائه دهد. دیگر اعضای گروه نیز به مطالعه مبحث مورد نظر می‌پردازند و در جلسه‌ی ارائه که هدف آن بحث و تبادل نظر است، پس از ارائه برای درک بیشتر مبحث، سوالات افراد مطرح و به بحث گذاشته می‌شود.
گروه "دور هم‌خوانی مطالبی در علوم کامپیوتر نظری" از تمامی علاقمند دعوت به شرکت و همکاری می‌نماید. علاقمندان می‌توانند در گروه جی‌میل

"Theoretical Computer Science - Sharif University of Technology"

عضو شوند.

مجله‌ی ریاضی شریف از هر گونه همکاری در تمامی زمینه‌ها از جمله تهیه یا معرفی مطالب علمی و توصیفی وهمچنین همکاری در زمینه کارهای اجرایی مجله از جانب دانشجویان و اساتید استقبال به عمل می‌آورد. لازم به ذکر است که اکثر همکاران فعلی این مجله به‌صورت کاملا داوطلبانه با مجله همکاری می‌کنند و اساس کار این نشریه بر مبنای همکاری داوطلبانه‌ی اهالی دانشکده‌ی ریاضی قرار گرفته‌است.

تماس با ما:

mathematicsjournal@gmail.com
www.sharifmathjournal.ir

[illegible]