مجله‌ی ریاضی شریف

سال اول شماره‌ی دوم

مدیر مسوول : دکتر امیر جعفری ؛ سردبیر : ابوالفضل طاهری ؛ نویسندگان : اوژن غنی‌زاده‌ی خوب، حمید احمدیان، ابوالفضل طاهری، خشایار فیلم، علی کلامی، سینا رضازاده بقال، علیرضا صادقی‌پور، فرید بویا، کاوه حسینی ؛ طراحی : اوژن غنی زاده خوب ؛ طراحی سایت : محسن منصوریار ؛ ویراستار : شهاب ابراهیمی ؛ با تشکر از دکتر سیاوش شهشهانی، شهاب ابراهیمی، دکتر سعید ذاکری، دکتر علیرضا بحرینی

پیشگفتار

تقریبا یک ماه پیش از برگزاری «هفتادسالگی» (مراسم بزرگداشت دکتر شهشهانی) بود که دکتر تابش برای در میان گذاشتن این موضوع به سراغ دانشجویان دانشکده آمد. موضوع کلی مطرح شد و تا روز مراسم پنج جلسه با حضور چند دانشجو و استاد برای برنامه‌ریزی برگزار گردید. در واقع چیزی که حاضران در قالب «هفتاد سالگی» شاهد آن بودند، در این روند تحقق یافت. در این چندخط پیش رو می‌خواهم به دو موضوع در رابطه با این مراسم به صورت بسیار خلاصه بپردازم. نخست گزارشی درباره‌ی محتوا و چگونگی برگزاری «هفتادسالگی» و دوم جایگاه شهشهانی برای من به عنوان دبیر پیشین انجمن علمی و فوق برنامه دانشکده‌ی ریاضی.

همان طور که در آغاز گفتم، ایده‌ی اولیه‌ی مراسم را دکتر تابش برایمان مطرح کرد و برای ما که قرار بود مراسمی برگزار کنیم که با مناسبت‌های سال‌روز تولد هفتادسالگی دکتر شهشهانی، بازنشستگی او و همچنین تودیعش از پست ریاست دانشکده همراه است، جذابیت زیادی داشت. جلسات برنامه‌ریزی با حضور دانشجویان و اساتید به صورت هفتگی برگزار می‌شد و همه بر این مسأله توافق داشتیم که دکتر شهشهانی از این اتفاقات تا حداکثر زمان ممکن بی‌خبر باشد تا بتوانیم او را به اصطلاح surprise کرده‌باشیم و این بی‌خبری تا حدود ده روز مانده به مراسم برقرار بود.

بحث‌ها درباره‌ی محتوای «هفتادسالگی» با دشواری روبه‌رو می‌شد از آن‌جا که هم می‌خواستیم دستاوردهای دکتر شهشهانی را بازگو کرده‌باشیم و هم برنامه‌ای باشد که به عنوان یک جشن تولد در حوصله‌ی همه‌ی حاضران بگنجد و این دو مسأله زیر سایه‌ی سنگین شأن دکتر شهشهانی و دعوت از مهمانان گران‌قدر کار را سخت‌تر می‌کرد. خلاصه نتیجه‌ی بحث‌ها این شد که چند سخن‌رانی علمی و نیمه‌علمی مرتبط با فعالیت‌های دکتر شهشهانی و همچنین یک کلیپ و یک فیلم درباره‌ی زندگی او و «هفتادسالگی» آماده‌ی ارایه شود. مراسم تقدیر و خاطره‌گویی و کیک‌بری و چند سخن‌رانی پراکنده نیز تا پایان کار به برنامه اضافه گشت. عنوان سخن‌رانی‌های مراسم و ارایه‌دهندگان آن‌ها چنین بود:

- خم‌های جبری، دکتر افتخاری از IPM
- مکعب روبیک، دکتر علیشاهی از دانشگاه شریف

- نشر ریاضی، دکتر لاجوردی از IPM
- ریاضیات عمومی، دکتر اصغری از دانشگاه شهید بهشتی
- شهشهانی و IPM، دکتر پورمهدیان از IPM
- اینترنت در ایران، دکتر تابش از دانشگاه شریف

در بخش دوم از حرف‌هایم می‌خواهم چند خطی درباره‌ی جایگاه شهشهانی برای خودم بنگارم و می‌دانم این قسمت کمی شخصی خواهدبود.

از وقتی که من وارد دانشکده ریاضی شدم، دکتر شهشهانی ریاست آن را عهده‌دار بود و من تا قبل از این که رسماً عضو شورای مرکزی انجمن علمی و فوق برنامه شوم، بیشتر با جنبه‌ی علمی او آشنا بودم و او را به عنوان یکی از با معلومات‌ترین اساتید دانشکده می‌شناختم. اما پس انتخاب شدن به عنوان دبیر انجمن علمی و فوق برنامه برخوردها و ارتباط‌هایم با دکتر شهشهانی در سطح دیگری شکل گرفت و جنبه‌های جدیدی پیدا کرد. در واقع در این جا می‌خواهم بگویم مقدار زیادی از رغبت و شوقی که در بنده و برخی از دوستان برای برگزاری «هفتادسالگی» به وجود آمد، نشأت گرفته از جنبه‌های فراعلمی شخصیت او بود. به عبارت دیگر دکتر شهشهانی برای بسیاری از آشنایانشان چیزی بیش‌تر از معلومات یک استاد معمولی ریاضیات ارایه می‌دهد و این برای من در همان «سطح دیگر» مذکور اتفاق افتاد. پرداختن به این موضوع یقیناً مبحثی مستقل می‌طلبد و فکر می‌کنم جایش در این مقاله نیست. هدفم تنها اشاره‌ی کوچکی به انگیزه‌ی گروهی بود که نسبت به احساسشان اطلاع دارم و در برگزاری «هفتادسالگی» به نوعی سهیم بودند.

شهاب ابراهیمی
دبیر سابق انجمن علمی و فوق برنامه دانشکده علوم ریاضی - دانشگاه صنعتی شریف

به یاد
مسعود بهرامی شریف

فهرست مطالب

کارهای شهشهانی در زمینه‌ی سیستم‌های دینامیکی

سعید ذاکری
ترجمه‌ی اوژن غنی‌زاده

۱ مقدمه

سیاوش شهشهانی فعالیت ریاضی خود را در اواسط دهه‌ی ۱۹۶۰، به عنوان یک دانشجوی فوق لیسانس در دانشگاه برکلی آغاز کرد. دهه‌ی ۱۹۶۰ دوران طلایی نظریه‌ی سیستم‌های دینامیک هموار بود؛ اسمیل به تازگی پایه‌های نوین این نظریه‌ی زیبا را بیان کرده بود، و کار پیش‌آهنگانه‌ی وی دینامیک‌کارها، گلوبال آنالیست‌ها و توپولوژی کارهای بسیاری را به مطالعه‌ی دینامیک جریان‌ها و وابرریختی‌ها[۱] از دید گلوبال برانگیزانده بود. سیستم‌های دینامیک به سرعت نقل هر محفل شدند و شهشهانی، که همواره در مسائل ریاضی خوش‌سلیقه بوده‌است، فرصت را غنیمت شمرد و تحت نظر اسمیل[۲] به کار مشغول شد.

در آن زمان، از مسائل محوری سیستم‌های دینامیکی، مساله‌ی ثبات ساختاری و مساله‌ی عمومیت یک خانواده‌ی داده‌شده از سیستم‌های دینامیکی بود. مساله‌ی ثبات ساختاری، مساله‌ی یافتن عناصری در خانواده‌ی داده‌شده‌است که خواص کیفی آن‌ها تحت اختلال‌های کوچک ولی دلخواه ثابت بماند. از طرف دیگر مساله‌ی عمومیت، مساله‌ی یافتن خاصیت‌های دینامیکی مشترک بین عموم عناصر یک خانواده است. کار اول شهشهانی [Sh۱] به بررسی این دو موضوع روی خانواده‌ی معادلات دیفرانسیل عادی درجه‌ی دوم روی یک خمینه می‌پردازد؛ این معادلات تعمیم کلی معادلات حرکت نیوتون در مکانیک کلاسیک به شمار می‌آیند. یک زیرشاخه‌ی جالب در این زمینه معادلاتی هستند که از افزودن یک نیروی اتلافی[۳] به یک سیستم محافظه‌کار[۴] به‌دست می‌آیند. در [Sh۲]، شهشهانی نتایج عمومیت را به‌دست آورد و نسخه‌ای از نامساوی‌های مورس[۵] را برای چنین سیستم‌های اتلافی[۶] اثبات کرد. کارهای بعدی وی شامل مطالبی در زمینه‌ی سیستم‌های سیمپلکتیک[۷] روی خمینه‌های صحیح [Sh۳]، ثبات ساختاری صورت تعمیم یافته‌ی معادلات ون در پل[۸] [Sh۴]، کران‌های بر تعداد جواب‌های متناوب معادلات آبل [Sh۶]، و مشارکت عمده‌ی وی در پیش‌برد ریاضیات زیستی [Sh۵]، که در این مورد به مقاله‌ی عدالت اشاره می‌کنم. در سال‌های اخیر، عمده‌ی توجه وی معطوف تورق‌های هولومورفیک[۹] روی خمینه‌های پیچیده و تکررهای نگاشت‌های[۱۰] گویا روی کره‌ی ریمانی بوده‌است.

[۱] Diffeomorphism
[۲] Smail
[۳] Dissipation Force
[۴] Conservative
[۵] Morse Inequality
[۶] Dissipative
[۷] Symplectic
[۸] van der Pol
[۹] Holomprphic Foliation
[۱۰] Abel Equations

۲ سه مثالون

در ادامه، تلاش خواهم کرد به توضیح اجمالی سه نمونه از کارهای شهشهانی در زمینه‌ی سیستم‌های دینامیکی بپردازم تا بتوانم شمائی از کار وی در این زمینه را به تصویر کشیده‌باشم.

خواص کلی معادلات دیفرانسیل معمولی درجه‌ی دوم. معادلات دیفرانسیل عادی درجه‌ی دوم (ODE) به طور طبیعی به عنوان معادلات حرکت در مکانیک کلاسیک ظاهر می‌شوند. یک ODE درجه‌ی دوم $\ddot{q} = f(q, \dot{q})$ روی محور اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ را می‌توان با وارد ساختن پارامتر سرعت، $v = \dot{q}$ به مشابه یک ODE درجه‌ی اول روی کلاف مماس $T\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^۲$ در نظر گرفت. ODE درجه‌ی اول مورد بحث را می‌توان توسط میدان برداری $v\frac{\partial}{\partial q} + f(q, v)\frac{\partial}{\partial v}$ روی $\mathbb{R}^۲$ نمایش داد. این ایده را می‌توان به شیوه‌ی زیر به هر خمینه‌ی n بعدی M هموار گسترش داد: فرض کنید $q = (q^۱, \dots, q^n)$ و $(q, v) = (q^۱, \dots, q^n, v^۱, \dots, v^n)$ مختصات‌های موضعی به ترتیب روی M و کلاف مماس آن، TM باشند. یک ODE درجه‌ی دوم روی M یک میدان برداری روی TM است که به طور موضعی فرم

$$X(q, v) = \sum_{i=۱}^{n} v^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \sum_{i=۱}^{n} f_i(q, v) \frac{\partial}{\partial v^i}$$

را برای f_iهای هموار اختیار می‌کند. اساسا ODE درجه‌ی دوم روی M را می‌توان توسط میدان‌های برداری $X : TM \to T^۲M$ تعریف کرد که شرط $D\pi o X = id_{TM}$، که $\pi : TM \to M$ افکنش کانونی است، را ارضا می‌کنند.

حال فرض کنید M یک خمینه‌ی هموار فشرده باشد و $\mathcal{S}(M)$ فضای همه‌ی ODEهای هموار درجه‌ی دوم روی M که با توپولوژی ویتنی[۱۱] مجهز شده‌اند. سوالی که بطور طبیعی در اینجا مطرح می‌شود این است که یک میدان برداری نوعی در $\mathcal{S}(M)$ دارای چه خواص دینامیکی ساده‌ایست. برای ادامه‌ی کار، ابتدا عمومیت را چنین تعریف می‌کنیم که می‌گوییم یک زیرمجموعه‌ی $\mathfrak{g} \subset \mathcal{S}(M)$ عمومی است اگر شامل اشتراک شمارا مجموعه‌ی باز چگال در $\mathcal{S}(M)$ باشد. به طور خاص، یک مجموعه‌ی عمومی چگال است، چرا که به آسانی می‌توان نشان داد که $\mathcal{S}(M)$ یک فضای بئر[۱۲] است. شهشهانی به سوال فوق به کمک قضیه‌ی زیر پاسخ گفت. به یاد بیاورید که تکینگی p در میدان برداری X با جریان[۱۳] $\{\phi_t\}$ هذلولوی[۱۴] است اگر تمامی مقدار ویژه‌های $D\phi_۱(p)$ خارج از دایره‌ی واحد باشند. خمینه‌ی پایدار (ناپایدار) p مجموعه‌ی تمام qهاییست که با $t \to +\infty$ ($t \to -\infty$) داشته باشیم $\phi_t(p) \to q$. به طور مشابه، فرض کنید γ یک مدار متناوب X باشد، $p \in \gamma$، و f اولین تبدیل بازگشت پوانکاره[۱۵] باشد که روی یک عرضی موضعی[۱۶] γ روی p تعریف شده است، به طوری که $f(p) = p$. آن‌گاه می‌گوییم γ هذلولوی است اگر تمامی مقادیر ویژه‌ی $Df(p)$ خارج از دایره‌ی واحد باشند. خمینه‌ی پایدار (ناپایدار) γ نیز مجموعه‌ی تمامی qهاییست که با $t \to +\infty$ ($t \to -\infty$) داشته باشیم $\phi_t(q) \to \gamma$.

قضیه [Sh۱]. مجموعه‌ی عمومی $\mathfrak{g} \subset \mathcal{S}(M)$ وجود دارد به‌طوری که برای هر $X \in \mathfrak{g}$ داشته باشیم:

۱) تمام تکینگی‌ها و مدارهای متناوب X هذلولوی باشند،

۲) تمامی خمینه‌های پایدار و ناپایدار تکینگی‌ها و مدارهای متناوب X به صورت عرضی تلاقی کنند،

۳) اگر $\dim M > ۱$، هیچ مدار متناوبی از X با مقطع صفر TM تلاقی نکند.

با توجه به اینکه تکینگی‌های یک ODE درجه‌ی دوم باید به مقطع صفر تعلق داشته‌باشند، از قضیه‌ی فوق نتیجه می‌شود که به طور کلی باید فقط تعداد متناهی نقطه‌ی تکین وجود داشته باشد. ولی به طور کلی می‌توان حتی شمارا مدار متناوب داشت، حتی زمانی که M شکلی به سادگی یک دایره باشد [Sh۱].

نتیجه‌ی فوق یادآور قضیه‌ی کوپکا-اسمیل[۱۷] است که بنا به آن یک میدان برداری عمومی روی یک خمینه‌ی فشرده فقط شامل تکینگی‌ها و مدارهای متناوب هذلولوی است، و خمینه‌های پایدار و ناپایدار آن‌ها به طور عرضی تلاقی می‌کنند ([K] و [Sm۲]

[۱۱] Whitney Topology
[۱۲] Baire Space
[۱۳] flow
[۱۴] hyperbolic
[۱۵] Poincare's first return map
[۱۶] local transversal
[۱۷] Kupka-Smale Theorem

را مقایسه کنید). برهان شهشانی (برای قضیه‌ی مطرح شده) از تکنیک‌های اختلال جعبه‌ی جریان[18] کوپکا و اسمیل بهره می‌برد، و بر مبنای لمی پایه‌ای است که نشان می‌دهد اگر $X \in \mathcal{S}(M)$ در یک جعبه‌ی جریان F به وسیله‌ی یک دنباله‌ی Y_n از میدان‌های برداری TM تقریب زده شود، آن‌گاه X را می‌توان در F توسط دنباله‌ای چون $X_n \in \mathcal{S}(M)$ تقریب زد که هر X_n در F به‌صورت هموار مزدوج Y_n است.

سیستم‌های اتلافی. در این زمینه، شهشهانی به مطالعه‌ی نمونه‌های خاصی از هایODE درجه‌ی دوم روی خمینه‌ها پرداخته است که نظیرهای عمومی سیستم‌های اتلافی در مکانیک کلاسیکند. n-خمینه‌ی فشرده و هموار M و کلاف مماس آن TM و افکنش کانونی $\pi : TM \to M$ را در نظر بگیرید. متر هموار ریمانی g روی M را تثبیت کنید. تابع انرژی $E : TM \to \mathbb{R}$ را چنین تعریف کنید: $E = K + V$. در اینجا انرژی جنبشی، K چنین تعریف شده: $K(q,v) = g_q(v,v)$ و V یا انرژی پتانسیل تابع هموار دلخواهی است که روی تارهای[19] π ثابت است. از روی تابع انرژی همیلتونی E، میدان برداری X_E چنین ساخته می‌شود: فرم سیمپلکتیک کانونی روی کلاف مماس T^*M را با ω^* نمایش دهید. یادآوری می‌کنیم که ω^* فقط به ساختار هموار M بستگی دارد و اگر $(q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n)$ یک دستگاه مختصات موضعی روی T^*M باشد، آن‌گاه:

$$\omega^* = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q^i$$

عقب‌گرد[20] ω از ω^* تحت یکریختی $TM \xrightarrow{\simeq} T^*M$ با متریک g یک فرم سمپلکتیک روی TM است، و به‌وضوح به g وابسته است. حال میدان برداری X_E روی TM توسط ضابطه‌ی زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{d}E = \omega(., X_E)$$

به‌سادگی می‌توان بررسی کرد که $D\pi o X_E = id_{TM}$ و در نتیجه X_E یک ODE درجه‌ی دوم است.

با افزودن یک نیروی اتلافی به چنین میدان X_E یک سیستم اتلافی حاصل می‌شود. بنابه تعریف، یک میدان برداری Δ روی TM یک نیروی اتلافی است اگر (۱) Δ "عمودی" باشد، به این معنا که $D\pi o\Delta = 0$؛ (۲) $\hat{g}(\Delta, \bigtriangledown_{\hat{g}} K) < 0$ در هرجا خارج از مقطع صفر TM. در اینجا $\hat{g}$ متر ریمانی القا شده روی TM است که نسبت به آن $\bigtriangledown_{\hat{g}} K$ عمودی و $\bigtriangledown_{\hat{g}} V$, افقی است. به طور ساده، شرط (۱) به این معناست که نیروی اتلافی فقط به سرعت بستگی دارد، در حالیکه شرط (۲) نشان می‌دهد که این نیرو در تضاد با انرژی جنبشی عمل می‌کند تا از سرعت سیستم بکاهد. میدان‌های برداری به شکل $X_E + \Delta$ سیستم‌های اتلافی نامیده می‌شوند؛ و به‌وضوح هایODE درجه‌ی دوم هستند.

در [Sh۲]، شهشهانی ساختار دینامیکی یک سیستم اتلافی عمومی را مشخص می‌کند. برای بیان کار وی، به یاد بیاورید که مجموعه‌ی غیر-سرگردان[21] Ω_X میدان برداری X با جریان $\{\phi^t\}$ مجموعه‌ی تمام نقاط q است که برای هر همسایگی U از q، t دلخواه به اندازه‌ی کافی بزرگ وجود دارد که $\phi_t(U) \cap U \neq \emptyset$. میدان برداری X را Ω-پایدار می‌نامیم اگر ساختار مداری آن روی مجموعه‌ی ناوردای Ω_X تحت اختلال‌های کوچک تغییر نکند. به طور مشخص، برای هر میدان برداری Y که به اندازه‌ی کافی به X نزدیک باشد، همریختی مدار-نگهدار $h : \Omega_X \to \Omega_Y$ وجود دارد.

قضیه [Sh۲]. میدان برداری X_E را که شامل تعداد متناهی تکینگی ناتباهیده است را تثبیت کنید. در این صورت زیرمجموعه‌ی باز و چگال D از مجموعه‌ی تمامی نیروهای اتلافی TM وجود دارد به طوری که اگر $\Delta \in D$ و $X = X_E + \Delta$ آن‌گاه:

۱) X، Ω-پایدار است و Ω_X مجموعه‌ی تعداد متناهی تکینگی هذلولوی است؛

۲) کلاف مماس TM اجتماع تمام خمینه‌های پایدار تکینگی‌های X است؛

۳) روی هر تکینگی X بعد خمینه‌ی پایدار حداقل به اندازه‌ی بعد خمینه‌ی ناپایدار است.

در حالت خاصی که میدان برداری X_E به فرم $\ddot{x} = f(x)$ روی $M = S^1$ با ساختار استاندارد ریمانی باشد، نسخه‌ی قوی‌تری از قضیه‌ی فوق قابل اثبات است (ن. ک. قضیه‌ی ۲ [Sh۲]).

[18] flow-box
[19] fiber
[20] pull-back
[21] non-wandering set

نتیجه‌ی دیگری که شهشهانی به‌دست آورد "نامساوی‌های مورس" برای سیستم‌های اتلافی بود. برای میدان برداری داده شده‌ی X روی خمینه‌ی M، نامساوی مورس قیاسی بین اعداد بتی[۲۲] M و تعداد خمینه‌های پایدار X با بعد مشخص ارائه می‌کنند. این نامساوی‌ها توسط مورس برای گرادیان میدان‌های برداری بدست آمد (ن. ک. [M]). این نامساوی‌ها توسط اسمیل برای میدان‌های برداری‌ای که اکنون به نام "اسمیل-مورس" شناخته می‌شوند تعمیم داده‌شدند.[Sm۱]

نسخه‌ی ارائه شده توسط شهشهانی از این نامساوی‌ها را می‌توان به شکل زیر بیان کرد. برای M و یک $X = X_E + \Delta$ی عمومی که در بالا آمد، فرض کنید β_i، i-امین عدد بتی M باشد و M_i تعداد خمینه‌های پایدار X با بعد i. دقت کنید که بنا بر قضیه‌ی فوق، $M_i = ۰$ برای $i = ۰, ۱, \ldots, n - ۱$.

قضیه .[Sh۲] برای هر $n \leq k \leq ۰$، نامساوی زیر را داریم:

$$\sum_{i=۰}^{k}(-۱)^{k+i}M_{n+i} \geq \sum_{i=۰}^{k}(-۱)^{k+i}\beta_i$$

به‌علاوه، در حالت $k = n$ تساوی به شکل زیر برقرار است:

$$\sum_{i=۰}^{k}(-۱)^{k+i}M_{n+i} = \sum_{i=۰}^{k}(-۱)^{k+i}\beta_i = \chi(M)$$

جواب‌های متناوب معادله‌ی آبل. بخش دوم سوال ۱۶ام هیلبرت، پرسش راجع به پیدا کردن یک کران $N = N(d)$ رویتعداد حلقه‌های حدی[۲۳] یک میدان برداری چندجمله‌ای مانند $P(x, y)\partial/\partial x + Q(x, y)\partial/\partial y$ در صفحه که در آن $d = \max\{\deg P, \deg Q\}$ است. با وجود تلاش‌های بسیار و نتایج جزئی بدست‌آمده، این مساله هنوز در حالت کلی حل نشده باقی‌مانده‌است. حتی اثبات این گزاره که یک میدان برداری چندجمله‌ای در صفحه تعداد متناهی حلقه‌ی حدی دارد نیز به تازگی (۱۹۸۷) توسط ایلیاشنکو[۲۴] بیان شده است.

مساله‌ی ساده‌تری با ماهیت مشابه مساله‌ی تقریب تعداد جواب‌های متناوب معادله‌ی دیفرانسیل آبل،

$$\dot{x} = x^n + a_{n-۱}(t)x^{n-۱} + \cdots + a_۱(t)x + a_۰(t)$$

است که در آن $t \in [۰, ۱]$، $x \in \mathbb{R}$، و a_iها توابع هموار روی $[۰, ۱]$اند. در اینجا، یک منظور از جواب متناوب $x = x(t)$ جوابی است که $x(۰) = x(۱)$ برای آن برقرار باشد. شهشهانی این مساله را برای حالت $n \leq ۳$ حل کرده است. وی با استفاده از روشی مقدماتی اما زیرکانه قضیه‌ی زیر را ثابت کرد:

قضیه .[Sh۶] معادله‌ی آبل در حالت $n \leq ۳$ حداکثر n جواب متناوب دارد.

در این‌جا ایده‌ی اثبات وی برای حالت $n = ۳$ را بیان می‌داریم(حالت‌های $n = ۱, ۲$ حالت‌های ساده‌ای هستند). وی ابتدا مشاهده کرد که جواب‌های متناوب ساده (با تکرر ۱) تحت اختلال‌های کوچک در معادله ثابت می‌مانند. به طور کلی‌تر، او نشان داد که از یک جواب متناوب با تکرر k حداکثر k جواب متناوب منشعب می‌شوند. او سپس با استفاده از این اثبات کرد که معادله‌ای با جواب متناوب با تکرر بیش از ۱ دقیقا ۳ جواب متناوب دارد. در آخر، برای یک معادله‌ی دلخواه وی روشی برای ارتباط دادن آن به معادله‌ای با ۳ جواب متناوب ساده ارائه کرده و با استفاده از پیوستار حکم مورد نظر را به اثبات رسانید.

جای تعجب نیست که روش وی برای درجات بالاتر کارآمد نیست. در حقیقت، برای $n \geq ۴$ معادله‌ی آبل می‌تواند هر تعداد جواب متناوب اختیار کند (ن. ک. [L]). جالب‌تر از آن این حقیقت است که وقتی $n \geq ۴$، تبدیل‌های بازگشت $x(۰) \to x(۱)$ این معادلات در فضای تمامی همریختی‌های جهت‌نگهدار چگال است .[P] به تازگی، ایلیاشنکو کران بالایی برای تعداد جواب‌های متناوب این معادله بر حسب n و اندازه‌ی a_i ارائه کرده است .[I] به‌طور مشخص وی نشان داده که اگر $n \geq ۴$ و $\sup_{t\in[۰,۱]} \mid (a_i(t)) \mid < C$ برای هر $n - ۱ \leq i \leq ۰$، آن‌گاه معادله حداکثر $N = N(n, C)$ جواب متناوب دارد که

$$N \leq ۹ \exp\{(۳C + ۲) \exp(\frac{۳}{۲}(۲C + ۳)^n)\}$$

این کران دوبار نمایی به نظر بسیار فراتر از یک کران بهینه می‌آید، اما در حال حاضر تنها تخمین در دست است.

[۲۲] Betti number
[۲۳] limit cycles
[۲۴] Ilyashenko

۳ سخن آخر

اجازه بدهید سخن با کلماتی چند غیر ریاضی پایان دهم. زمانی که شهشهانی در اواسط دهه‌ی ۷۰ به ایران بازگشت، با نسل جدیدی از دانشجویان با استعداد رو به رو شد که مشتاق آموزش ایده‌های تازه و نوین ورای استاندارد و برنامه‌ی از مد افتاده‌ی دانشگاه بودند. برای پاسخ به این اشتیاق دانشجویان، او برنامه‌ی آموزشی نوینی را طرح ریخت، درس‌های نوین و هیجان‌انگیزی ارائه کرد و سمینارهای جالب‌ناکی برگزار کرد. به پاس زحمات وی، دانشجویان بسیاری برای اولین بار با توپولوژی‌جبری و دیفرانسیلی، سیستم‌های دینامیکی، ریاضیات زیستی، و مباحث و زمینه‌های زیبای دیگری آشنا شدند. دانش او در زمینه‌های مختلف ریاضیات و همچنین عشق او به ریاضی در کنار شخصیت روشنفکر وی از او شخصیتی کاریزماتیک ساخته است. در چشم دانشجویان، وی نمونه‌ی تمام عیار یک ریاضیدان حرفه‌ای است.

تاثیر بسزای شهشهانی بر ریاضیات ایران غیرقابل انکار است. آن‌هایی که از میان ما افتخار کار با وی را داشتند این امر تصدیق می‌کنند. اما حرف امثال من را برای این موضوع معیار قرار ندهید: نسل بعدی ریاضیدانان ایرانی که شهشهانی برای آن‌های بسیار فداکاری‌های شخصی هم کرده است شما را متقاعد خواهند کرد.

مراجع

[I] lyashenko, Yu., Hilbert-type numbers for Abel equations, growth and zeros of holomorphic functions, Nonlinearity 13 (2000) 1337-1342.

[K] upka, I., Contribution ‘a la th´eorie des champs g´en´eriques, Contributions to Differential Equations 2 (1963) 457-484.

[L] ins-Neto, A., The number of periodic solutions of the equation dx $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=0}^{n} a_i(t)x_j, 0 \leq t \leq 1$ for which $x(0) = x(1)$, Inv. Math. 59 (1980) 67-76.

[M] ilnor, J., Morse Theory, Annals of Mathematics Studies, No. 51, Princeton University Press, 1963.

[P] anov, A., On the diversity of Poincar´e maps for Abel equations, Func. Anal. Appl. 33 (1999) 84-88.

[Sh1] hahshahani, S., Second order ordinary differential equations on differentiable manifolds, 1970 Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIV, Berkeley, Calif., 1968), pp. 265-272, Amer. Math. Soc., Providence, R.I.

[Sh2] hahshahani, S., Dissipative systems on manifolds, Invent. Math. 16 (1972) 177-190.

[Sh3] hahshahani, S., Symplectic structures on integral manifolds, Indiana Univ. Math. J. 23 (1973/74) 209-211, erratum: Indiana Univ. Math. J. 24 (1974) 93.

[Sh4] hahshahani, S., Some examples of dynamical systems, Control theory and topics in functional analysis (Internat. Sem., Internat. Centre Theoret. Phys., Trieste, 1974), Vol. II, pp. 227-234. Internat. Atomic Energy Agency, Vienna, 1976.

[Sh5] hahshahani, S., A new mathematical framework for the study of linkage and selection, Mem. Amer. Math. Soc. 17 (1979), no. 211, ix+34 pp.

[Sh6] hahshahani, S., Periodic solutions of polynomial first order differential equations, Nonlinear Anal. 5 (1981) pp. 157-165.

[Sm1] male, S., Morse inequalities for a dynamical system, Bull. Amer. Math. Soc. 66 (1960) 43-49.

[Sm2] male, S., Stable manifolds for differential equations and diffeomorphisms, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 17 (1963) 97-116.

میراث آبل در هندسه‌ی جبری

حمید احمدیان

این مقاله ترجمه‌ی بخشی از [۱] است که براساس کنفرانسی است که به مناسبت تولد ۲۰۰ سالگی نیلز هنریک آبل[۱] در ژوئن سال ۲۰۰۲ در اسلو[۲] برگزار شده است.

۱ منشا قضیه‌ی آبل

در دوران آبل و قبل از آن یکی از بزرگترین علایق ریاضیدانان محاسبه‌ی انتگرال توابع جبری بود که به شکل

$$\int y(x)\mathrm{d}x \tag{۱}$$

است که در آن $y(x)$ تابعی است که در معادله‌ی

$$f(x, y(x)) = 0 \tag{۲}$$

صدق می‌کند که $f(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ یک چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر با ضرایب مختلط است. هر چند تا مدت‌ها بعد این مسئله صورت‌بندی نشد، اما به نظر می‌رسد که با انتخاب یک شاخه‌ی مناسب از جواب‌های معادله‌ی ۲ به همراه یک مسیر انتگرال‌گیری در صفحه‌ی x که از نقاط شاخه‌ای[۳] نمی‌گذرد - به این دلیل که در این نقاط ریشه‌های مکرر داریم - انتگرال ۱ خوش‌تعریف است. به عبارتی می‌توان خم جبری F^0 در $\mathbb{C}^2$ را با

$$f(x,y) = 0$$

تعریف کرد و روی F^0، فرم دیفرانسیل گویای ω را که از تحدید

$$\omega = y\mathrm{d}x$$

به آن بدست آمده، در نظر گرفت. اگر F بستار F^0 در فشرده‌سازی $\mathbb{C}^2$؛ که با صفحه‌ی تصویری $\mathbb{P}^2$ یا $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ داده می‌شود، باشد می‌توان روی F خم γ را طوری گرفت که خارج از نقاط تکینگی F و قطب‌های ω باشد و بنابراین انتگرال ۱ به صورت

$$\int_\gamma \omega \tag{۳}$$

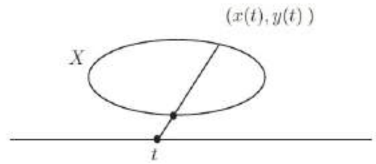
تعریف می‌شود.

در واقع در بین ریاضیدانان آن زمان، علاقه به حالت کلی‌تر

$$\int r(x, y(x))\mathrm{d}x \tag{۴}$$

بود که $r(x,y)$ تابعی گویا از x و y است و $y(x)$ همان است که در بالا آمد. تعریف مجرد انتگرال ۴ به همان صورت ۳ است، که اینجا ω از تحدید ۱-فرم دیفرانسیل گویای $r(x,y)\mathrm{d}x$ به F بدست می‌آید.(ω یک ۱-فرم مرومورفیک بر F است.)

[۱] Neils Henrik Abel
[۲] Oslo
[۳] branch point



شکل ۱: نمایش گویای یک خم در صفحه

یکی از علایق خاص در این زمینه، انتگرال‌های ابربیضوی[۴] بود:

$$\int \frac{p(x)\mathrm{d}x}{\sqrt{q(x)}} \tag{5}$$

که $p(x)$ و $q(x)$ چندجمله‌ای هستند و

$$q(x) = x^n + q_1x^{n-1} + \cdots + q_n$$

از درجه‌ی n با ریشه‌های متمایز است. در حالت $n = 1, 2$، معاصران آبل به خوبی می‌دانستند که این انتگرال‌ها برحسب توابع ابتدایی[۵] - مثلثاتی و لگاریتمی - قابل بیان هستند. دلیل هندسی این امر که آن هم در آن عصر شناخته شده بود، این است که هر خم مسطح را می‌توان به صورت گویا مانند شکل ۱ پرمایش کرد. قرار دادن توابع گویای $x(t)$ و $y(t)$ در رابطه‌ی ۵، انتگرال

$$\int r(t)\mathrm{d}t$$

را بدست می‌دهد که در آن $r(t)$ تابعی گویاست(نسبت دو چندجمله‌ای) و آنگاه این انتگرال را می‌توان به کمک تجزیه‌ی $r(t)$ به کسرهای جزئی محاسبه کرد.

علاقه‌ی ویژه‌ای به انتگرال‌های ابربیضوی ۵ در حالت $n = 3, 4$ وجود داشت که بخش مهمی از این حالت در جریان کارهای اویلر[۶] لژاندر[۷] و دیگران شناخته شد. به دلیلی که اکنون بیان خواهیم کرد، این دسته از انتگرال‌ها را «انتگرال‌های بیضوی[۸]» می‌نامیدند؛ همان‌گونه که در روند محاسبه‌ی طول کمانی از دایره به توابع مثلثاتی داده شده با انتگرال

$$\int \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}} \quad , \quad x^2 + y^2 = 1 \tag{6}$$

برخورد می‌کنیم، توابعی که در جریان محاسبه‌ی طول کمانی از بیضی بدست می‌آمدند، بسیار مورد توجه بودند. بنابراین با قرار دادن

$$t = \arcsin(\frac{x}{a})$$

انتگرال محاسبه‌ی محیط بیضی

$$\int \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} \quad , \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

به انتگرال بیضوی زیر تبدیل می‌شود:

$$a \int \sqrt{\frac{a^2 - k^2x^2}{a^2 - x^2}} \quad , \quad k^2 = (a^2 - b^2)/a^2 \tag{7}$$

که به فرم لژاندر است.(در واقع در اینجا بیضی را به صورت

$$(x(t), y(t)) = (a \sin t, b \cos t)$$

---

[۴] hyperelliptic integrals
[۵] elementary function
[۶] Euler
[۷] Legendre
[۸] elliptic integrals

پرمایش کرده‌ایم.)

یک دسته‌ی بسیار مورد توجه از انتگرال‌های ۴، آن‌هایی بودند که تصور می‌شد در معادلات تابعی یا قضایای خاصی صدق می‌کنند. برای مثال اگر به کمک هندسه، دو برابر طول یک خم روی دایره را در معادله‌ی ۶ قرار دهیم، فرمول‌هایی برای $\sin(2\theta)$ و $\cos(2\theta)$ به صورت ترکیبی از $\sin\theta$ و $\cos\theta$ بدست می‌آید. حتی می‌توان برای حالت کلی‌تر $\sin(\theta+\theta')$ و ... نیز فرمول‌هایی بدست آورد که اینها قضایای در مورد انتگرال ۶ بدست می‌دهد. در قرن هجدهم، کانت فاگونو[9]ی ایتالیایی روشی برای ساخت دوبرابر طول یک خم روی بیضی ارائه داد و آن را در معادله‌ی ۷ قرار داد. این کار باعث بدست آمدن قضایایی برای انتگرال بیضوی ۷ شد. همان‌طور که اشاره شد تصور فوق به ویژگی‌های بسیار خاصی در مورد انتگرال‌های فوق رسید که در اواخر قرن ۱۸ و اوایل قرن ۱۹ مورد مطالعه بودند.

۲ قضیه‌ی آبل و برخی نتایج آن

در کارهای آبل روی انتگرال توابع جبری دو ایده‌ی اصلی وجود دارد:

- جمع آبلی[10]
- وارونگی[11]

به کمک این دو ایده، آبل توانست به فرم بسیار کلی معادلات تابعی[12] برای انتگرال‌ها دست یابد. در این بخش به توضیح این ایده‌ها می‌پردازیم.

ابتدا به بررسی چیزی می‌پردازیم که امروزه جمع آبلی نامیده می‌شود؛ انتگرال‌های ۱ و ۴ که به دلیل آنکه توابعی به‌شدت متعالی[13] از حد بالای انتگرال‌گیری[14] هستند، مطالعه‌ی مستقیم آن‌ها دشوار است.[15] ایده‌ی آبل در نظر گرفتن مجموع انتگرال‌های نسبت داده شده به نقاط متغیری بود که اشتراک $F=\{f(x,y)=0\}$ با خانواده‌ی خم‌های $G_t=\{g(x,y,t)=0\}$ هستند که به طور گویا به t وابسته‌اند. بنابراین با فرض اینکه

$$F\cap G_t=\sum_i (x_i(t),y_i(t))$$

جواب دستگاه

$$\begin{cases} f(x,y)=0\\ g(x,y,t)=0\end{cases}$$

باشد؛ که همانند نمادگذاری دورهای جبری[16] به طور جمعی نوشته شده، جمع آبلی نسبت داده شده به ۴ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u(t)=\sum_i\int_{x_0}^{x_i(t)} r(x,y(x))\mathrm{d}x \tag{8}$$

[9] Count Fagnano
[10] abelian sums
[11] inversion
[12] functional equations
[13] highly transcendental functions
[14] upper limit of integration
[15] عبارت تابع‌های به‌شدت متعالی نیاز به تفسیر بیشتری دارد. آبل در مقاله‌ای که در سال ۱۸۲۶ منتشر کرد وجود چندجمله‌ای‌های R,F نشان داد به طوری‌که:

$$\int\frac{F\mathrm{d}}{\sqrt{R}}=\ln\Big(\frac{P+\sqrt{R}Q}{P-\sqrt{R}Q}\Big)$$

جواب دارد و P,Q دو چندجمله‌ای نسبت به هم اول می‌باشند. در اینجا R یک چندجمله‌ای درجه‌ی $2n$ با ریشه‌های مجزا از هم و F یک چندجمله‌ای از درجه‌ی $n-1$ است، بنابراین تابع زیر انتگرال، دیفرانسیل نوع سوم است. این یک استثنا است که انتگرال متعالی است ولی می‌توان آن را به صورت مجموعی از توابع ساده نوشت.

[16] algebraic cycles

شکل ۲: (i)

شکل ۳: (ii)

در زیر به تفصیل شرح می‌دهیم که منظور از چنین عبارتی چیست؟

یک مثال بسیار مهم حالتی است که همانند شکل‌های ۲ و ۳ G_t خانواده‌ای از خط‌ها در نظر گرفته شود.

در هردو حالت با در نظر گرفتن ۱-فرم دیفرانسیل $\omega = \mathrm{d}x/y$، انتگرال‌های ۴ به ترتیب به فرم زیر می‌شوند:

$$\begin{cases} (i) \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \\ (ii) \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+ax+b}} \end{cases} \tag{۹}$$

هرچند در حالت کلی جملات جمع آبلی به شدت متعالی‌اند، قضیه‌ی آبل جمع آبلی را بر حسب توابع مقدماتی بیان می‌کند.

قضیه ۱. *جمع آبلی ۸ را می‌توان به شکل*

$$u(t) = r(t) + \sum_{\lambda} a_\lambda \log(t - t_\lambda) \tag{۱۰}$$

نوشت که در آن $r(t)$ یک تابع گویا از t است.

در ادامه یکی از اثبات‌های آبل را برای این قضیه می‌آوریم:

اثبات. بنابر دلایلی که به زودی روشن خواهد شد، تابع گویایی به صورت

$$q(x,y) = r(x,y) f_y(x,y)$$

تعریف می‌کنیم. بنابراین در انتگرال‌های ظاهر شده در جمع آبلی ۸، انتگرالده تحدید فرم دیفرانسیل

$$\frac{q(x,y)\mathrm{d}x}{f_y(x,y)}$$

به خم جبری F است که قبلا تعریف شد. بنابراین با محاسبه داریم:

$$u'(t) = \sum_i \frac{q(x_i(t), y_i(t)) x_i'(t)}{f_y(x_i(t), y_i(t))}$$

از

$$\begin{cases} f(x_i(t), y_i(t)) = 0 \\ g(x_i(t), y_i(t), t) = 0 \end{cases}$$

با مشتق‌گیری از این دو تساوی نسبت به t و حل دستگاه دو معادله و دو مجهول حاصل برای یافتن $x_i'(t)$ داریم:

$$x_i'(t) = \left(\frac{g_t f_y}{f_x g_y - f_y g_x}\right)(x_i(t), y_i(t))$$

به طوری که:

$$u'(t)=\sum_i s(x_i(t),y_i(t)) \tag{۱۱}$$

که در این‌جا $s(x,y)$ یک تابع گویاست که توسط

$$s(x,y)=\Big(\frac{qg_t}{f_xg_y-f_yg_x}\Big)(x,y)$$

(ناصفر شدن مخرج در تابع گویای بالا نتیجه‌ی این فرض است که دو خم F و G_t که با معادلات به ترتیب $f(x,y)=0$ و $g(x,y,t)=0$ داده می‌شدند، هیچ مولفه‌ی مشترکی ندارند. چرا که در غیر این صورت $F\cap G_t$ نامتناهی می‌شود در حالی که ما فرض کرده بودیم متشکل از متناهی نقطه‌ی $(x_i(t),y_i(t))$ است.) آبل مشاهده کرد که طرف راست عبارت ۱۱ یک تابع گویا از t است – از دیدگاه آنالیز مختلط واضح است چرا که $u'(t)$ یک تابع مرومورفیک[۱۷] تک‌مقداری[۱۸] بر $\mathbb{P}^1$ است. انتگرال‌گیری از بسط $u'(t)$ نتیجه‌ی موردنظر را می‌دهد. □

آبل در مقاله‌ی Paris memoir'e و همچنین در دیگر نوشته‌هایش در مورد بررسی حالات خاص این مبحث، موفق شد فرمول صریحی برای سمت راست ۱۱ و در نتیجه برای جملات ظاهر شده در سمت راست فرمول $u(t)$ در قضیه‌ی ۱ بدست آورد. برای مثال وقتی خم‌های G_t، خط هستند، درون‌یابی لاگرانژ[۱۹] فرمولی صریح برای $u'(t)$ می‌دهد.

در اینجا کاربرد قضیه‌ی آبل برای دو انتگرال در عبارت ۹ نشان می‌دهیم. هر دوی این انتگرال‌ها براساس ایده‌ی دوم آبل است که در بالا مطرح شد و به آن «معکوس کردن» انتگرال ۴ می‌گویند که عبارت است از تعریف مختصات $x(u)$ و $y(u)$ روی خم F به عنوان تابع‌های تک‌مقداره از متغیر u که در آن u معادله‌ی زیر را برآورده می‌کند:

$$u=\int_{(x_0,y_0)}^{(x(u),y(u))}\omega \tag{۱۲}$$

و در اینجا ω تحدید ۱-فرم دیفرانسیل $r(x,y)\mathrm{d}x$ به خم F است. برای مثال در انتگرال (i) در ۹، به وضوح داریم:

$$u=\int_{(0,1)}^{(\sin u,\cos u)}\omega$$

طرف راست ۱۰ را می‌توان با فرمول درون‌یابی لاگرانژ محاسبه کرد و به رابطه‌ی زیر رسید:

$$\int_0^{x_1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}+\int_0^{x_2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^{x_1y_2+x_2y_1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

که آن را به عنوان فرمول جمع برای تابع sin می‌شناسیم. چرا که با اعمال sin به دو طرف، فرمول آشنای $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ بدست می‌آید که در آن: $\sin\alpha=x_1$ و $\sin\beta=x_2$.

قبل از پرداختن به انتگرال دوم در ۹، باید متذکر شد که آبل قبلا در مقاله‌ی Paris memoir'e کلاس قابل توجه‌ای از انتگرال‌های ۴ را که اکنون انتگرال‌های نوع اول می‌نامیم، مطرح ساخت. شرط لازم برای این انتگرال‌ها این بود که طرف راست ۱۰ یک مقدار ثابت باشد – معادلا، انتگرال آبل ۴ به صورت موضعی تابعی کراندار از حد بالای انتگرال‌گیری باشد. آبل به طور صریح انتگرال‌های نوع اول را برای مثال‌های متعددی بدست آورد. برای نمونه رویه‌های ریمانی ابربیضوی[۲۰]

$$y^2=p(x)$$

که در آن $p(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه‌ی $n+1$ با ریشه‌های مجزا است، آبل نشان داد که انتگرال‌های نوع اول[۲۱] عبارتند از:

$$\begin{cases}\omega=\frac{g(x)\mathrm{d}x}{y}\\ \deg g(x)\le\left[\frac{n}{2}\right]\end{cases}$$

[۱۷] meromorphic
[۱۸] single-valued
[۱۹] Lagrange interpolation formula
[۲۰] hyperelliptic curves

[۲۱] در زبان مدرن‌تر ، هر ۱-فرم مرومورفیک بر یک رویه‌ی ریمانی، یک دیفرانسیل آبلی نامیده می‌شود. اگر ۱-فرم مذکور هولومورف باشد، آن را «نوع اول» می‌نامند، اگر مانده‌ی آن در تمامی قطب‌هایش صفر باشد آن را «نوع دوم» می‌نامند و در غیر این صورت «نوع سوم».

به ویژه با فرض اینکه ریشه‌های چندجمله‌ای درجه سوم $x^۳ + ax + b$ متمایز هستند، عبارت (ii) در ۹ انتگرال نوع اول می‌شود. پس قضیه‌ی آبل را برای خانواده‌ای از خط‌ها که خم درجه سوم $y^۲ = x^۳ + ax + b$ را قطع می‌کنند، می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$u_۱ + u_۲ + u_۳ = c \tag{۱۳}$$

توضیح ضروری آنکه خط‌ها خم درجه‌ی سوم را با حساب تکرر در ۳ نقطه قطع می‌کنند و لذا در تعریف $u(t)$ در ۸ سه انتگرال ظاهر می‌شود و به علاوه سمت راست قضیه‌ی ۱ به دلیل آنکه $\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^۳+ax+b}}$ یک دیفرانسیل نوع اول (به عبارت دقیق‌تر یک ۱-فرم هولومورف بر خم تصویری‌ای در $\mathbb{P}^۲$ که در معادله‌ی آفین آن به صورت مذکور داده می‌شود) است، باید ثابت باشد. در ۱۳، c یک عدد ثابت است و

$$u = \int_{(x_۰, y_۰)}^{(x(u), y(u))} \frac{\mathrm{d}x}{y} \tag{۱۴}$$

و با قرار دادن u_i برای $i = ۱, ۲, ۳$ در ۱۳ و ۱۴ برقرار خواهد شد. با مشتق گرفتن از ۱۴، بدست می‌آید:

$$۱ = \frac{x'(u)}{y(u)}$$

به طوری‌که

$$x'(u) = y(u) \tag{۱۵}$$

با انتخاب مناسب $(x_۰, y_۰)$ (به ویژه انتخاب نقطه‌ی $[۰, ۱, ۰]$ که در تقاطع خم تصویری

$$F = \{[X, Y, Z] \in \mathbb{P}^۲ \mid Y^۲ Z = X^۳ + aXZ^۲ + bZ^۳\}$$

با «خط در بی‌نهایت قرار دارد»)، خواهیم داشت

$$\begin{cases} c = ۰ \\ x(-u) = x(u) \end{cases}$$

و به این ترتیب ۱۳ به یکی از مشهورترین قضیه‌ها برای انتگرال‌های بیضوی تبدیل می‌شود

$$x(u_۱ + u_۲) = R(x(u_۱), x'(u_۱), x(u_۲), x'(u_۲)) \tag{۱۶}$$

که R یک تابع گویاست که مختصات x نقطه‌ی سوم از اشتراک یک خط با F را به عنوان یک تابع گویا از مختصات دو نقطه‌ی دیگر بیان می‌کند.

البته $x(u)$ تابع معروف $\mathscr{P}$-وایرشتراس[۲۲] است و بحث بالا معادله‌ی تابعی ۱۶ و معادله‌ی دیفرانسیل

$$x'(u)^۲ = x(u)^۳ + ax(u) + b$$

توسط تابع $\mathscr{P}$ برآورده می‌شود. چرا که $(x(u), y(u))$ نقطه‌ای از خم $y^۲ = x^۳ + ax + b$ بود و همان‌گونه که در ۱۵ دیدیم: $x'(u) = y(u)$. در اینجا با ذکر دو نکته بحث بالا را با تفصیل بیشتری ادامه می‌دهیم.

اول این‌که برای تعریف انتگرال

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^۳ + ax + b}} \tag{۱۷}$$

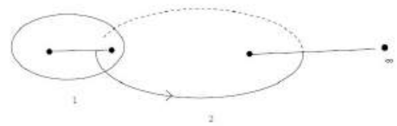
می‌توان صفحه‌ی x را در امتداد شکافی برید که دو ریشه‌ی $x^۳ + ax + b$ را به هم وصل می‌کند و همچنین شکاف دوم که نیم‌خطی است که از ریشه‌ی سوم خارج می‌شود و در واقع در $\mathbb{P}^۱$ آن را به $x = \infty$ وصل می‌کند، شکل ۴. در این صورت تابع $\sqrt{x^۳ + ax + b}$ روی زیرمجموعه‌ی بازی از صفحه‌ی x که پس از این برش‌ها بر جای می‌ماند، به طور تک مقداره قابل تعریف

---

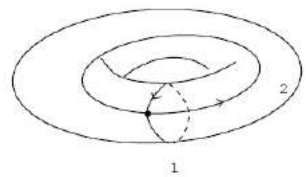
[۲۲] Weierstrass $\mathscr{P}$-function

فرض کنید Γ یک شبکه در $\mathbb{C}$ باشد. در این صورت تابع $\mathscr{P}$-وایرشتراس وابسته به Γ تابعی مرومورفیک بر $\mathbb{C}$ وتناوبی نسبت به شبکه‌ی Γ است که تنها در نقاط Γ قطب دارد و ضابطه‌ی آن به صورت زیر است:

$$\mathscr{P}_r(z) = \frac{۱}{z^۲} + \sum_{\omega \in \Gamma - \{۰\}} \left(\frac{۱}{(z-\omega)^۲} - \frac{۱}{\omega^۲}\right)$$



شکل ۴: برش صفحه‌ی x



شکل ۵: تصویر توپولوژیک F

است و می‌توان خم تصویری F (که فشرده سازی $y^2 = x^3 + ax + b$ بود و لذا با معادله‌ی همگن $Y^2Z = X^3 + aXZ^2 + bZ^3$ داده می‌شود.) را از طریق نگاشت $x \mapsto (x, y)$ به عنوان یک «پوشش دو لایه[23]» (البته پوشش دو لایه‌ی شاخه‌دار چرا که $\mathbb{P}^1$ همبند ساده است.) از صفحه‌ی x به انضمام ∞ (یعنی همان $\mathbb{P}^1$) در نظر گرفت که با این دید، از به هم چسباندن دو نسخه از این صفحه‌های شکاف‌دار بدست می‌آید و عبور از شکاف‌ها ما را به لایه‌ی دیگر می‌برد. در واقع F همان رویه‌ی ریمانی[24] فشرده‌ی نسبت داده شده به تابع جبری $\sqrt{x^3 + ax + b}$ است. همان‌گونه که در شکل ۵ دیده می‌شود، F از نظر توپولوژیک همان چنبره[25]ی آشنا است.

حال انتگرال ۱۷، به عنوان انتگرال در راستای خم روی رویه‌ی ریمانی تفسیر می‌شود. انتخاب مسیر انتگرال‌گیری نسبت به ترکیب خطی δ_1 و δ_2 (که خم‌های بسته‌ی مشخص شده در شکل ۵ اند.) خوش‌تعریف است. علی‌الخصوص از ۱۴ نتیجه می‌شود که:

$$\begin{cases} x(u + \lambda_i) = x(u) \\ y(u + \lambda_i) = y(u) \end{cases} \tag{18}$$

که

$$\lambda_i = \oint_{\delta_i} \frac{\mathrm{d}x}{y}$$

تناوب‌های $\frac{\mathrm{d}x}{y}$ هستند. حال فرض کنید Λ شبکه‌ی[26] تولید شده توسط λ_1 و λ_2 در صفحه‌ی مختلط باشد. پرمایش آشنای

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}/\Lambda \arrow[r] \arrow[d] & F \\ u \arrow[r] & (x(u), x'(u)) \arrow[u, "\in"'] \end{tikzcd} \tag{19}$$

از خم بیضوی $\mathbb{C}/\Lambda$ توسط تابع وایرشتراس و مشتق آن را داریم. (می‌دانیم که می‌توان رویه‌ی ریمانی فشرده‌ی $\mathbb{C}/\Lambda$ را از طریق نگاشت $x \mapsto [1, \mathscr{P}(x), \mathscr{P}'(x)]$ در $\mathbb{P}^2$ نشاند که در آن $\mathscr{P}$ تابع وایرشتراس متناظر شبکه‌ی Λ است.)

[23] 2-sheeted covering
[24] Riemann surface
[25] torus
[26] lattice

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & I \subset F \times \mathbb{P}^1 \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ F & & \mathbb{P}^1 \end{tikzcd}$$

شکل ۶: دیاگرام اثبات قضیه‌ی آبل

در مقاله‌ی Paris memoir'e، آبل در حالت کلی ویژگی اساسی توابع بیضوی را بدست می‌دهد: آن‌ها توابعی‌اند که از اعمال وارونگی به انتگرال نوع اول بر رویه‌های ریمانی بدست می‌آیند که چنین انتگرالی دارند.

یادآوری می‌کنیم که بعد فضای انتگرال‌های نوع اول یک تعریف برای گونه[۲۷]ی خم جبری F است (یا گونه‌های حسابی[۲۸] در حالتی که F تکین[۲۹] است). گسترش مباحث بالا که توسط آبل آغاز شد به خم‌های از گونه‌ی دلخواه توسط ژاکوبی[۳۰]، ریمان[۳۱] و دیگر ریاضیدانان قرن نوزدهم انجام شد.

نکته‌ی دوم این است که تابع‌های $x(u)$ و $y(u)$ در معادله‌ی ۱۴، می‌توانند به صورت موضعی به گونه‌ای تعریف شوند که ۱۵ حفظ شود و معادله‌ی تابعی ۱۶، در دامنه‌ی تعریف برقرار باشد. اما در این حالت این معادله‌ی تابعی می‌تواند برای گسترش $x(u)$ و $y(u)$ به توابعی مرومورفیک به کار رود. اگر $x(u)$ برای $|u| < \epsilon$ تعریف شده باشد، در این صورت به کمک ۱۶ می‌توان $x(2u)$ را تعریف کرد و به همین ترتیب می‌توانیم ادامه دهیم و $x(u)$ را برای $|u| < 2\epsilon, |u| < 3\epsilon, \ldots$ تعریف کنیم. این مسئله که یک معادله‌ی تابعی ممکن است برای گستردن یک شیء موضعی به حالت کلی استفاده شود از نتایج اصلی قضیه‌ی آبل محسوب می‌شود که در زیر در مورد آن بحث خواهد شد.

در انتهای این بخش دو نتیجه‌ی مستقیم قضیه‌ی آبل در هندسه‌ی جبری را بیان می‌کنیم:

الف) نتایج مقدماتی نظریه‌ی هاج[۳۲]

ب) استفاده از تطابق[۳۳]

منظور از الف این است که آبل چیزی را که امروزه فضای ۱-فرم‌های هلومورف $H^0(\Omega^1_F)$ نامیده می‌شود، به عنوان یک ناوردای بنیادی یک خم جبری شناسایی کرد. او در تعدادی از مثال‌ها $h^0(\Omega^1_F) = \dim H^0(\Omega^1_F)$ را محاسبه کرد، اقدامی که می‌تواند به عنوان نخستین گام برای شناسایی $h^0(\Omega^1_F)$ به عنوان ناوردای جبری-هندسی شاخص گونه‌ی حسابی محاسبه شود. تعبیر دقیق‌تر $h^0(\Omega^1_F)$ به عنوان نصف عدد بتی[۳۴] اول - که شروع حقیقی نظریه‌ی هاج است - توسط ریمان انجام پذیرفت.

در مورد ب، چیز که در بالا به عنوان اثبات قضیه‌ی آبل ارائه شد را می‌توان توسط دیاگرام شکل ۶ خلاصه کرد. که

$$I = \{(x,y,t) : f(x,y) = g(x,y,t) = 0\}$$

به عنوان وقوع تطابق است، و تابع

$$\omega \to \mathrm{d}\Big(\sum_i \int_{x_0}^{x_i(t)} \omega\Big)$$

در اثبات، که در نمادگذاری مدرن، نگاشت تریس[۳۵]

$$\omega \to (\pi_2)_*(\pi_1^*\omega)$$

است، که ۱-فرم گویای روی F را به ۱-فرمی گویا روی $\mathbb{P}^1$ می‌برد.

---

[۲۷] genus
[۲۸] arithemetic genus
[۲۹] singular
[۳۰] Jacobi
[۳۱] Riemann
[۳۲] Hodge theory
[۳۳] correspondence
[۳۴] Betti number
[۳۵] trace

تشکر و قدردانی

با تشکر از استاد بزرگوار، دکتر علیرضا بحرینی برای معرفی [۱]، و آقای خشایار فیُلم که در ویرایش این مقاله ما را همراهی کردند.

مراجع

[1] Phillip Griffiths, *The Lagacy of Abel in Algebraic Geometry*.

دیفرانسیل‌های آبلی

ترجمه‌ی ابوالفضل طاهری

چکیده

هدف اصلی ما ساخت توابع روی رویه‌های ریمان فشرده با تعیین خصوصیات تحلیلی آن‌ها می‌باشد (به عنوان مثلا توابع مرومورفیک با نقاط تکین مشخص شده). در اینجا می‌خواهیم در مورد این مساله صحبت کنیم. با توصیف دیفرانسیل‌های مرومورفیک شروع می‌کنیم که ساده‌تر از بررسی توابع کلی است و ابزار بنیادی برای بررسی و ساخت توابع نیز محسوب می‌شود.

در مقاله‌ی «میراث آبل در هندسه‌ی جبری»، کارهایی که آبل برای حل برخی انتگرال‌ها انجام داد، و برخی از نتایج آن را می‌بینیم. در این مقاله که ترجمه‌ی فصل ۴ از [۱] است، با صورت مدرن فرم‌های آبلی و انتگرال‌های آبلی آشنا می‌شویم.

۱ فرم‌های دیفرانسیل و فرمول‌های انتگرال

ابتدا مقدمات نظریه‌ی انتگرال روی منیفلدهای هموار ۲-بعدی را با استفاده از نمادگذاری مختلط بیان می‌کنیم.

فرض کنید $\mathcal{R}$ یک منیفلد باشد و

$$z : U \subset \mathcal{R} \to V \subset \mathbb{C}$$

یک نگاشت نقشه[۱] باشد. نگاشت تغییر مختصات[۲] $\tilde{z}(z,\bar{z})$ برای دو نگاشت نقشه با $U \cap \tilde{U} = \emptyset$، تعریف می‌شود:

$$\tilde{z}oz^{-1} : z(U \cap \tilde{U}) \to \tilde{z}(U \cap \tilde{U})$$

این نگاشت با فرض هموار بودن z و $\tilde{z}$ هموار است.

اگر برای هر نقشه روی $\mathcal{R}$ توابع مقدار مختلط $f(z,\bar{z})$، $p(z,\bar{z})$، $q(z,\bar{z})$ و $s(z,\bar{z})$ را اختصاص دهیم، به طوری که:

$$f = f(z,\bar{z}) \tag{1}$$

$$\omega = p(z,\bar{z})\mathrm{d}z + q(z,\bar{z})\mathrm{d}\bar{z} \tag{2}$$

$$S = s(z,\bar{z})\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z} \tag{3}$$

تحت تغییر مختصات ثابت باشند، در این صورت f یک تابع (۰-فرم)، ω دیفرانسیل (۱-فرم) و S یک ۲-فرم روی $\mathcal{R}$ است. داریم:

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\mathrm{d}y \ \ , \ \ \mathrm{d}\bar{z} = \mathrm{d}x - i\mathrm{d}y$$

بنابراین می‌توان ω و S را بر حسب مختصات حقیقی x, y نوشت. ضرب خارجی دو ۱-فرم ω_1, ω_2، یک ۲-فرم به شکل زیر می‌دهد:

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = (p_1 q_2 - p_2 q_1)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}$$

[۱] Local parameter
[۲] Transition function

اگر قرار دهیم

$$\omega^{(1,0)} = p(z,\bar z)\mathrm{d}z, \omega^{(0,1)} = q(z,\bar z)\mathrm{d}\bar z$$

در این صورت $\omega^{(1,0)}, \omega^{(0,1)}$ مستقل از انتخاب مختصات موضعی هلومورفیک هستند و بنابراین دیفرانسیل‌ها سرتاسری روی $\mathcal{R}$ تعریف می‌شوند. ۱-فرم ω را از نوع $(1,0)$ (معادلا از نوع $(0,1)$) می‌گوییم اگر و تنها اگر به صورت موضعی به شکل $\omega = p\mathrm{d}z$ ($\omega = q\mathrm{d}\bar z$) باشد. به عبارتی بخش $(0,1)$ ($(1,0)$) آن ثابت است.فضای دیفرانسیل‌ها به وضوح جمع مستقیم زیرفضاهای $\omega^{(1,0)}$ و $\omega^{(0,1)}$ است.

حال می‌توانیم انتگرال را تعریف کنیم:

۱. انتگرال ۰-فرم‌ها روی ۰-زنجیرها، مجموعه‌ای متناهی از نقاط $\mathcal{R}$ مانند $\{P_\alpha\}_\alpha$؛
$$\sum_\alpha f(P_\alpha)$$

۲. انتگرال ۱-فرم‌ها روی ۱-زنجیرها (مسیرها، خم‌های هموار جهت‌پذیر و اجتماع متناهی از آن‌ها)؛
$$\int_\gamma \omega$$

۳. انتگرال ۲-فرم‌ها روی ۲-زنجیرها، اجتماع متناهی از دامنه‌ها؛
$$\int_D S$$

اگر $\gamma : [0,1] \to U$ و $D \subset U$ درون یک دیسک مختصاتی باشند، انتگرال‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int_\gamma \omega = \int_0^1 (p(z(\gamma(t)), \overline{z(\gamma(t))})\frac{\mathrm{d}z(\gamma)}{\mathrm{d}t} + q(z(\gamma(t)), \overline{z(\gamma(t))})\overline{\frac{\mathrm{d}z(\gamma)}{\mathrm{d}t}})\mathrm{d}t$$

$$\int_D S = \int_D s(z,\bar z)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar z$$

با توجه به ثابت بودن فرم‌ها تحت تغییر مختصات، انتگرال‌های فوق خوش تعریف است.

عملگر دیفرانسیل d، یک k-فرم را به یک $k+1$-فرم می‌برد و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{d}f = f_z\mathrm{d}z + f_{\bar z}\mathrm{d}\bar z \tag{۴}$$

$$\mathrm{d}\omega = (q_z - p_{\bar z})\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar z \tag{۵}$$

$$\mathrm{d}S = 0 \tag{۶}$$

تعریف ۱. *k-فرم ω را دقیق می‌گوییم اگر به صورت دیفرانسیل یک $k-1$-فرم باشد یعنی $\omega = \mathrm{d}f$، و آن را بسته می‌گوییم اگر $\mathrm{d}\omega = 0$.*

داریم $\mathrm{d}^2 = 0$، بنابراین فرم‌های دقیق زیرمجموعه‌ی فرم‌های بسته است. یکی از مهمترین خصوصیات d در قضیه‌ی استوکس مطرح می‌شود.

قضیه ۲. (*استوکس*[۳]) *فرض کنید D یک ۲-زنجیر با مرز قطعه‌ای هموار ∂D باشد. در این صورت برای هر فرم دیفرانسیل ω داریم:*

$$\int_D \mathrm{d}\omega = \int_{\partial D} \omega$$

یکی از کاربردهای مهم قضیه‌ی استوکس در ۱-فرم‌ها مطرح است. فرض کنید γ_{PQ} خمی باشد که P را به Q وصل می‌کند. چه موقع $\int_{\gamma_{PQ}} \omega$ تنها به نقاط P و Q وابسته است و مستقل از مسیر انتگرال‌گیری است؟

[۳] Stokes

نتیجه ۳. *فرم دیفرانسیل ω بسته است اگر وتنها اگر برای هر دو خم متجانس[۴]، γ و $\tilde{\gamma}$ داشته باشیم:*
$$\int_\gamma \omega = \int_{\tilde{\gamma}} \omega$$

اثبات. تفاضل فرم‌های متجانس γ و $\tilde{\gamma}$ مرز دامنه‌ای مانند D است. بنابراین داریم:
$$\int_\gamma \omega - \int_{\tilde{\gamma}} \omega = \int_{\partial D} \omega = \int_D \mathrm{d}\omega = ۰$$
و این حکم را نتیجه می‌دهد. □

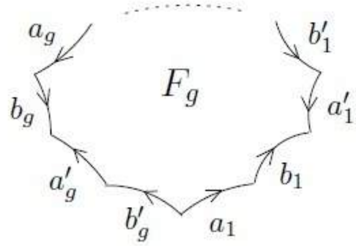
نتیجه ۴. *فرض کنید ω فرم دیفرانسیل بسته باشد و F_g مدل همبند ساده از رویه‌ی ریمانی با g گونه[۵] باشد و $P_۰$ نقطه‌ای در F_g باشد. در این صورت تابع*
$$f(P) = \int_{P_۰}^{P} \omega \ \ , \ \ P \in F_g$$
به طوری که مسیر انتگرال‌گیری به تمامی در F_g است، روی F_g خوش‌تعریف است.

به سادگی می‌توان دید:
$$d(\int_{P_۰}^{P} \omega) = \omega(P)$$
فرض کنید $\gamma_۱, \ldots, \gamma_n$ یک پایه برای همولوژی روی $\mathcal{R}$ باشد و ω یک دیفرانسیل بسته باشد. تناوب‌های ω را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:
$$\Lambda_i = \int_{\gamma_i} \omega$$
هر خم بسته γ روی $\mathcal{R}$ متجانس است با خمی به شکل $\sum n_i\gamma_i$ که $n_i \in \mathbb{Z}$، و این نتیجه می‌دهد:
$$\int_\gamma \omega = \sum n_i \Lambda_i$$
بنابراین Λ_iها شبکه‌ی تناوب‌های ω را تولید می‌کنند. به طور خلاصه اگر $\mathcal{R}$ رویه‌ی ریمانی با g گونه باشد و پایه‌ی فرمال برای همولوژی آن $a_۱, b_۱, \ldots, a_g, b_g$ باشد، متناظر با آن‌ها تناوب‌های زیر را تعریف می‌کنیم:
$$A_i = \int_{a_i} \omega \ \ , \ \ B = \int_{b_i} \omega$$

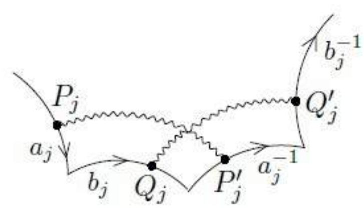
قضیه ۵. **(تساوی دوخطی ریمان[۶])** *فرض کنید $\mathcal{R}$ یک رویه‌ی ریمانی با g گونه باشد و a_i, b_i، $i = ۱, \ldots, g$، پایه‌ی فرمال برای همولوژی آن باشد، همچنین F_g مدل همبند ساده‌ی آن باشد. فرض کنید ω, ω' دو دیفرانسیل بسته روی $\mathcal{R}$ باشند و A_i, B_i, A'_i, B'_i تناوب‌های متناظر با آن‌ها باشد. در این صورت*
$$\int_{\mathcal{R}} \omega \wedge \omega' = \int_{\partial F_g} \omega'(P) \int_{P_۰}^{P} \omega = \sum_{j=۱}^{g} (A_j B'_j - A'_j B_j) \qquad (۷)$$
که $P_۰$ نقطه‌ای از F_g است و مسیر انتگرال، $[P_۰, P]$ در F_g قرار دارد.

اثبات. رویه‌ی ریمانی $\mathcal{R}$ را در امتداد تمام حلقه‌های a_i, b_i، $i = ۱, \ldots, g$، برش دهید تا دامنه‌ی همبند ساده‌ی F_g با مرز
$$\partial F_g = \sum_{i=۱}^{g} a_i + a_i^{-۱} + b_i + b_i^{-۱}$$

[۴] Homological
[۵] genus
[۶] Riemann's bilinear identity



شکل ۱: مدل همبند ساده از رویه‌ی ریمان $\mathcal{R}$



شکل ۲: اثبات تساوی دوخطی ریمان

بدست آید. اولین تساوی (۷) مستقیما از قضیه‌ی استوکس با $D = F_g$ و نتیجه‌ی ۴، حاصل می‌شود.

خم‌های a_j و a_j^{-1} روی مرز F_g در $\mathcal{R}$ مساوی‌اند اما جهت مخالف دارند. برای نقاط P_j و P_j' که به ترتیب روی a_j و a_j^{-1} هستند و در $\mathcal{R}$ یکی هستند داریم:

$$\omega'(P_j) = \omega'(P_j')$$

$$\int_{P_0}^{P_j} \omega - \int_{P_0}^{P_j'} \omega = \int_{P_j'}^{P_j} \omega = -B_j \tag{۸}$$

به همین ترتیب برای نقاط $Q_j \in b_j$ و $Q_j' \in b_j^{-1}$ داریم:

$$\omega'(Q_j) = \omega'(Q_j')$$

$$\int_{P_0}^{Q_j} \omega - \int_{P_0}^{Q_j'} \omega = \int_{Q_j'}^{Q_j} \omega = A_j \tag{۹}$$

با جایگذاری داریم:

$$\int_{\partial F_g} \omega'(P) \int_{P_0}^{P} \omega = \sum_{j=1}^{g} (-B_j \int_{a_j} \omega' + A_j \int_{b_j} \omega') =$$

$$= \sum_{j=1}^{g} (A_j B_j' - A_j' B_j)$$

در نهایت برای اثبات قضیه برای یک پایه‌ی فرمال دلخواه برای $H_1(\mathcal{R}, \mathbb{C})$، مستقیما بررسی کرد که سمت راست تساوی (۷) تحت نگاشت‌های تغییر مختصات ثابت است. $\square$

۲ دیفرانسیل‌های آبلی نوع اول، دوم و سوم

فرض کنید $\mathcal{R}$ یک رویه‌ی ریمانی باشد. در این صورت نگاشت‌های تغییر مختصات هلومورفیک است و می‌توانیم دیفرانسیل‌های خاصی را روی $\mathcal{R}$ در نظر بگیریم.

تعریف ۶. *دیفرانسیل ω روی رویه‌ی ریمانی $\mathcal{R}$ را هلومورفیک (یا فرم دیفرانسیل آبلی نوع اول) می‌گوییم اگر برای هر نقشه‌ی موضعی، قابل نمایش به صورت*

$$\omega = h(z)\mathrm{d}z$$

باشد که در آن $h(z)$ تابعی هلومورفیک است. دیفرانسیل $\bar{\omega}$ را پادهلومورفیک[۷] می‌گوییم.

طبق تعریف دیفرانسیل‌های هلومورفیک و پادهلومورفیک بسته‌اند.

فرم‌های دیفرانسیل هلومورفیک را به عنوان یک فضای برداری مختلط با $H^{1}(\mathcal{R},\mathbb{C})$ نمایش می‌دهیم. در ادامه می‌خواهیم بدانیم بعد این فضا چگونه است؟

لم ۷. *فرض کنید ω یک فرم دیفرانسیل هلومورفیک ناصفر روی $\mathcal{R}$ باشد. در این صورت تناوب‌های A_j و B_j از آن دارای این خاصیت است که:*

$$Im(\sum_{j=1}^{g} A_j\bar{B}_j) < 0$$

اثبات. تناوب‌های $\bar{\omega}$ عبارتند از $\bar{A}_j, \bar{B}_j$. حال قضیه‌ی دوخطی ریمان را در مورد ω و $\bar{\omega}$ به کار می‌بریم و با استفاده از

$$i\omega \wedge \bar{\omega} = i \mid h \mid^{2} \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z} = 2 \mid h \mid^{2} \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y > 0$$

حکم نتیجه می‌شود. □

نتیجه ۸. *اگر تمام a-تناوب‌های دیفرانسیل هلومورفیک ω صفر باشد، یعنی*

$$\int_{a_j} \omega = 0, \quad j = 1, \dots, g$$

در این صورت $\omega \equiv 0$.

نتیجه ۹. *اگر تمام تناوب‌های دیفرانسیل هلومورفیک ω حقیقی باشد، آنگاه $\omega \equiv 0$.*

نتیجه ۱۰. $\dim(H^{1}(\mathcal{R},\mathbb{C})) \leq g$.

اثبات. اگر $\omega_1, \dots, \omega_{g+1}$ هلومورفیک باشند، در این صورت ترکیب خطی از آن‌ها به شکل $\sum_{i=1}^{g+1}\alpha_i\omega_i$ وجود دارد که تمام a-تناوب‌های آن صفر است. حال بنابر نتیجه ۸ داریم:

$$\sum_{i=1}^{g+1}\alpha_i\omega_i \equiv 0$$

بنابراین $\omega_1, \dots, \omega_{g+1}$ وابسته‌ی خطی‌اند. پس $\dim(H^{1}(\mathcal{R},\mathbb{C})) \leq g$. □

قضیه ۱۱. *بعد فضای دیفرانسیل‌های هلومورفیک از یک رویه‌ی ریمانی فشرده برابر است با تعداد گونه‌های آن، یعنی داریم:*

$$\dim(H^{1}(\mathcal{R},\mathbb{C})) = g(\mathcal{R})$$

اثبات این قضیه را در بخش‌های بعدی می‌آوریم. هنگامی که رویه‌ی ریمانی $\mathcal{R}$ مشخصا توصیف شده باشد، معمولا می‌توانیم پایه‌ی $\omega_1, \dots, \omega_g$ از دیفرانسیل‌های هلومورفیک را برای آن صریحا بیان کنیم.

[۷] anti-holomorphic

قضیه ۱۲. *دیفرانسیل‌های*

$$\omega_j = \frac{\lambda^{j-1}\mathrm{d}\lambda}{\mu}, \quad j = 1, \ldots, g$$

یک پایه از دیفرانسیل‌های هولومورفیک برای رویه‌ی ریمانی ابربیضوی

$$\mu^2 = \prod_{i=1}^{N}(\lambda - \lambda_i) \quad \lambda_i \neq \lambda_j$$

است که در آن $N = 2g + 1$ *یا* $N = 2g + 2$.

تعریف ۱۳. *فرض کنید* a_j, b_j*،* $j = 1, \ldots, g$*، پایه‌های فرمال برای* $H_1(\mathcal{R}, \mathbb{Z})$ *باشند. پایه‌ی دوگان از دیفرانسیل‌های هولومورفیک* ω_k*،* $k = 1, \ldots, g$ *که به وسیله‌ی*

$$\int_{a_j} \omega_k = 2\pi i \delta_{jk}$$

نرمال می‌شود، فرمال می‌گوییم.

تا اینجا بحث در مورد دیفرانسیل‌های هولومورفیک بود، می‌خواهیم در مورد دیفرانسیل‌های با نقاط تکین نیز صحبت کنیم.

تعریف ۱۴. *دیفرانسیل* Ω *را مرومورفیک یا دیفرانسیل آبلی می‌گوییم اگر در هر نقشه‌ی موضعی* $z : U \to \mathbb{C}$ *به شکل*

$$\Omega = g(z)\mathrm{d}z$$

باشد که $g(z)$ *تابعی مرومورفیک است. انتگرال* $\int_{P_0}^{P} \Omega$ *از یک دیفرانسیل مرومورفیک را انتگرال آبلی می‌گویند.*

فرض کنید z یک مختصات موضعی در نقطه‌ی P باشد و $z(P) = 0$. همچنین

$$\Omega = \sum_{k=N(P)}^{\infty} g_k z^k \mathrm{d}z$$

نمایش دیفرانسیل Ω در P باشد. اعداد $N(P)$ و g_{-1} به انتخاب مختصات موضعی بستگی ندارد و تنها وابسته به Ω هستند. $N(P)$ را مرتبه‌ی نقطه‌ی P می‌گوییم. اگر $N(P)$ منفی باشد، $-N(P)$ را مرتبه‌ی قطب Ω در P می‌گوییم. ضریب g_{-1} را باقیمانده‌ی[8] Ω در P می‌نامیم. این عدد به شکل زیر نیز قابل تعریف است:

$$res_P\Omega \equiv g_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \Omega$$

که γ یک خم ساده‌ی بسته حول P در جهت مثبت است.

فرض کنید S مجموعه نقاط تکین Ω، یعنی

$$S = \{P \in \mathcal{R} \mid N(P) < 0\}$$

باشد. مجموعه‌ی S گسسته است و اگر $\mathcal{R}$ فشرده باشد، S متناهی است.

لم ۱۵. *فرض کنید* Ω *یک دیفرانسیل آبلی روی رویه‌ی ریمانی فشرده‌ی* $\mathcal{R}$ *باشد. در این صورت*

$$\sum_{P_j \in S} res_{P_j}\Omega = 0$$

که S *مجموعه‌ی نقاط تکین* Ω *است.*

[8] Residue

اثبات. با استفاده از مدل همبند ساده‌ی F_g از $\mathcal{R}$ و تعریف انتگرالی معادل با $res_{P_j}\Omega$ داریم:

$$\sum_{P_j\in S} res_{P_j}\Omega = \frac{1}{2\pi i}\sum_j \int_{\gamma_j}\Omega = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial F}\Omega = 0$$

در اینجا از اینکه Ω روی $\mathcal{R}\backslash S$ هلومورفیک است و معادله

$$\partial F_g = \sum_{i=1}^{g} a_i + a_i^{-1} + b_i + b_i^{-1}$$

استفاده کردیم. $\square$

تعریف ۱۶. *یک دیفرانسیل مرومورفیک با نقاط تکین را دیفرانسیل آبلی از نوع دوم می‌گوییم اگر باقی‌مانده تمام نقاط تکین آن صفر باشد. یک دیفرانسیل مرومورفیک با باقی‌مانده ناصفر را دیفرانسیل آبلی از نوع سوم می‌گوییم.*

لم ۱۵ انگیزه‌ی انتخاب دیفرانسیل‌های مرومورفیک خاصی را به ما می‌دهد. دیفرانسیل نوع دوم $\Omega_R^{(N)}$ که تنها در نقطه‌ی $R\in\mathcal{R}$ نقطه‌ی تکین به شکل زیر دارد:

$$\Omega_R^{(N)} = (\frac{1}{z^{N+1}} + O(1))\mathrm{d}z \tag{10}$$

که در آن z مختصات موضعی در R با $z(R)=0$ است. دیفرانسیل آبلی نوع سوم Ω_{RQ} دو نقطه‌ی تکین در R,Q به شکل زیر دارد:

$$res_R\Omega_{RQ} = -res_Q\Omega_{RQ} = 1$$

بنابراین نزدیک R داریم:

$$\Omega_{RQ} = (\frac{1}{z_R} + O(1))\mathrm{d}z_R \tag{11}$$

و در نزدیکی Q داریم:

$$\Omega_{RQ} = (-\frac{1}{z_Q} + O(1))\mathrm{d}z_Q \tag{12}$$

که z_Q, z_R مختصات موضعی در R و Q با $z_R(R)=z_Q(Q)=0$ است. برای انتگرال‌های آبلی معادل نتیجه می‌شود:

$$\int^P \Omega_R^{(N)} = -\frac{1}{Nz^N} + O(1)\ \ P\to R \tag{13}$$

$$\int^P \Omega_{RQ} = \log z_R + O(1)\ \ P\to R \tag{14}$$

$$\int^P \Omega_{RQ} = -\log z_Q + O(1)\ \ P\to Q \tag{15}$$

انتگرال‌های آبلی نوع اول و دوم روی F_g تک مقداری[۹] است. انتگرال آبلی نوع سوم Ω_{RQ} روی $F_g\backslash[R,Q]$ تک مقداری است که در آن $[R,Q]$ برش از R به Q واقع در F_g است.

دیفرانسیل آبلی نوع دوم $\Omega_R^{(N)}$ وابسته به انتخاب مختصات موضعی z است.

می‌توانیم دیفرانسیل‌های آبلی نوع اول را به $\Omega_R^{(N)}$ و Ω_{RQ} با حفظ نقاط تکین اضافه کنیم. در واقع ترکیب خطی سره $\sum_{i=1}^{g}\alpha_i\omega_i$ را می‌توانیم به شکل زیر نرمال کنیم:

$$\int_{a_j}\Omega_R^{(N)} = 0\ \ ,\ \ \int_{a_j}\Omega_{RQ} = 0\ \ ,\ \ j=1,\dots,g \tag{16}$$

تعریف ۱۷. *دیفرانسیل‌های $\Omega_R^{(N)}$ و Ω_{RQ} با نقاط تکین تعریف شده در (۱۰)، (۱۱) و (۱۲) و تمام a-تناوب‌های صفر، معادله‌ی (۱۶)، دیفرانسیل آبلی نرمال شده‌ی نوع دوم و سوم می‌نامیم.*

[۹] Single-Valued

قضیه ۱۸. *رویه‌ی ریمان فشرده‌ی $\mathcal{R}$ با پایه‌ی استاندارد از حلقه‌های $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$، نقاط $P, Q \in \mathcal{R}$، مختصات موضعی z در $\mathcal{R}$ و $N \in \mathbb{N}$ داده شده است. در این صورت دیفرانسیل آبلی نرمال از نوع دوم $\Omega_R^{(N)}$ و نوع سوم Ω_{RQ} به صورت یکتا وجود دارد.*

وجود این نوع فرم‌ها را در بخش‌های بعدی ثابت می‌کنیم اما اثبات یکتایی آن ساده است. تفاضل هلومورفیک دو دیفرانسیل نرمال با نقاط تکین یکسان، دارای a-تناوب‌های صفر است و بنابراین دیفرانسیل صفر است و این یکتایی را نتیجه می‌دهد.

بنا به نتیجه‌ی ۹ دیفرانسیل‌های آبلی از نوع دوم و سوم می‌تواند نسبت به (۱۶) متقارن‌تر نرمال شود. تمام تناوب‌ها را می‌توان به صورت موهومی نرمال کرد:

$$Re \int_\gamma \Omega = 0, \quad \forall \gamma \in H_1(\mathcal{R}, \mathbb{Z})$$

نتیجه ۱۹. *دیفرانسیل‌های آبلی نرمال شده یک پایه برای فضای دیفرانسیل‌های آبلی روی $\mathcal{R}$ است.*

۳ تناوب‌های دیفرانسیل‌های آبلی. واریته ژاکوبی

تعریف ۲۰. *فرض کنید a_j, b_j، $j = 1, \ldots, g$ پایه‌ی استاندارد برای همولوژی $\mathcal{R}$ باشد و ω_k، $k = 1, \ldots, g$، پایه‌ی دوگان متناظر برای $H^1(\mathcal{R}, \mathbb{C})$ باشد. ماتریس*

$$B_{ij} = \int_{b_i} \omega_j$$

را ماتریس متناوب $\mathcal{R}$ می‌گویند.

قضیه ۲۱. *ماتریس متناوب، متقارن است و بخش حقیقی آن منفی است، یعنی:*

$$B_{ij} = B_{ji}$$

$$Re(B\alpha, \alpha) < 0, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^g \backslash \{0\}$$

اثبات. برای اثبات قسمت اول، دیفرانسیل‌های هلومورفیک نرمال، $\omega = \omega_i$ و $\omega' = \omega_j$ را در قضیه‌ی دوخطی ریمان جایگذاری کنید. صفر بودن سمت چپ، $\omega_i \wedge \omega_j \equiv 0$، حکم اول را نتیجه می‌دهد. برای قسمت دوم، لم ۷ با $\omega = \sum \alpha_k \omega_k$ نتیجه می‌دهد:

$$0 > Im \sum_{j=1}^{g} A_j \bar{B}_j = Im(\sum_{j=1}^{g} 2\pi i \alpha_j \sum_{k=1}^{g} B_{jk}\alpha_k) = 2\pi Re(B\alpha, \alpha)$$

□

ماتریس متناوب به پایه‌ی همولوژی وابسته است. از نمادگذاری زیر استفاده می‌کنیم تا در ادامه این وابستگی را بررسی کنیم:

$$\begin{pmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix} \in Sp(g, \mathbb{Z}) \tag{۱۷}$$

لم ۲۲. *ماتریس متناوب B و $\tilde{B}$ از رویه‌ی ریمانی R متناظر با پایه‌های همولوژی (a, b) و $(\tilde{a}, \tilde{b})$ با معادله‌ی زیر در ارتباط هستند:*

$$\tilde{B} = 2\pi i(\mathrm{D}B + 2\pi i\mathrm{C})(\mathrm{B}B + 2\pi i\mathrm{A})^{-1}$$

که در آن $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$ ضرایب ماتریس سمپلیتیک[10] است.

[10] Symplectic

اثبات. فرض کنید $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_g)$ پایه‌ی استاندارد دوگان نسبت به (a, b) از دیفرانسیل‌های هلومورفیک باشد. ستون‌های ماتریس را با دیفرانسیل‌ها و سطرهای آن را با دورها برچسب‌گذاری می‌کنیم. داریم:

$$\int_{\tilde{a}} \omega = 2\pi i \mathrm{A} + \mathrm{B}B \ , \quad \int_{\tilde{b}} \omega = 2\pi i \mathrm{C} + \mathrm{D}B$$

پایه‌ی فرمال $H^1(\mathcal{R}, \mathbb{C})$ دوگان نسبت به پایه‌ی $(\tilde{a}, \tilde{b})$ توسط ضرب از راست بدست می‌آید:

$$\tilde{\omega} = 2\pi i \omega (2\pi i \mathrm{A} + \mathrm{B}B)^{-1}$$

برای ماتریس متناوب این نتیجه می‌دهد:

$$\tilde{B} = \int_{\tilde{B}} \tilde{\omega} = (2\pi i \mathrm{C} + \mathrm{D}B) 2\pi i (2\pi i \mathrm{A} + \mathrm{B}B)^{-1}$$

□

با استفاده از تساوی دوخطی ریمان تناوب‌های فرمهای دیفرانسیل آبلی نرمال شده از نوع دوم و سوم را می‌توان به صورت بخش‌هایی از دیفرانسیل‌های هلومورفیک نرمال شده بیان کرد.

لم ۲۳. *فرض کنید ω_j، $\Omega_R^{(N)}$ و Ω_{RQ} فرم‌های دیفرانسیل آبلی نرمال شده در تعریف ۱۷ باشند. همچنین z مختصات موضعی در R با $z(R) = 0$ باشد و*

$$\omega_j = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{k,j} z^k \mathrm{d}z \quad P \sim R \tag{18}$$

نمایش دیفرانسیل هلومورفیک نرمال در R باشد. در این صورت تناوب‌های $\Omega_R^{(N)}$ و Ω_{RQ} برابر است با:

$$\int_{b_j} \Omega_R^{(N)} = \frac{1}{N} \alpha_{N-1,j} \tag{19}$$

$$\int_{b_j} \Omega_{RQ} = \int_R^Q \omega_j \tag{20}$$

که مسیر انتگرال $[R, Q]$ در (۱۹) خم‌های a و b را قطع نمی‌کند.

اثبات. در قضیه‌ی دوخطی ریمان قرار دهید $\omega = \Omega_R^{(N)}$ و $\omega' = \omega_j$. حال انتگرال:

$$\int_{\partial F_g} \omega_j(P) \int^P \Omega_R^{(N)}$$

به کمک باقیمانده‌ها قابل محاسبه است. تابع زیر انتگرال یک تابع مرومورفیک روی F_g با یک نقطه‌ی تکین در نقطه‌ی R است. از ضرب معادلات (۱۳) و (۱۸) داریم:

$$res_R \omega_j(P) \int^P \Omega_R^{(N)} = -\frac{1}{N} \alpha_{N-1,j}$$

در سمت راست تساوی ریمان تنها قسمت شامل $A'_j = 2\pi i$ غیرثابت است که این (۱۹) را نتیجه می‌دهد. با محاسبات مشابه برای $\omega = \omega_j$ و $\omega' = \Omega_{RQ}$ ثابت می‌شود:

$$\int_{\partial F_g} \Omega_{RQ}(P) \int_{P_0}^P \omega_j = 2\pi i (\int_{P_0}^R - \int_{P_0}^Q \omega_j) = 2\pi i \int_Q^R \omega_j = 2\pi i \int_{b_j} \Omega_{RQ}$$

□

در انتهای این بخش دو نمادگذاری را معرفی می‌کنیم که نقش اساسی در مطالعه توابع روی رویه‌های ریمان فشرده دارند.
فرض کنید Λ یک شبکه به شکل

$$\Lambda = \{2\pi i N + BM, \quad N, M \in \mathbb{Z}^g\}$$

تولید شده توسط تناوب‌های $\mathcal{R}$ باشد. این شبکه یک هم‌ارزی روی $\mathbb{C}^g$ تعریف می‌کند. دو نقطه‌ی $\mathbb{C}^g$ را هم‌ارز می‌گوییم اگر تفاوتشان معادل یک عضو از Λ باشد.

تعریف ۲۴. *چنبره‌ی مختلط*[۱۱]

$$Jac(\mathcal{R}) = \mathbb{C}^g/\Lambda$$

را واریته‌ی ژاکوبی[۱۲] *(ژاکوبین*[۱۳]*) از $\mathcal{R}$ می‌گویند.*

تعریف ۲۵. *نگاشت*

$$\mathcal{A} : \mathcal{R} \to Jac(\mathcal{R}), \quad \mathcal{A}(P) = \int_{P_0}^{P} \omega$$

که در آن $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_g)$ پایه‌ی فرمال از دیفرانسیل‌های هلومورفیک است و $P_0 \in \mathcal{R}$، را نگاشت آبل[۱۴] *می‌گویند.*

۴ دیفرانسیل‌های هارمونیک و اثبات قضایای وجودی

توجه کنید که زاویه‌ی بین بردارهای مماس روی رویه‌های ریمان خوش‌تعریف است. بنابراین می‌توانیم فضای مماس را به اندازه‌ی $\frac{\pi}{2}$ دوران دهیم. نگاشت القا شده از این دوران بر روی دیفرانسیل‌ها را عملگر مزدوج[۱۵] می‌گویند.

$$\omega = f\mathrm{d}z + g\mathrm{d}\bar{z} \mapsto *\omega = -if\mathrm{d}z + ig\mathrm{d}\bar{z}$$

به وضوح $-1 = **$. با استفاده از عملگر مزدوج، دیفرانسیل‌های نوع $(1,0)$ ($(0,1)$) را می‌توان با خاصیت $*\omega = -i\omega$ ($*\omega = i\omega$) مشخص کرد.

فرض کنید $\mathcal{R}$ یک رویه‌ی ریمانی باشد. فضای هیلبرت $L_2(\mathcal{R})$ از دیفرانسیل‌های مربعی انتگرال‌پذیر[۱۶] با ضرب داخلی

$$(\omega_1, \omega_2) = \int_{\mathcal{R}} \omega_1 \wedge *\bar{\omega}_2 \tag{۲۱}$$

را در نظر بگیرید. در مختصات موضعی $z : U \subset \mathcal{R} \to V \subset \mathbb{C}$، داریم:

$$\int_U \omega_1 \wedge *\bar{\omega}_2 = 2\int_V (f_1\bar{f}_2 + g_1\bar{g}_2)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

به سادگی دیده می‌شود که فرمول (۲۱) یک ضرب داخلی هرمیتی[۱۷] تعریف می‌کند، یعنی:

$$(\omega_2, \omega_1) = \overline{(\omega_1, \omega_2)}$$

$$(\omega, \omega) \geq 0 \; and \; (\omega, \omega) = 0 \iff \omega = 0$$

زیرفضاهای E و E^* از دیفرانسیل‌های دقیق و کودقیق[۱۸] را به صورت زیر داریم:

$$E = \overline{\{\mathrm{d}f \mid f \in C_0^\infty(\mathcal{R})\}}$$

$$E^* = \overline{\{*\mathrm{d}f \mid f \in C_0^\infty(\mathcal{R})\}}$$

که C_0^∞ فضای توابع هموار روی $\mathcal{R}$ با دامنه‌ی فشرده و علامت بار به معنی بستار در $L_2(\mathcal{R})$ است. زیرفضای عمود $E^\perp, E^{*\perp}$ را در نظر بگیرید و تعریف کنید:

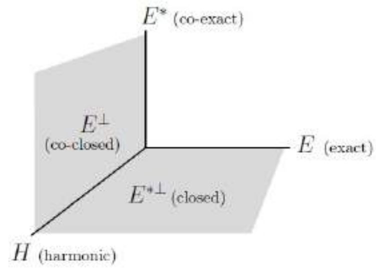
$$H := E^\perp \cap E^{*\perp}$$

توجه داشته باشید که E و E^* عمودند. کافی است برای دیفرانسیل‌های C^∞، دقیق و کودقیق بررسی کنیم:

$$(\mathrm{d}f, *\mathrm{d}g) = \int_{\mathcal{R}} \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}\bar{g} = \int_{\mathcal{R}} \bar{g}\mathrm{d}(\mathrm{d}f) = 0$$

---

[۱۱] Complex torus
[۱۲] Jacobi variety
[۱۳] Jacobian
[۱۴] Abel map
[۱۵] Conjugation Operator
[۱۶] square integrable function
[۱۷] Hermitian scalar product
[۱۸] Co-exact



شکل ۳: تجزیه‌ی متعامد $L_۲(\mathcal{R})$

که برای معادله‌ی فوق از قضیه‌ی استوکس برای توابع با دامنه‌ی فشرده و $\mathrm{d}^۲ = ۰$ استفاده کردیم. حال تجزیه‌ی متعامد[۱۹]

$$L_۲(\mathcal{R}) = E \oplus E^* \oplus H$$

را داریم که در شکل ۳ دیده می‌شود.

برای تفسیر این زیرفضاها باید دیفرانسیل‌های هموار را در نظر بگیریم. یک $C^۱$-دیفرانسیل α را بسته (کوبسته) می‌گوییم اگر وتنها اگر $\mathrm{d}\alpha = ۰$ ($\mathrm{d} * \alpha = ۰$).

لم ۲۶. *فرض کنید* $\alpha \in L_۲(\mathcal{R})$، $C^۱$ *باشد. در این صورت* $\alpha \in E^\perp$ ($\alpha \in E^{*\perp}$) *اگر و تنها اگر* α *کوبسته (بسته) باشد.*

اثبات. مستقیما از قضیه‌ی استوکس $\alpha \in E^{*\perp}$ معادل است با

$$۰ = (\alpha, *\mathrm{d}f) = \int_{\mathcal{R}} \alpha \wedge \mathrm{d}\bar{f} = \int_{\mathcal{R}} \bar{f}\mathrm{d}\alpha$$

برای $f \in C_۰^\infty(\mathcal{R})$ دلخواه. این نتیجه می‌دهد $\mathrm{d}\alpha = ۰$. □

نتیجه ۲۷. *فرض کنید* $\alpha \in H$، $C^۱$ *باشد. در این صورت به صورت موضعی داریم:*

$$\alpha = f\mathrm{d}z + g\mathrm{d}\bar{z}$$

که f *یک تابع هلومورفیک و* g *پادهلومورفیک است.*

تعریف ۲۸. *دیفرانسیل* h *را هارمونیک*[۲۰] *می‌گوییم اگر به صورت موضعی* ($z : U \subset \mathcal{R} \to V \subset \mathbb{C}$) *به شکل*

$$h = \mathrm{d}H$$

باشد که $H \in C^\infty(V)$ *تابعی هارمونیک است یعنی* $\frac{\partial^۲}{\partial z \partial \bar{z}} H = ۰$.

دیفرانسیل‌های هارمونیک و هلومورفیک رابطه‌ی نزدیک دارند که در لم زیر می‌بینیم:

لم ۲۹. *دیفرانسیل* h *هارمونیک است اگر و تنها اگر به شکل*

$$h = \omega_۱ + \bar{\omega}_۲ \quad (۲۲)$$

باشد که $\omega_۱, \omega_۲$ *هلومورفیک هستند. دیفرانسیل* ω *هلومورفیک است اگر و تنها اگر به شکل*

$$\omega = h + i * h \quad (۲۳)$$

باشد که h *هارمونیک است.*

[۱۹] Orthogonal decomposition
[۲۰] Harmonic

اثبات. فرض کنید h هارمونیک باشد و به صورت موضعی به شکل $h = \mathrm{d}H$ باشد. چون $H_{z\bar{z}} = ۰$، دیفرانسیل $H_z\mathrm{d}z$ هلومورفیک و دیفرانسیل $H_{\bar{z}}\mathrm{d}\bar{z}$ پادهلومورفیک است. برعکس، فرض کنید $h = f\mathrm{d}z + g\mathrm{d}\bar{z}$ که f هلومورفیک و g پادهلومورفیک است. در این صورت h را می‌توانیم به شکل $h = \mathrm{d}(F+G)$ بنویسیم که در آن تابع هلومورفیک F به صورت $F_z = f$ و تابع پادهلومورفیک G به صورت $G_{\bar{z}} = g$ تعریف می‌شود. تابع $F+G$ به وضوح هارمونیک است.

برای اثبات قسمت دوم لم، دقت کنید که h داده شده در (۲۲)، مجموع
$$h + i*h = ۲\omega_۱$$
همواره هلومورفیک است. برعکس، برای هلومورفیک داده شده‌ی ω،
$$h = \frac{\omega - \bar{\omega}}{۲}$$
دیفرانسیل هارمونیک است که در (۲۳) صدق می‌کند. □

برای اثبات قضیه‌ی بعدی نیاز به خصوصیات توابع هلومورفیک در فضای $L_۲$ داریم. لم زیر را برای این مسئله داریم.

لم ۳۰. *لم ویل*[۲۱]*: فرض کنید f تابعی مربعی انتگرال‌پذیر روی دیسک D باشد. در این صورت f هلومورفیک است اگر و تنها اگر*
$$\int_D f\eta_{\bar{z}}\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z} = ۰$$
برای هر $\eta \in C_۰^\infty(D)$، با دامنه‌ی فشرده.

قضیه ۳۱. *فضای H فضای دیفرانسیل‌های هارمونیک است.*

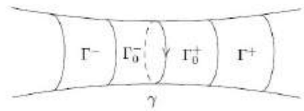
اثبات. دیفرانسیل هارمونیک h بسته، کوبسته و $C^۱$ است. لم ۲۶ نتیجه می‌دهد $h \in H$.

برعکس فرض کنید $\alpha \in H$. برای هر $\eta \in C_۰^\infty(\mathcal{R})$ داریم:
$$(\alpha, \mathrm{d}\eta) = (\alpha, *\mathrm{d}\eta) = ۰ \tag{۲۴}$$
مختصات موضعی $z : U \to V$ را در نظر بگیرید. برای $\alpha = f\mathrm{d}z + g\mathrm{d}\bar{z}$، فرمول (۲۴) نتیجه می‌دهد:
$$\int_V f\eta_{\bar{z}}\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z} = \int_V g\eta_z\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z} = ۰$$
برای هر $\eta \in C_۰^\infty(V)$. هلومورفیک بودن f و $\bar{g}$ از لم ویل نتیجه می‌شود و لم ۲۹ اثبات را کامل می‌کند. □

نتیجه ۳۲. *هر دیفرانسیل مربعی انتگرال‌پذیر α روی $\mathcal{R}$ را می‌توان به طور یکتا به صورت جمع متعامد دیفرانسیل دقیق $\mathrm{d}f$، کودقیق $*\mathrm{d}g$ و هارمونیک h نوشت:*
$$\alpha = \mathrm{d}f + *\mathrm{d}g + h \tag{۲۵}$$

در ادامه می‌خواهیم $۲g$ دیفرانسیل هارمونیک مستقل خطی برای رویه‌ی ریمانی فشرده $\mathcal{R}$ ارائه کنیم. حلقه‌ی ساده‌ی γ را روی $\mathcal{R}$ در نظر بگیرید که خود را قطع نمی‌کند. نوار Γ را شامل γ بگیرید. این نوار شامل دوایر متحدالمرکز است و γ آن را به دو بخش Γ^+ و Γ^- تقسیم می‌کند. نوار کوچکتر $\Gamma_۰$ را شامل γ در Γ بگیرید، شکل ۴. تابع حقیقی مقدار F روی $\mathcal{R}$ با خصوصیات
$$F_{|\Gamma_۰^-} = ۱,\quad F_{|\mathcal{R}\backslash\Gamma^-} = ۰,\quad F \in C^\infty(\mathcal{R}\backslash\gamma)$$
دیفرانسیل هموار α_γ را تعریف می‌کنیم:
$$\alpha_\gamma \begin{cases} \mathrm{d}F & on\ \Gamma\backslash\gamma \\ ۰ & on\ (\mathcal{R}\backslash\Gamma)\cup\gamma \end{cases}$$
حال مدل همبند ساده‌ی F_g از $\mathcal{R}$ را در نظر بگیرید و یکی از حلقه‌های پایه‌ی $a_۱, b_۱, \ldots, a_g, b_g$ مثلا $a_۱$ را برای γ در نظر بگیرید. دیفرانسیل α_γ به روشی که ساختیم، حول $b_۱$ تناوب ناصفر دارد. با انتخاب جهت مناسب، داریم:
$$\int_{b_۱} \alpha_\gamma = ۱$$

[۲۱] Weil's lemma



شکل ۴: ساختار فرم‌های بسته و نادقیق

به طوری که تمامی تناوب‌های دیگر α_γ صفر باشد. دیفرانسیل α_γ بسته است و دقیق نمی‌باشد. آن را می‌توانیم به صورت ترکیب دیفرانسیل دقیق $\mathrm{d}f_\gamma$ و هارمونیک h_γ نوشت:

$$\alpha_\gamma = \mathrm{d}f_\gamma + h_\gamma$$

توجه کنید که هر دو قسمت ترکیب هموار است. دیفرانسیل هارمونیک h_γ همان تناوب‌های دیفرانسیل α_γ را دارد.

با انتخاب حلقه‌ای مخالف γ از $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$ می‌توانیم به همین ترتیب $2g$ دیفرانسیل هارمونیک مستقل خطی بیابیم. بنابراین برای بعد داریم:

$$\dim H \geq 2g \tag{۲۶}$$

دوباره دیفرانسیل‌های هلومورفیک و پادهلومورفیک را در نظر می‌گیریم و فضای آن‌ها را به ترتیب با $\mathcal{H} = H^1(\mathcal{R}, \mathbb{C})$ و $\bar{\mathcal{H}}$ نشان می‌دهیم. در مورد این فضاها به وضوح داریم $\mathcal{H} \perp \bar{\mathcal{H}}$

گزاره ۳۳. *فرض کنید $\mathcal{R}$ رویه‌ی ریمانی فشرده با g گونه باشد. در این صورت*

$$\dim H^1(\mathcal{R}, \mathbb{C}) \geq g$$

اثبات. فضاهای $\mathcal{H}$ و $\bar{\mathcal{H}}$ متعامدند و دارای بعد یکسانند. به عبارت دیگر بنا به لم ۲۹:

$$H \subset \mathcal{H} \oplus \bar{\mathcal{H}}$$

که این نتیجه می‌دهد $\dim H \leq 2\dim \mathcal{H}$. و از نامساوی (۲۶) حکم نتیجه می‌شود. □

قضیه‌ی ۱۱ از گزاره‌ی ۳۳ و نتیجه‌ی ۱۰ حاصل می‌شود.

به عنوان نتیجه‌ای از قضیه‌ی ۱۱، بدست می‌آوریم $\dim H \leq 2g$، و در نهایت $\dim H = 2g$. این مشاهده با روش ساخت دیفرانسیل‌های هارمونیک h_γ نتیجه می‌دهد:

گزاره ۳۴. *رویه‌ی ریمانی فشرده با پایه‌ی فرمال از حلقه‌های $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$ داده شده است. در این صورت $2g$ دیفرانسیل هارمونیک یکتای $h_1, \ldots, h_{2g}$ با تناوب‌های*

$$\int_{a_j} h_i = \int_{b_j} h_{g+i} = \delta_{ij}, \quad \int_{a_j} h_{g+i} = \int_{b_j} h_i = 0, \quad i = 1, \ldots, g$$

وجود دارد.

حال می‌خواهیم دیفرانسیل‌های آبلی نوع دوم، $\Omega_R^{(N)}$ را بسازیم. همسایگی‌های تودرتو $R \in U_0 \subset U_1 \subset \mathcal{R}$ شامل نقطه‌ی R و تابع هموار $\rho \in C^\infty(\mathcal{R})$ با این خاصیت که

$$\rho = \begin{cases} 1 & \mathrm{on} U_0 \\ 0 & \mathrm{on} \mathcal{R} \backslash U_1 \end{cases}$$

را در نظر بگیرید. فرض کنید z یک مختصات موضعی در U_1 با $z(R) = 0$ باشد. دیفرانسیل

$$\psi := \mathrm{d}(-\frac{\rho}{Nz^N}) = (-\frac{\rho_z}{Nz^N} + \frac{\rho}{z^{N+1}})\mathrm{d}z - (\frac{\rho_{\bar{z}}}{Nz^N})\mathrm{d}\bar{z}$$

را با همان نقطه تکین $\Omega_R^{(N)}$ به عنوان یکی از نقاط تکین‌اش، بگیرید. بخش $(0,1)$ دیفرانسیل ψ روی $\mathcal{R}$ هموار است و می‌توانیم آن را به مولفه‌های بسته، کوبسته و هارمونیک تجزیه کنیم:

$$\psi - i * \psi = \mathrm{d}f + *\mathrm{d}g + h \in E(\mathcal{R}) \oplus E^*(\mathcal{R}) \oplus H(\mathcal{R})$$

بگیرید:

$$\alpha := \psi - \mathrm{d}f$$

لم ۳۵. *دیفرانسیل α روی $\mathcal{R}\backslash R$ هارمونیک است و دیفرانسیل $\alpha - \frac{\mathrm{d}z}{z^{N+1}}$ روی U_0 هارمونیک است.*

اثبات. مجموعه‌ای بسته مانند $\bar{U} \subset U_0$ انتخاب کنید. برای α داریم:

$$\alpha = \mathrm{d}(-\frac{\rho}{Nz^{N+1}}) - \mathrm{d}f$$

که نتیجه می‌شود $\alpha \perp E^*(\mathcal{R}\backslash\bar{U})$. از طرف دیگر

$$\alpha = i * \psi + *\mathrm{d}g + h$$

که نتیجه می‌شود $\alpha \perp E(\mathcal{R}\backslash\bar{U})$. با ترکیب دو نتیجه‌ی بدست آمده داریم $\alpha \in H(\mathcal{R}\backslash\bar{U})$ برای $R \in U$ دلخواه. در مورد نمایش α در U_0 مشاهده می‌شود که $\psi - \frac{\mathrm{d}z}{z^{N+1}}|_{U_0} \equiv 0$. روی U_0 نتیجه می‌شود

$$\alpha - \frac{\mathrm{d}z}{z^{N+1}} = -\mathrm{d}f = *\mathrm{d}g + h$$

که در این معادله $\alpha - \frac{\mathrm{d}z}{z^{N+1}}$ باید بر $E(U_0)$ و $E^*(U_0)$ عمود باشد، بنابراین در $H(U_0)$ قرار می‌گیرد. $\square$

به عنوان یک نتیجه‌ی مستقیم از لم ۲۹ و ۳۵، گزاره‌ی زیر را داریم:

گزاره ۳۶. *دیفرانسیل*

$$\Omega := \frac{1}{2}(\alpha + i * \alpha)$$

روی $\mathcal{R}\backslash R$ و دیفرانسیل $\Omega - \frac{\mathrm{d}z}{z^{N+1}}$ روی U_0 هلومورفیک است.

وجود دیفرانسیل‌های نرمال شده نوع دوم، $\Omega_R^{(N)}$ که در قضیه‌ی ۱۸ بیان شده است، از گزاره‌ی ۳۶ نتیجه می‌شود.
برای اثبات وجود دیفرانسیل‌های نوع سوم، باید از دیفرانسیل‌های

$$\psi_{P_1P_2} = \mathrm{d}(\rho \log \frac{z - z_1}{z - z_2})$$

شروع کنیم که $z_1 = z(P_1)$ و $z_2 = z(P_2)$ مختصات موضعی دو نقطه‌ی $P_1, P_2 \in U_0$ است. با اعمال کارهایی که برای دیفرانیسل‌های نوع دوم انجام دادیم، دیفرانسیل‌های نوع سوم $\Omega_{P_1P_2}$ با

$$res_{P_1}\Omega_{P_1P_2} = -res_{P_2}\Omega_{P_1P_2} = 1$$

بدست می‌آید. و در نهایت هر دیفرانسیل آبلی نوع سوم Ω_{RQ} روی رویه‌ی ریمانی فشرده را می‌توان به صورت جمع متناهی از دیفرانسیل‌های پایه $\Omega_{P_1P_2}$ نوشت.

مراجع

[1] Alexander Bobenko, *Differential Geometrie III: Compact Riemanna Surfaces*.

نظریه‌ی کوهمولوژی بافه‌ها

خشایار فیلم

در این مقاله‌ی کوتاه به معرفی مفهومی به نام «بافه[1]» می‌پردازیم که همان‌گونه که خواهیم دید به گونه‌ای بسیار طبیعی به چنین ساختاری نیازمندیم و سپس به کمک این مفهوم نظریه‌های کوهمولوژی گوناگونی مانند «کوهمولوژی تکین[2]» در توپولوژی جبری و «کوهمولوژی درام[3]» در هندسه‌ی منیفلد را به هم مرتبط می‌سازیم.

ابتدا به مثالی می‌پردازیم که مبنای اصلی تعریف بافه است. یک فضای توپولوژیک X در نظر بگیرید. به هر باز U از X می‌توان حلقه‌ی توابع پیوسته $F : U \to \mathbb{R}$ را نسبت داد. همچنین اگر $U \subset V$ همریختی‌ای از حلقه‌ی توابع بر V به حلقه‌ی توابع بر U داریم که هر تابع $V \to \mathbb{R}$ را به U تحدید می‌کند. چه ویژگی‌های دیگری داریم؟ یک ویژگی دیگر آن است که با به هم چسباندن اطلاعات موضعی هماهنگ (در بیانی غیردقیق) می‌توان به اطلاعات جدیدی رسید: اگر $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ خانواده‌ای از بازهای X باشد و $U = \cup_{\alpha\in I} U_\alpha$، در صورتی که عنصر F_α از حلقه‌ی نسبت داده شده به هر U_α را در نظر بگیریم (یعنی F_α یک تابع پیوسته‌ی $U_\alpha \to \mathbb{R}$ است) به قسمی که برای هر $\alpha, \beta \in I$، $F_\alpha |_{U_\alpha \cap U_\beta} = F_\beta |_{U_\alpha \cap U_\beta}$، آنگاه تابع پیوسته‌ی یکتای $F : U \to \mathbb{R}$ موجود است که برای هر $\alpha \in I$، $F |_{U_\alpha} = F_\alpha$. حال می‌خواهیم در بیانی غیردقیق ساختاری بیابیم که این فرایند نسبت دادن حلقه به بازهای X با خواص مطلوب را توصیف کند.

تعریف ۱. *یک بافه‌ی $\mathcal{F}$ از گروه‌های آبلی (یا حلقه‌ها و مدول‌ها و ...) بر فضای توپولوژیک X، به هر باز U از X گروه آبلی (به ترتیب حلقه و مدول و ...) $\mathcal{F}(U)$ نسبت می‌دهد با این ویژگی که برای دو باز تودرتوی $U \subset V$ یک «همریختی تحدید[4]» به صورت*

$$\begin{cases} p_{UV} : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U) \\ s \longmapsto s |_U \end{cases}$$

داریم به قسمی که:

الف) $p_{UU} = 1_{\mathcal{F}(U)}$

ب) *اگر $U \subset V \subset W$ بازهای X باشند:* $p_{UV} o p_{VW} = p_{UW}$.

ج) *اگر $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ پوشش بازی از باز U از X باشد و عناصر $s_\alpha \in \mathcal{F}(U)$ چنان باشند که:*
$$\forall \alpha, \beta \in I : s_\alpha |_{U_\alpha \cap U_\beta} = s_\beta |_{U\alpha \cup U_\beta}$$

آنگاه عنصر یکتای $s \in \mathcal{F}(U)$ موجود است که برای هر $\alpha \in I$، $p_{U_\alpha U}(s) = s_\alpha$ یا در نمادگذاری ساده‌تر $s |_{U_\alpha} = s_\alpha$.

واضح است که تعریف فوق طبیعی‌ترین گزینه برای شیء‌ای است که اطلاعات موضعی داده شده روی یک فضای توپولوژیک را دربرداشته باشد.

مثال ۲. *اگر A یک گروه آبلی باشد، می‌توان بر هر فضای توپولوژیک X «بافه‌ی ثابت[5]» متناظر A را تعریف کرد که آن را به همان*

[1] Sheaf
[2] Singular Cohomology
[3] deRham Cohomology
[4] resteriction homomorphism
[5] constant sheaf

نماد A نمایش می‌دهیم و برای هر باز U از X:

$$A(U) = F : U \to A \text{ گروه توابع موضعا ثابت}$$

و همریختی‌های $A(V) \to A(U)$ هرگاه $U \subset V$ را تحدید گرفت.

دو مفهوم دیگر هم هستند که به شکل محسوسی به آن‌ها نیاز داریم: همریختی میان دو بافه و ساختاری که اطلاعات در یک نقطه از فضا را بدست دهد.

تعریف همریختی میان دو بافه آسان است: اگر $\mathcal{F}$ و $\mathcal{G}$ دو بافه از گروه‌های آبلی (به ترتیب حلقه‌ها، مدول‌ها و ...) بر فضای توپولوژیک X باشند، یک همریختی $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ عبارت است از خانواده‌ای از همریختی‌های گروهی (به ترتیب حلقه‌ای، مدولی و ...) به شکل $\{\alpha(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)\}$ به گونه‌ای که برای هر دو باز $U \subset V$ نمودار زیر جابه‌جایی باشد:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(V) \arrow[r, "\alpha(V)"] \arrow[d, "\text{همریختی تحدید}"'] & \mathcal{G}(V) \arrow[d, "\text{همریختی تحدید}"] \\ \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\alpha(U)"] & \mathcal{G}(U) \end{tikzcd} \qquad (1)$$

اگر $\mathcal{F}(U)$ را به عنوان اطلاعات بر باز U بگیریم، طبیعی‌ترین تعریف برای آنچه که درباره‌ی یک نقطه‌ی $p \in X$ می‌دانیم، به صورت زیر است:

$$\mathcal{F}_p = \varinjlim_{p \in U} \mathcal{F}(U) \quad (\varinjlim : \text{direct limit})$$

$\mathcal{F}_p$ «ساقه[۶]» در نقطه‌ی p نامیده می‌شود و می‌توان حد مستقیم فوق را اینگونه تعبیر کرد: مجموعه‌ی

$$\{< U, s >| \, p \in U, s \in \mathcal{F}(U)\}$$

را در نظر بگیرید. می‌توان بر این مجموعه یک رابطه‌ی هم ارزی گذاشت به این صورت که $< U, s >=< V, s' >$ هرگاه باز $W \subset U \cap V$ حول p و $s'' \in \mathcal{F}(W)$ موجود باشند که $s \mid_W = s''$ و $s' \mid_W = s''$. مجموعه‌ی دسته‌های هم ارزی $\{< U, s >| \, p \in U, s \in \mathcal{F}(U)\}/\sim$ را می‌توان به یک گروه بدل کرد به این صورت که

$$< U, s > + < V, s' >=< U \cap V, s \mid_{U \cap V} + s' \mid_{U \cap V}>$$

این گروه همان $\mathcal{F}_p$ است.

تذکر ۳. *الف) با توجه به تعریف بالا برای هر همسایگی باز U از p یک همریختی $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_p$ داریم و همچنین برای هر عنصر $t \in \mathcal{F}_p$ بازی چون V حول p و عنصری از $\mathcal{F}(V)$ موجود است که تحت همریختی $\mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}_p$ به t می‌رود.*

ب) اگر $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ یک همریختی میان بافه‌ها باشد، برای هر $p \in X$ نمودار زیر جابه‌جایی است:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\alpha(U)"] \arrow[d] & \mathcal{G}(U) \arrow[d] \\ \mathcal{F}_p \arrow[r, "\alpha_p"] & \mathcal{G}_p \end{tikzcd} \qquad (2)$$

که در آن α_p به این صورت تعریف می‌شود: $t \in \mathcal{F}_p$ را به $s \in \mathcal{F}(V)$ به ازای همسایگی باز مناسبی مانند V از p ترفیع می‌دهیم و حال $\alpha(V)(s) \in \mathcal{G}(V)$ که چون V، p را در بر دارد، می‌توان آن را به $\mathcal{G}_p$ تصویر کرد و به عنصر $\alpha_p(t) \in \mathcal{G}_p$ رسید.

---
[۶] stalk

حال می‌توان کتگوری بافه‌ها از گروه‌های آبلی (حلقه‌ها، یا مدول‌ها و ...) بر فضای توپولوژیک X را در نظر گرفت که اشیاء آن بافه‌هایی از گروه‌های آبلی بر X و مورفیسم‌های آن همریختی‌های میان بافه‌ها هستند. این را به $Sh(X, \mathbb{A}b)$ نمایش می‌دهیم که در آن $\mathbb{A}b$ کتگوری گروه‌های آبلی است. می‌توان نشان داد که این یک «کتگوری آبلی[۷]» است. نکته‌ی اساسی آن است که اینجا دقیق بودن با دقیق بودن در حد ساقه مترادف است:

یک دنباله‌ی $\dots \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \mathcal{F}_{n-1} \xrightarrow{\alpha_n} \mathcal{F}_n \xrightarrow{\alpha_{n+1}} \mathcal{F}_{n+1} \to \cdots$ در کتگوری آبلی $Sh(X, \mathbb{A}b)$ دقیق است اگر و تنها اگر برای هر $p \in X$ دنباله‌ی زیر از گروه‌ها آبلی دقیق باشد

$$\cdots \to (\mathcal{F}_{n+1})_p \xrightarrow{(\alpha_{n+1})_p} (\mathcal{F}_n)_p \xrightarrow{(\alpha_n)_p} (\mathcal{F}_{n-1})_p \xrightarrow{(\alpha_{n-1})_p} \dots$$

حال یک فانکتور جمعی $\Gamma : Sh(X, \mathbb{A}b) \to \mathbb{A}b$ داریم که هر بافه‌ی $\mathcal{F}$ را به $\mathcal{F}(X)$ می‌برد و $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ را به همریختی متناظر $\alpha(X) : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{G}(X)$ تصویر می‌کند. فانکتور Γ «مقطع سرتاسری[۸]» نامیده می‌شود. (در حالت کلی هر عنصر $\mathcal{F}(U)$ یک «مقطع[۹]» بافه‌ی $\mathcal{F}$ بر باز U نامیده می‌شود.)

گزاره ۴. *فانکتور Γ از چپ دقیق است: اگر $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \to 0$ دنباله‌ای دقیق از بافه‌های از گروه‌های آبلی بر X باشد؛ دنباله‌ی زیر از گروه‌های آبلی دقیق است:*

$$0 \to \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\alpha(X)} \mathcal{G}(X) \xrightarrow{\beta(X)} \mathcal{H}(X) \to 0$$

اثبات. تنها یک به یک بودن $\alpha(X)$ را ثابت می‌کنیم، اثبات بقیه مشابه است. فرض کنید $s \in \mathcal{F}(X)$ و $\alpha(X)(s) = 0$. پس چون هر $\mathcal{F}_p \to \mathcal{G}_p$ یک به یک است، به دلیل وجود نمودار جابه جایی

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(X) \arrow[r, "\alpha(X)"] \arrow[d] & \mathcal{G}(X) \arrow[d] \\ \mathcal{F}_p \arrow[r, "\alpha_p"] & \mathcal{G}_p \end{tikzcd} \tag{۳}$$

تصویر s در ساقه در هر نقطه‌ی $p \in X$ صفر است. این بدان معنی است که حول هر p باز U_p از X را داریم که $s|_{U_p} = 0$. حال $\{U_p\}_{p \in X}$ پوشش بازی از X است و $s \in \mathcal{F}(X)$ چنان است که تحدیدش به هر یک از عناصر این پوشش باز صفر است. پس از (ج) در تعریف ۱ نتیجه می‌شود $s = 0$. □

ولی نکته‌ی اساسی این است که در بالا $\beta(X) : \mathcal{G}(X) \to \mathcal{H}(X)$ لزوما پوشا نیست، همان‌گونه که در مثال زیر مشاهده می‌شود:

مثال ۵. *$\mathcal{O}$ را بافه‌ی توابع تحلیلی بر $\mathbb{C} - \{0\}$ بگیرید و $\mathcal{O}^*$ را بافه‌ی توابع تحلیلی که هیچ‌جا صفر نمی‌شوند. (برای هر $U \subset \mathbb{C} - \{0\}$، $\mathcal{O}^*(U)$ گروه ضربی توابع تحلیلی $F : U \to \mathbb{C}^*$ است.) $\mathbb{Z}$ را هم بافه‌ی ثابت بر $\mathbb{C} - \{0\}$ بگیرید. در این صورت دنباله‌ی دقیق*

$$0 \to \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{exp} \mathcal{O}^* \to 0$$

از بافه‌های بر فضای $\mathbb{C} - \{0\}$ را داریم که در آن exp بر هر باز U به صورت زیر است:

$$\begin{cases} \mathcal{O} = (U \to \mathbb{C} \text{ توابع تحلیلی}) \to \mathcal{O}^*(U) = (U \to \mathbb{C}^* \text{ توابع تحلیلی}) \\ F \mapsto e^{2\pi\sqrt{-1}F} \end{cases}$$

ولی $\mathcal{O}(\mathbb{C} - \{0\}) \to \mathcal{O}^*(\mathbb{C} - \{0\})$ پوشا نیست. چرا که هیچ تابع تحلیلی F بر $\mathbb{C} - \{0\}$ موجود نیست که تساوی $e^{2\pi\sqrt{-1}F(z)} = z$ برای هر $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ را برآورده کند.

---

[۷] abelian category
[۸] global section
[۹] section

پس این سوال طبیعی مطرح است که با داشتن دنباله‌ی دقیق کوتاه $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ از بافه‌ها، چگونه دنباله‌ی دقیق $0 \to \mathcal{F}(X) \to \mathcal{G}(X) \to \mathcal{H}(X)$ را که گزاره‌ی ۴ بدست می‌دهد تکمیل کنیم؟ خوشبختانه چون بنابر ۴ فانکتور $\Gamma : Sh(X, \mathbb{A}b) \to \mathbb{A}b$ «از چپ دقیق[10]» است، جبر همولوژی ابزار لازم را در اختیار ما قرار می‌دهد.

تعریف ۶. *$\Gamma : Sh(X, \mathbb{A}b) \to \mathbb{A}b$ یک فانکتور جمعی، همورد و از چپ دقیق است. می‌توان نشان داد که کتگوری $Sh(X, \mathbb{A}b)$ به تعداد کافی شی انژکتیو دارد. پس فانکتورهای مشتق راست Γ قابل تعریف هستند که آن‌ها را به $H^i(X, -)$ نمایش می‌دهیم. برای هر بافه‌ی $\mathcal{F}$، گروه‌های*

$$H^0(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X), H^1(X, \mathcal{F}), \ldots$$

را گروه کوهمولوژی متناظر $\mathcal{F}$ می‌نامیم.

خواص آشنایی از جبر همولوژی همچون وجود «دنباله‌ی بلند دقیق[11]»

* یک دنباله‌ی کوتاه دقیق $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \to 0$ از بافه‌های از گروه‌های آبلی بر X، یک دنباله‌ی دقیق در کوهمولوژی القا می‌کند:

$$0 \to \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\alpha(X)} \mathcal{G}(X) \xrightarrow{\beta(X)} \mathcal{H}(X) \to H^1(X, \mathcal{F}) \to H^1(X, \mathcal{G}) \to H^1(X, \mathcal{H}) \to H^2(X, \mathcal{F}) \to \ldots$$

و همچنین حکم زیر برقرارند:

* فرض کنید «تحلیل[12]» زیر برای بافه‌ی $\mathcal{F}$ موجود باشد:

$$0 \to \mathcal{F}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{d^1} \mathcal{F}^2 \to \ldots$$

با این ویژگی که برای هر $i > 0$ و هر n، $H^i(X, \mathcal{F}^n) = 0$. در این صورت $H^i(X, \mathcal{F})$ به طور طبیعی یکریخت است با کوهمولوژی iام «همبافت[13]» زیر:

$$\{\mathcal{F}^i(X), d^i(X) : \mathcal{F}^i(X) \to \mathcal{F}^{i+1}(X)\}_{i \geq 0}$$

یعنی:

$$H^i(X, \mathcal{F}) \cong \frac{ker(\mathcal{F}^i(X) \to \mathcal{F}^{i+1}(X))}{Im(\mathcal{F}^{i-1}(X) \to \mathcal{F}^i(X))}$$

یک نتیجه‌ی بلافاصله‌ی قسمت آخر حکم زیر است.

قضیه ۷. *فرض کنید X یک منیفلد باشد و $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ را بافه‌ی ثابت متناظر گروه‌های آبلی به ترتیب $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ بر X بگیرید. در این صورت گروه‌های کوهمولوژی بافه‌ی $H^i(X, \mathbb{R})$ و $H^i(X, \mathbb{C})$ به ترتیب یکریختند با گروه‌ها کوهمولوژی درام حقیقی و مختلط $H^i_{DR}(X, \mathbb{R})$ و $H^i_{DR}(X, \mathbb{C})$.*

اثبات. حکم را برای کوهمولوژی درام حقیقی ثابت می‌کنیم. اثبات در حالت مختلط هم مشابه است. برای هر $k \geq 0$، $\mathcal{A}^k$ را بافه‌ای بگیرید که به هر باز U فضای برداری k-فرم‌های C^∞ بر U را نسبت می‌دهد و «همریختی‌های تحدید» $\mathcal{A}^k(V) \to \mathcal{A}^k(U)$ همان تحدید فرم‌های بر U به یک باز کوچکتر V. ولی بنابر لم پوآنکاره هر فرم d-بسته موضعا d-دقیق است و لذا دنباله‌ی زیر از بافه‌های از فضاهای برداری حقیقی دقیق است:

$$0 \to \mathbb{R} \hookrightarrow \mathcal{A}^0 \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{A}^1 \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{A}^2 \xrightarrow{\mathrm{d}} \ldots$$

که در آن $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathcal{A}^0$ بر هر باز U تابع موضعا ثابت $F : U \to \mathbb{R}$ را به عنصر مشابهی از $\mathcal{A}^0$ که حلقه‌ی توابع C^∞، $U \to \mathbb{R}$ است، می‌برد. $\mathrm{d} : \mathcal{A}^n \to \mathcal{A}^{n+1}$ هم بر هر باز U با $\omega \mapsto \mathrm{d}\omega$ برای هر k-فرم C^∞، ω بر U داده می‌شود. پس $0 \to \mathcal{A}^0 \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{A}^1 \xrightarrow{\mathrm{d}} \ldots$

[10] left exact
[11] long exact sequence
[12] resolution
[13] comlex

یک تحلیل از بافه‌ی ثابت $\mathbb{R}$ است. با استفاده از «افراز واحد[۱۴]» می‌توان نشان داد که برای هر $\mathcal{A}^k$ گروه‌های کوهمولوژی با افراز مرتبه‌ی بیشتر از صفر، صفرند و لذا حکم بیان شده نتیجه می‌دهد که $H^i(X,\mathbb{R})$ یکریخت است با کوهمولوژی iام همبافت فرم‌های C^∞ بر X:

$$\mathcal{A}^۰(X) \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{A}^۱(X) \xrightarrow{\mathrm{d}} \dots$$

که این هم بنابر تعریف همان کوهمولوژی درام iام یعنی $H^i_{DR}(X,\mathbb{R})$ است. □

همین استدلال را برای کوهمولوژی تکین هم می‌توان انجام داد. ولی آن فرآیند پیچیده‌تر است. باید همبافتی در نظر بگیریم به صورت

$$\mathcal{C}^۰ \xrightarrow{\delta} \mathcal{C}^۱ \xrightarrow{\delta} \mathcal{C}^۲ \xrightarrow{\delta} \mathcal{C}^۳ \rightarrow$$

که در آن هر $\mathcal{C}^n$ به باز U گروه «پادزنجیر[۱۵]»های با ضرایب صحیح در U یعنی $C^n(U,\mathbb{Z})$ را نسبت می‌دهد و $\delta:\mathcal{C}^n\rightarrow\mathcal{C}^{n+۱}$ بر U همان «نگاشت پادمرز[۱۶]»

$$\delta: C^n(U,\mathbb{Z}) \rightarrow C^{n+۱}(U,\mathbb{Z})$$

برای فضای توپولوژیک U است. دلیل آنکه این فرآیند از قبلی پیچیده‌تر است، آن است که $\mathcal{C}^n$ با این تعریف بافه نمی‌شود. در واقع موجودی (!) می‌شود که از خواص بافه در تعریف ۱ تنها (الف) و (ب) را برآورده می‌کند. این را یک «پیش‌بافه[۱۷]» می‌نامند. پس مشکل این است که $\dots \mathcal{C}^۰ \xrightarrow{\delta} \mathcal{C}^۱ \xrightarrow{\delta}$ همبافتی از بافه‌ها نیست بلکه همبافتی از پیش‌بافه‌هاست. ولی می‌توان این مشکل را حل کرد و در واقع روشی موجود است که به هر پیش‌بافه یک بافه نسبت می‌دهد. در اینجا برای پرهیز از طولانی شدن بحث از توضیح بیشتر آن خودداری می‌کنیم. تنها این را بیان می‌کنیم که با برطرف کردن این مشکل، می‌توان مشابه قضیه‌ی ۷ را برای کوهمولوژی تکین هم بیان کرد.

قضیه ۸. *X را یک منیفلد بگیرید و $\mathbb{Z}$ را بافه‌ی ثابت بر X. در این صورت گروه‌های کوهمولوژی $H^i(X,\mathbb{Z})$ یکریختند با گروه‌های کوهمولوژی تکین $H^i_{sing}(X,\mathbb{Z})$. با بکار بردن «قضیه‌ی ضرایب جهانی[۱۸]» در توپولوژی جبری، این برای هر گروه آبلی دیگری چون A به جای $\mathbb{Z}$ هم برقرار است.*

یک نتیجه‌ی بلافاصله‌ی قضایای ۷ و ۸ آن است که گروه‌های کوهمولوژی درام حقیقی و گروه‌های کوهمولوژی تکین حقیقی برای یک منیفلد یکی‌اند. این همان قضیه‌ی درام است.

در انتها با اشاره‌ای به «کوهمولوژی چک[۱۹]» به روشی ساده برای محاسبه‌ی $H^۱(X,\mathcal{F})$ می‌پردازیم. دوباره همانند گزاره‌ی ۴، دنباله‌ی کوتاه دقیق $۰ \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \rightarrow ۰$ از بافه‌های گروه‌های آبلی بر فضای توپولوژیک X را در نظر بگیرید. می‌خواهیم نگاشت اتصالی $\mathcal{H}(X) \rightarrow H^۱(X,\mathcal{F})$ را که دنباله‌ی دقیق $۰ \rightarrow \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\alpha(X)} \mathcal{G}(X) \xrightarrow{\beta(X)} \mathcal{H}(X)$ را در آن گزاره کامل می‌کند بیابیم. ابتدا به یک تعریف می‌پردازیم. $\mathcal{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ را پوشش بازی از X بگیرید. تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} Z^۱(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \{(s_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in I} \mid \\ \qquad s_{\alpha\beta}\in\mathcal{F}(U_\alpha\cap U_\beta), \forall\alpha,\beta,\gamma\in I: s_{\alpha\beta}\mid_{U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma} + s_{\beta\gamma}\mid_{U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma} = s_{\alpha\gamma}\mid_{U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma}\} \\ B^۱(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \{(g_\alpha\mid_{U_\alpha\cap U_\beta} - g_\beta\mid_{U_\alpha\cap U_\beta})_{\alpha,\beta\in I} \mid \forall\alpha\in I: g_\alpha\in\mathcal{F}(U_\alpha)\} \end{cases}$$

اگر هردو را زیرگروه‌های $\prod_{\alpha,\beta\in I}\mathcal{F}(U_\alpha\cap U_\beta)$ بگیریم، به وضوح $B^۱(\mathcal{U},\mathcal{F}) \subset Z^۱(\mathcal{U},\mathcal{F})$. $Z^۱(\mathcal{U},\mathcal{F})/B^۱(\mathcal{U},\mathcal{F})$ را گروه «کوهمولوژی چک» متناظر با پوشش $\mathcal{U}$ برای بافه‌ی $\mathcal{F}$ می‌نامند و به $\check{H}^۱(\mathcal{U},\mathcal{F})$ نمایش می‌دهند. حال ارتباط آن را با $H^۱(X,\mathcal{F})$ بیان می‌کنیم. به سادگی می‌توان دید که اگر پوشش باز $\mathcal{V}$ تظریفی از پوشش باز $\mathcal{U}$ باشد، یک نگاشت طبیعی

---

[۱۴] partition of unity
[۱۵] cochain
[۱۶] coboundary homomorphism
[۱۷] presheaf
[۱۸] universal coefficients theorem
[۱۹] Cech chomology

$\check{H}^{۱}(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to \check{H}^{۱}(\mathcal{V},\mathcal{F})$ القا می‌شود. بنابراین یک «سیستم مستقیم[۲۰]» به صورت $\{\check{H}^{۱}(\mathcal{U},\mathcal{F})\}_{X \text{پوشش باز} \mathcal{U}}$ داریم و می‌توان $\lim_{\to X \text{پوشش باز} U} \check{H}^{۱}(\mathcal{U},\mathcal{F})$ را تعریف کرد. حال قضیه‌ای بیان می‌کند که:

$$\lim_{\to\ X \text{پوشش باز} \mathcal{U}} \check{H}^{۱}(\mathcal{U},\mathcal{F}) \cong H^{۱}(X,\mathcal{F})$$

حال می‌توان نگاشت اتصالی $\mathcal{H}(X) \to H^{۱}(X,\mathcal{F})$ را که از دنباله‌ی کوتاه دقیق $۰ \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \to ۰$ بدست می‌آید تعریف کرد. فرض کنید $s \in \mathcal{H}$، پس با تصویر s به ساقه‌ی $\mathcal{H}_p$، چون $۰ \to \mathcal{F}_p \xrightarrow{\alpha_p} \mathcal{G}_p \xrightarrow{\beta_p} \mathcal{H}_p \to ۰$ دقیق است، باید عضو مذکور از $\mathcal{H}_p$ در برد β_p باشد. روش تعریف β_p نتیجه می‌دهد که یک باز U حول p و $s' \in \mathcal{G}(U)$ موجودند که $\beta(U)(s') \in \mathcal{H}(U)$ تحت $\mathcal{H}(U) \to \mathcal{H}_p$ به همان تصویر s در $\mathcal{H}_p$ می‌رود. لذا پوشش باز $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ از X و عناصر $s'_\alpha \in \mathcal{G}(U_\alpha)$ موجودند که $\beta(U_\alpha)(s'_\alpha) = s\mid_{U_\alpha}$. این نشان می‌دند که برای هر $\alpha,\beta \in I$،

$$\beta(U_\alpha \cap U_\beta) : \mathcal{G}(U_\alpha \cap U_\beta) \to \mathcal{H}(U_\alpha \cap U_\beta)$$

عنصر $s'_\alpha \mid_{U_\alpha\cap U_\beta)} - s'_\beta \mid_{U_\alpha \cap U_\beta}$ را به صفر می‌برد. پس این باید در برد

$$\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) : \mathcal{F}(U_\alpha \cap U_\beta) \to \mathcal{G}(U_\alpha \cap U_\beta)$$

باشد: $t_{\alpha\beta} \in \mathcal{F}(U_\alpha \cap U_\beta)$ موجود است که:

$$\forall \alpha,\beta \in I : \alpha(U_\alpha \cap U_\beta)(t_{\alpha\beta} = s'_\alpha \mid_{U_\alpha\cap U_\beta} - s'_\beta \mid_{U_\alpha\cap U_\beta}$$

پس:

$$\alpha(U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma)(t_{\alpha\beta} + t_{\beta\gamma} - t_{\alpha\gamma}) = ۰ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{\alpha\beta} \mid_{U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma} + t_{\beta\gamma} \mid_{U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma} = t_{\alpha\gamma} \mid_{U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma}$$

پس به $s \in \mathcal{H}(X)$ عنصر $(t_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in I} \in Z'(\mathcal{U},\mathcal{F})$ نسبت داده می‌شود که کلاسی در گروه کوهمولوژی چک $\check{H}^{۱}(\mathcal{U},\mathcal{F})$ و از آنجا عنصری در

$$H^{۱}(X,\mathcal{F}) \cong \lim_{\to \mathcal{U}} \check{H}^{۱}(\mathcal{U},\mathcal{F})$$

معین می‌کند. این همان اثر $\mathcal{H} \to H^{۱}(X,\mathcal{F})$ در دنباله بلند دقیق نسبت داده شده به $۰ \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \to ۰$ بر $s \in \mathcal{H}(X)$ است.

یکریختی بیان شده در بالا سودمند است ولی قابلیت محاسباتی ندارد. به منظور محاسبه‌ی $H^{۱}(X,\mathcal{F})$ با کوهمولوژی چک، باید از قضیه‌ای منسوب به لری[۲۱] استفاده کرد:

قضیه ۹. *فرض کنید بافه‌ی $\mathcal{F}$ از گروه‌های آبلی (یا حلقه‌ها، مدول‌ها و ...) بر فضای توپولوژیک X داده شده باشد و پوشش باز $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ از X چنان باشدکه:*

$$\forall \alpha \in I : H^{۱}(U_\alpha, \mathcal{F}\mid_{U_\alpha}) = ۰$$

در این صورت $H^{۱}(X,\mathcal{F}) \cong \check{H}^{۱}(\mathcal{U},\mathcal{F})$.

در انتها کوهمولوژی $\mathbb{C} - \{۰,۱\}$ با ضرایب مختلط را با هر سه تئوری کوهمولوژی تکین، کوهمولوژی درام و کوهمولوژی چک محاسبه می‌کنیم و خواهیم دید که همان‌گونه که انتظار داریم هر سه نتیجه یکی‌اند.

مثال ۱۰. *محاسبه‌ی $H^{۱}_{DR}(\mathbb{C} - \{۰,۱\},\mathbb{C})$: می‌دانیم که هر ۱-فرم بسته‌ای بر $\mathbb{C} - \{۰,۱\}$ که انتگرالش بر هر خم بسته صفر باشد دقیق است. ولی انتگرال هر ۱-فرم بسته‌ی ω بر $\mathbb{C} - \{۰,۱\}$ بر هر دو خم homologus یکی است. پس چون $\pi_۱(\mathbb{C} - \{۰,۱\})$ گروه آبلی آزاد با دو مولد $\mid z \mid = \frac{۱}{۲}$ و $\mid z - ۱ \mid = \frac{۱}{۲}$ است (که در جهت مثلثاتی پرمایش شده‌اند) اگر انتگرال ω بر هر دو خم مذکور صفر باشد دقیق است. پس یک نگاشت $\mathbb{C}$-خطی یک به یک به صورت زیر داریم:*

$$\begin{cases} H^{۱}_{DR}(\mathbb{C} - \{۰,۱\},\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^{۲} \\ [\omega] \mapsto (\int_{\mid z\mid=\frac{۱}{۲}} \omega, \int_{\mid z-۱\mid=\frac{۱}{۲}} \omega) \end{cases}$$

[۲۰] direct system
[۲۱] Leray

ولی این پوشا هم هست. چرا که برای ۱-فرم‌های بسته‌ی $\frac{\mathrm{d}z}{z}$ و $\frac{\mathrm{d}z}{z-1}$ بر $\mathbb{C}-\{0,1\}$:

$$\left(\int_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}z}{z},\int_{|z-1|=\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}z}{z}\right)=(2\pi i,0)$$

$$\left(\int_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}z}{z-1},\int_{|z-1|=\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}z}{z-1}\right)=(0,2\pi i)$$

پس $H^1_{DR}(\mathbb{C}-\{0,1\},\mathbb{C})\cong\mathbb{C}^2$. (کوهمولوژی درام با ضرایب در $\mathbb{C}$)

مثال ۱۱. *محاسبه‌ی $H^1_{sing}(\mathbb{C}-\{0\})$ (با ضرایب مختلط): دنباله‌ی بلند دقیق در کوهمولوژی تکین برای زوج $(\mathbb{C},\mathbb{C}-\{0\})$ را می‌نویسیم. چون $\mathbb{C}$ «انقباض‌پذیر[22]» است:*

$$H^1_{sing}(\mathbb{C}-\{0\})\cong H^2_{sing}(\mathbb{C},\mathbb{C}-\{0\})\cong_{\text{بنا بر excision}}\oplus_{i\in\{1,2\}}H^2_{sing}(D,D-\{0\})$$

$$\cong_{\text{انقباض‌پذیر }D}\oplus_{i\in\{1,2\}}H^1_{sing}(D-\{0\})\cong_{\text{هموتوپ با دایره‌ی واحد }D-\{0\}}\oplus_{i\in\{1,2\}}H^1_{sing}(S^1)\cong\mathbb{C}^2$$

که در آن D گوی باز واحد در $\mathbb{C}$ است.

مثال ۱۲. *محاسبه‌ی کوهمولوژی چک: پوشش باز $\mathcal{U}$ از $\mathbb{C}-\{0,1\}$ را به صورت زیر می‌گیریم:*

$$\mathcal{U}=\{U_i\}_{i\in I=\{1,2,3\}}$$

$$U_1=\mathbb{C}-(-\infty,1]$$

$$U_2=\mathbb{C}-[0,\infty)$$

$$U_3=\mathbb{C}-((-\infty,0]\cup[1,\infty))$$

هر سه‌ی این بازه‌ها انقباض‌پذیرند چرا که «ستاره‌گون[23]» هستند. پس می‌توان قضیه‌ی ۹ را به کار برد. باید زیرفضاهای $Z^1(\mathcal{U},\mathbb{C})$ و $B^1(\mathcal{U},\mathbb{C})$ از

$$\prod_{1\leq i,j\leq 3}\Gamma(U_i\cap U_j,\mathbb{C})$$

را یافت که در آن $\Gamma(V,\mathbb{C})$ برای هر باز V، فضای برداری‌ای است که بافه‌ی ثابت $\mathbb{C}$ به باز V از $\mathbb{C}-\{0,1\}$ نسبت می‌دهد. یعنی فضای توابع موضعا ثابت $V\to\mathbb{C}$. بنابر تعریف:

$$\begin{cases}Z^1(\mathcal{U},\mathcal{F}=\{(f_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}\in\prod_{1\leq i,j\leq 3}\Gamma(U_i\cap U_j,\mathbb{C})\mid f_{ij}+f_{jn}=f_{in}:\text{بر } U_i\cap U_j\cap U_n\}\\ B^1(\mathcal{U},\mathcal{F})=\{(g_i|_{U_i\cap U_j}-g_j|_{U_i\cap U_j})_{1\leq i,j\leq 3}\in\prod_{1\leq i,j\leq 3}\Gamma(U_i\cap U_j,\mathbb{C})\mid\forall i:g_i\in\Gamma(U_i,\mathbb{C})\}\end{cases}$$

شرط ظاهر شده در تعریف $Z^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$ نتیجه می‌دهد که برای $(f_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}$ در $Z^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$: $f_{ii}\equiv 0$ و $f_{ij}=-f_{ji}$. پس با استفاده از این تقارن می‌توان فقط حالت $i<j$ را در نظر گرفت. در این صورت

$$\begin{cases}Z^1(\mathcal{U},\mathcal{F})=\{(f_{12},f_{23},f_{13})\mid \text{بر } U_1\cap U_2\cap U_3\ f_{12}+f_{23}=f_{13} \text{ است و } \text{هر } f_{ij} \text{ تابع موضعا ثابتی بر باز } U_i\cap U_j\}\\ B^1(\mathcal{U},\mathcal{F})=\{(g_1-g_2,g_2-g_3,g_1-g_3)\mid \text{هر } g_i \text{ تابع موضعا ثابتی بر باز } U_i \text{ است.}\}\end{cases}$$

ولی برای هر $1\leq i,j\leq 3$: $U_i\cap U_j=\mathbb{C}-\mathbb{R}$ دو مولفه‌ی همبندی دارد و لذا بعد فضای توابع موضعا ثابت مختلط مقدار بر آن ۲ است. پس $Z^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$ را می‌توان با زیرفضای زیر از $\mathbb{C}^2\times\mathbb{C}^2\times\mathbb{C}^2$ یکی گرفت:

$$Z^1(\mathcal{U},\mathcal{F})=\{(x,y,z,w,x+z,y+w)\mid x,y,z,w\in\mathbb{C}\}\tag{۴}$$

در صورتی که بر هر U_i به دلیل همبند بودن، فضای $\Gamma(U_i,\mathbb{C})$ از توابع موضعا ثابت $U_i\to\mathbb{C}$ یک بعدی است. یعنی تمام این توابع ثابت هستند. پس $B^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$ در واقع زیرفضای زیر از $\mathbb{C}^2\times\mathbb{C}^2\times\mathbb{C}^2$ است:

$$B^1(\mathcal{U},\mathcal{F})=\{(\alpha-\beta,\alpha-\beta,\beta-\gamma,\beta-\gamma,\alpha-\gamma,\alpha-\gamma)\mid\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{C}\}\tag{۵}$$

---
[22] contractible
[23] starlike

(هر مولفه‌ی $\mathbb{C}^۲$ در واقع مقدار تابع بر دو مولفه‌ی همبندی $\mathbb{C}-\mathbb{R}$ است.) لذا از (۱) و (۲)، فضای برداری خارج قسمتی $Z^۱(\mathcal{U},\mathcal{F})/B^۱(\mathcal{U},\mathcal{F})$ دو بعدی است. چرا که $B^۱(\mathcal{U},\mathcal{F})$ در واقع هسته‌ی

$$\begin{cases} Z^۱(\mathcal{U},\mathcal{F})\to\mathbb{C}^۲ \\ (x,y,z,w,x+z,y+w)\mapsto(x-y,z-w)\end{cases}$$

است. لذا برای بافه‌ی ثابت $\mathbb{C}$:

$$H^۱(\mathbb{C}-\{۰,۱\},\mathbb{C})\cong\mathbb{C}^۲$$

قضیه ضریب جهانی برای همولوژی

علی کلامی

چکیده

این مقاله به بحث در مورد قضیه ضریب جهانی برای همولوژی [1] و معرفی مختصری از جبر همولوژیکی می‌پردازد. که با دنباله‌های دقیق [2] متنوع شروع می‌شود، سپس ضرب تانسوری و تصویر مدول‌ها را تعریف خواهیم‌کرد، که موضوع مورد توجه، گروه‌های همولوژی، و جایگزینی برای محاسبه گروه‌های همولوژی در بعدهای بالاتر می‌شود.
یک مجتمع زنجیری از گروه‌های آبلی G_n داده‌شده‌است، آیا می‌توان برای محاسبه گروه‌های همولوژی $H_n(C;G)$ از مجتمع زنجیری [3] به همراه ضرب تانسوری با G جمله‌هایی از G و $H_n(C)$ استفاده کرد؟

۱ مقدمه

در توپولوژی جبری دیدیم که با استفاده از همولوژی منفرد می‌توان بین فضاهای توپولوژی مختلف تفاوت قائل شد، با این وجود ممکن است که بخواهید همولوژی با ضرایب دلخواه را محاسبه کنید. بنابراین به قضیه‌ای نیاز داریم که بین همولوژی با ضرایب دلخواه و همولوژی با ضریب $\mathbb{Z}$ رابطه برقرار کند.
در بخش ۲، به یادآوری پیش نیازهای مورد نیاز از جبر می‌پردازیم. در بخش ۳، مفهوم Tor را تعریف و قضیه ضریب جهانی برای همولوژی را اثبات می‌کنیم. در بخش آخر، به محاسبه دو مثال خواهیم‌پرداخت.

۲ درآمدی بر جبر

۱.۲ دنباله‌های دقیق

تعریف ۱.۲. یک جفت از همریختی‌های $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ در B دقیق است اگر $Im(f) = Ker(g)$. یک دنباله $\cdots \to A_{i-1} \to A_i \to A_{i+1} \to \cdots$ دقیق است اگر برای هر A_i بین دو همریختی دقیق باشد.

قضیه ۲.۲. یک دنباله $0 \to A \xrightarrow{f} B$ دقیق است اگر وتنها اگر f یک‌به‌یک باشد. به عبارت دیگر، یک دنباله $B \xrightarrow{g} C \to 0$ دقیق است اگر وتنها اگر g پوشا باشد.

اثبات. دقیق بودن در A نتیجه می‌دهد که $Ker(f)$ با تصویر همریختی $0 \to A$ برابر باشد، که صفر است. این با یک به یک بودن همریختی f هم ارز است.
به طریق مشابه، هسته همریختی $C \to 0$ برابر است با C، و $g(B) = C$ اگر وتنها اگر g پوشا باشد. □

[1] Universal Coeffcient Theorem for Homology
[2] Exact Sequences
[3] Chain Complex

نتیجه ۳.۲. یک دنباله $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ دقیق است اگر و تنها اگر f یک به یک و g پوشا باشد، و $Im(f) = Ker(g)$. می‌گوییم B یک گسترش از C توسط A است. این دنباله دقیق را یک دنباله کوتاه دقیق [۴] می‌نامیم.

مثال ۴.۲. دو $\mathbb{Z}$-مدول، $A = \mathbb{Z}$ و $C = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ را در نظر بگیرید، با آن‌ها می‌توان دو دنباله‌ای کوتاه دقیق متفاوت ساخت. اول، $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0$ که $f(a) = (a, 0)$ و $g(a, c) = c$.

$\mathbb{Z}$-مدول $\mathbb{Z}$ همچنین یک گسترش از $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ به $\mathbb{Z}$ است. دنباله

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0$$

در نظر بگیرد، که نگاشت n، z را به nz می‌فرستد، در حالی که p نگاشت تصویر است. توجه داشته باشید که حتی هرچند A و C در مثال مدول‌های مشابه‌ای هستند، $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ با $\mathbb{Z}$ یکریخت نیست، حال دو دنباله دقیق می‌سازیم که هم‌ارز نباشد.

بنابر اهمیت دنباله کوتاه دقیق سعی می‌کنیم یک دنباله‌ای بلند دقیق [۵] را به دنباله‌های کوتاه دقیق بشکنیم. یک دنباله دقیق از R-مدول‌ها

$$\cdots \to A_{n+2} \to A_{n+1} \to A_n \to A_{n-1} \to A_{n-2} \to \cdots$$

اگر

$$C_n \cong Ker(A_n \to A_{n-1}) \cong Im(A_{n+1} \to A_n)$$

به عنوان مثالی از ساختار جبری R-مدولی، یک گروه آبلی است، هم هسته [۶] از هر همریختی وجود دارد بطوری که $C_n \cong Coker(A_{n+2} \to A_{n+1})$. آنگاه یک دیاگرام جابه‌جایی به صورت زیر بدست‌می‌آوریم، در حالی که همه دنباله‌های مورب یک دنباله کوتاه دقیق هستند:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[dr] & & 0 & & 0 \arrow[dr] & & 0 & & \\
 & & & C_{n+1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & C_{n-1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
\cdots \arrow[rr] & & A_{n+2} \arrow[rr] \arrow[ur] & & A_{n+1} \arrow[rr] \arrow[dr] & & A_n \arrow[rr] \arrow[ur] & & A_{n-1} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \cdots \\
 & C_{n+2} \arrow[ur] & & & & C_n \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & C_{n-2} \arrow[dr] & \\
0 \arrow[ur] & & & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & & & 0
\end{tikzcd} \tag{1}$$

درنتیجه، جمله‌های میانی، دنباله‌های کوتاه دقیق هستند که در میان دیاگرام همپوشانی دارند، و یک دنباله دقیق را تشکیل می‌دهند.

تعریف ۵.۲. اگر $0 \to A \to B \to C \to 0$ و $0 \to A' \to B' \to C' \to 0$ دو دنباله کوتاه دقیق از مدول‌ها باشند. یک همریختی از دنباله‌های کوتاه دقیق یک سه تایی f, g, h از همریختی مدول‌ها است بطوریکه دیاگرام زیر جابه‌جایی می‌شود:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r] \arrow[d, "g"] & C \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{2}$$

---
[۴] Short Exact Sequence
[۵] Long Exact Sequence
[۶] Cokernel

اگر f, g, h همه یکریختی باشند، آنگاه این یکریختی، از دنباله‌های کوتاه دقیق است، که B و B' گسترش‌های یکریختی هستند.
دو دنباله دقیق را هم‌ارز گوییم اگر بصورت زیر باشند:

$$\begin{tikzcd} \circ \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & B \arrow[r] \arrow[d, "\approx"'] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & \circ \\ \circ \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & \circ \end{tikzcd} \qquad (۳)$$

تعریف ۶.۲. اگر $\circ \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to \circ$ دنباله کوتاه دقیق از R-مدول‌ها است. دنباله از هم جدا یا مجزا [۷] گوییم اگر $B = A \oplus C$ و هر دو یکریختی باشند. یک نگاشت $s : C \to B$ را یک قطعه [۸] از g می‌نامیم اگر $g \circ s = id$.
اگر s هم یک همریختی باشد، آنگاه آن را یک همریختی از هم جدا می‌نامیم.

از هم جدا بودن با هریک از رابطه‌های زیر معادل است:
(a) یک همریختی $p : B \to A$ وجود داشته باشد که $p \circ f = ۱ : A \to A$.
(b) یک همریختی $s : C \to B$ وجود داشته باشد که $g \circ s = ۱ : C \to C$.

مثال ۷.۲. دنباله دقیق $\circ \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \circ$ از هم جدا است، بنا بر تعریف. درمقابل، دنباله $\circ \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \circ$ از هم جدا نیست زیرا یک همریختی نا بدیهی از $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ندارد.

۲.۲ ضرب تانسوری مدول‌ها

تعریف ۸.۲. برای حلقه R، اگر M مدول راست و N مدول چپ باشند. ضرب تانسوری مدول‌ها [۹] $M \otimes N$ روی R یک گروه آبلی $M \times N$است بطوریکه که:

$$(m_۱ + m_۲, n) \sim (m_۱, n) + (m_۲, n)$$

$$(m, n_۱ + n_۲) \sim (m, n_۱) + (m, n_۲)$$

$$(mr, n) \sim (m, rn)$$

برای هر $m, m_۱, m_۲ \in M$ و $r \in R$.

قضیه ۹.۲. اگر L, M, N مدول‌های راست باشند، وD مدول چپ باشد. اگر
$$\circ \to L \xrightarrow{\psi} M \xrightarrow{\varphi} N \to \circ$$
دقیق باشد،آنگاه دنباله ایجاد شده از گروه‌های آبلی
$$L \otimes_R D \xrightarrow{\psi \otimes ۱} M \otimes_R D \xrightarrow{\varphi \otimes ۱} N \otimes_R D \to \circ$$
دقیق است.

اثبات. برای نشان دادن پوشا بودن $۱ \otimes \varphi$، می‌دانیم که φ پوشا است. آنگاه برای برخی از $m \in M$ داریم $n = \varphi(m)$. چون $(\varphi \otimes ۱)(m \otimes d) = \varphi(m) \otimes d = n \otimes d$. این یعنی این که $(\varphi \otimes ۱)$ یک همریختی پوشا از $M \otimes D$ به $N \otimes D$ است، موقعی که گروه‌های آبلی هستند. برای دقیق بودن در $M \otimes_R D$، کافی است تا نشان دهیم $\pi : M \otimes D / Im(\psi \otimes ۱) \to N \otimes D$ یک یکریختی است. برای ساختن معکوس π یک نگاشت به صورت زیر را تعریف می‌کنیم:

---
[۷] Split
[۸] Section
[۹] Tensor Product of Modules

$$p : N \times D \to M \otimes D/Im(\psi \otimes ۱)$$

بوسیله $p(n,d) = m \otimes d$ بطوریکه $\varphi(m) = n$. اگر $\varphi(m) = \varphi(m') = n$، آنگاه $m - m' = \psi(l)$ برای هر $l \in L$ باتوجه به دقیق بودن در M. این دلالت دارد به این که $m \otimes d - m' = (m - m') \otimes \otimes d = \psi(l) \otimes d \in Im(\psi \otimes ۱)$، بنابراین p خوش تعریف است.زمانی که p روی هر کلاس هم ارزی ثابت است، p نگاشت زیر را القاء می‌کند

$$p' : N \otimes D \to M \otimes D/Im(\psi \otimes ۱)$$

که یک همریختی و معکوس π است. □

تعریف ۱۰.۲. یک چپ R-مدول D رامسطح [۱۰] می نامیم اگر آن هریک از دو شرط معادل زیر را داشته باشد:
(۱) برای هر مدول راست L, M, N اگر

$$\circ \to L \xrightarrow{\psi} M \xrightarrow{\varphi} N \to \circ$$

دقیق باشد، آنگاه

$$\circ \to L \otimes D \xrightarrow{\psi \otimes ۱} M \otimes D \xrightarrow{\varphi \otimes ۱} N \otimes D \to \circ$$

دقیق باشد.
(۲) برای هر مدول راست L, M اگر ψ یک به یک باشد،آنگاه $\psi \otimes ۱$ یک به یک باشد.

نتیجه ۱۱.۲. مدول های آزاد مسطح هستند، نگاشت تصویر از مدول‌ها نیز مسطح هستند.

در نتیجه، برای هر R-مدول چپ D ، تابعگر $- \otimes D$ از رسته‌ای R-مدول راست به رسته‌ای گروه آبلی از راست دقیق است، در این صورت آن دقیق است اگر وتنها اگر D مدول مسطح باشد.اینجا به بیان تعدادی نتیجه می‌پردازیم:

نتیجه ۱۲.۲. (۱) برای هر R-مدول چپ D ،

$$\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} D = D \tag{۴}$$

(۲)برای هر $m, n \in \mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \tag{۵}$$

که d، ک.م.م از m و n است.
(۳) اگر M, M'، R -مدول راست و اگر N, N'، R -مدول چپ باشند. آنگاه یک گروه یکریختی یکتا به صورت زیر وجود دارد:

$$(M \oplus M') \otimes_R N \cong (M \otimes_R N) \oplus (M' \otimes N) \tag{۶}$$

بطوریکه $(m, m') \otimes n \longmapsto (m \otimes n, m' \otimes n)$.
یکریختی بطور مشابه برای $M \otimes_R (N \oplus N') \cong (M \otimes_R N) \oplus (M \otimes_R N')$ تعریف می‌شود.

۳.۲ مدول‌های تصویری

اگر R یک حلقه یک دار باشد، و اگر $\circ \to L \xrightarrow{\psi} M \xrightarrow{\varphi} N \to \circ$ یک دنباله کوتاه دقیق از R-مدول‌ها باشد. می‌خواهیم خواصی از L و N که مرتبط است با خواص M را پیدا کنیم. اول یک همریختی از R-مدول D به L یا N بطوریکه دلالت دارد به وجود همریختی از D به M در نظر می‌گیریم. اگر $f : D \to M$ و $\psi : L \to M$ باشند. آنگاه ترکیب f و ψ را یک همریختی $f' : D \to M$ تعریف می‌کنیم بطوریکه $f' = \psi \circ f$. این معادل است با جابه‌جایی بودن دیاگرام زیر:

[۱۰] Flat

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, dotted, "f'"] & \\
L \arrow[r, "\psi"] & M
\end{tikzcd}
$$

که ψ یک همریختی بین گروه‌های آبلی بصورت زیر القاء می‌کند:

$$\psi' : Hom_R(D,L) \to Hom_R(D,M) \qquad (۷)$$

$$f \to f' = \psi \circ f$$

قضیه ۱۳.۲. اگر D, L, M هریک R-مدول باشند. در صورتی که $\psi : L \to M$ نگاشت $\psi' : Hom_R(D,L) \to Hom_R(D,M)$ را القاء کند و $\psi : L \to M$ یک به یک باشد، آنگاه ψ' همچنین یک به یک است، به عبارت دیگر اگر $0 \to L \xrightarrow{\varphi} M$ دقیق باشد، آنگاه $0 \to Hom_R(D,L) \xrightarrow{\psi'} Hom_R(D,M)$ نیز دقیق است.

اثبات. اگر f, g دو همریختی متمایز در $Hom_R(D,L)$ باشند.آنگاه ترکیب $\psi \circ f, \psi \circ g$ به صورت $\psi \circ f, \psi \circ g : D \to M$ را درنظر می‌گیریم. زمانی که ψ یک به یک باشد، $\psi \circ f$ برای هر $f, g \in Hom_R$ متمایز، $\psi \circ f$ با $\psi \circ g$ متمایز می‌شود بنابراین یک همریختی ψ' القاء می‌کند که یک به یک است. $\square$

توجه کنید که دقیق بودن در N موجب نمی‌شود که

$$Hom_R(D,M) \xrightarrow{\phi} Hom_R(D,N) \to 0$$

دقیق باشد. یک مثال بارز دنباله دقیق $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0$ است. اگر $D = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ و $f \in Hom_R(D,N)$ یک نگاشت همانی باشد. از آن جایی که $\mathbb{Z}$ شامل هیچ عنصر از مرتبه متناهی جز صفر نیست،تنها یک همریختی صفر $F : D \to M$ وجود دارد، بطوریکه $p \circ F = 0 \neq f$ اما، در قضیه زیر داریم.

قضیه ۱۴.۲. اگر D, L, M, N هر یک R-مدول باشند. و دنباله $0 \to L \xrightarrow{\psi} M \xrightarrow{\varphi} N \to 0$ دقیق باشد، آنگاه دنباله زیر

$$0 \to Hom_R(D,L) \xrightarrow{\psi'} Hom_R(D,M) \xrightarrow{\varphi'} Hom_R(D,N)$$

دقیق است.

اثبات. برای اثبات این قضیه، کافی است ثابت کنیم که $Ker(\psi') = Im(\varphi')$. اول نشان می‌دهیم $Ker(\psi') \subset Im(\varphi')$، انتخاب می‌کنیم $F \in Hom_R(D,M)$ به طوری که

$$\varphi \circ F = 0$$

$$
\begin{tikzcd}
 & D \arrow[dl, dotted, "G"'] \arrow[d, "F"] \arrow[dr, "\varphi \circ F = 0"] & \\
L \arrow[r, hook, "\psi"] & M \arrow[r, two heads, "\varphi"] & N
\end{tikzcd}
$$

حال با توجه به اینکه برای هر عضو $d \in D$، $\varphi(F(d)) = 0$، نتیجه می‌گیریم که $F(d)$ در هسته φ قرار دارد. از این رو $Ker(\varphi) = Im(\psi)$، و برای هر $l \in L$ داریم $\psi(l) = F(d)$. بعلاوه یک به یک بودن ψ یکتایی l را تضمین می‌کند، که یک نگاشت خوشتعریف $G : D \to L$ در جایی که $G(d) = l$ می‌دهد. G رانسبت به ساختار R-مدولی ازD وL بررسی کنید. از این رو مثلث سمت چپ جابه جایی است، $F = \psi'$ برای هر $G \in Hom_R(D,L)$، بنابراین $F \in Im(\psi')$. از این جهت

$Ker(\psi') \subset Im(\psi')$. در نتیجه اگر F در تصویر ψ' باشد، آنگاه $F = \psi'(G)$ برای برخی از $G \in Hom_R(D, L)$، همچنین $\varphi(F(d)) = \varphi(\psi(G(d)))$ برای هر $d \in D$. بنابر دقیق بودن، $\varphi\circ\psi = 0$، و این دلالت دارد به اینکه $\forall d \in D, \psi(F(d)) = 0$، به عبارت دیگر F در هسته ψ' است، بنابراین اثبات کردیم $\varphi' \subset Ker(\psi')$ □

تعریف ۱۵.۲. یک R-مدول P، مدول تصویری [11] است اگر هر یک از شرایط معادل زیر را داشته باشد:

(۱) اگر $0 \to L \xrightarrow{\psi} M \xrightarrow{\varphi} N \to 0$ دقیق باشد، آنگاه

$$0 \to Hom_R(P, L) \xrightarrow{\psi'} Hom_R(P, M) \xrightarrow{\varphi'} Hom_R(P, N) \to 0$$

دقیق باشد.

(۲) اگر $M \xrightarrow{\varphi} N \to 0$ یک دنباله دقیق از مدول‌ها باشد. برای هر $f : P \to N$ ترفیع $F \in Hom_R(P, M)$ وجود داشته باشد به طوری که دیاگرام زیر جابه‌جایی بشود:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted, "F"'] \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "\psi"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

(۳) اگر P یک تقسیم R-مدول M باشد، آنگاه هر دنباله کوتاه دقیق بصورت زیر

$0 \to L \to M \to P \to 0$

از هم جدا باشد.

(۴) P جمع مستقیم از R-مدول‌های آزاد باشد.

توجه کنید مدول‌های آزاد تصویری هستند. یک مدول به طور متناهی تولید شده، تصویری است اگر و تنها اگر جمع مستقیم یک مدول آزاد به طور متناهی تولیده شده باشد. هر مدول یک تقسیم از یک مدول تصویری است. مدول‌های تصویری را به منظور تعریف کردن گروه‌های همولوژی Tor_n^R با استفاده از تجزیه تصویری تعریف کردیم.

تعریف ۱۶.۲. اگر B یک R-مدول باشد. یک تجزیه تصویری [12] از B یک دنباله دقیق بصورت زیر است:

$$\cdots \to P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \to \cdots \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} 0$$

بطوریکه هر P_i یک R-مدول تصویری باشد.

هر R-مدول یک تجزیه تصویری دارد. اگر p_0 یک R-مدول آزاد روی یک مجموعه از مولدهای از B باشد. آنگاه B یک جمع مستقیم از p_0 می‌باشد. اگر $\epsilon : P_0 \to B$ یک نگاشت تصویر باشد. از این رو ϵ پوشا، $\epsilon(P_0) = B = Ker(0)$، و دنباله ساخته شده $P_0 \to B \to 0$ دقیق می‌شود. برای همریختی d_1 تعریف می‌کنیم، $d_1(P_1) = Ker(\epsilon)$، و اگر P_1 نگاشتی از یک R-مدول آزاد به $Ker(\epsilon) \subset P_0$ باشد. این به ما دقیق بودن در P_0 می‌دهد. با تکرار این مراحل، یک تجزیه از B که در هر P_i، آزاد (بنابراین تصویری) می‌باشد بدست می آوریم. که آن را تجزیه آزاد [13] می‌نامیم.

۳ قضیه ضریب جهانی

۱.۳ $Tor_n^R(R, D)$

اگر B یک R-مدول باشد. یک تجزیه تصویری از B بصورت زیر می‌گیریم:

$$\cdots \to P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \to \cdots \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} B \to 0 \qquad (۸)$$

[11] Projective Module
[12] Projective Resolution
[13] Free Resolution

آنگاه با تانسور در D بدست می‌آوریم:

$$\cdots \to P_n \otimes D \xrightarrow{d_n \otimes 1} P_{n-1} \otimes D \to \cdots \xrightarrow{d_1 \otimes 1} P_0 \otimes D \xrightarrow{\epsilon \otimes 1} B \otimes D \to 0 \qquad (۹)$$

بنابراین:

$$Im(d_{n+1} \otimes 1) < Ker(d_n \otimes 1), (d_n \otimes 1) \circ (d_{n+1} \otimes 1) = (d_n \otimes 1)(Im(d_{n+1} \otimes 1)) = 0$$

برای هر n، دنباله (۹) یک مجتمع زنجیری می‌سازد، بنابراین ممکن است گروه‌های همولوژی خودش را بسازد.

تعریف ۱.۳. اگر D یک R-مدول چپ و B یک R-مدول راست باشند. برای هر تجزیه تصویری از B بوسیله R-مدول راست مانند بالا، ضرب تانسوری با D می‌گیریم، و تعریف می‌کنیم $d_n \otimes 1 : P_n \otimes D \to P_{n-1} \otimes D$ برای هر $n \geq 1$. آنگاه

$$Tor_n^R(B, D) = Ker(d_n \otimes D)/Im(d_n \otimes D), \qquad (۱۰)$$

که ما آن را n-امین گروه همولوژی حاصل از تابعگر $D \otimes -$ می‌نامیم.
هرگاه $R = \mathbb{Z}$ گروه $Tor_n^R(B, D)$ را به صورت $Tor_n(B, D)$نشان داده می شود.
توجه کنید که $Tor_0^R(B, D)$، ۰-امین همولوژی از $p_1 \otimes D \xrightarrow{d_1 \otimes 1} P_0 \otimes D \to 0$ می باشد.

بنابراین $Tor_n^R(B, D)$، n-امین گروه همولوژی از مجتمع زنجیری که از دنباله (۹) به وسیله حذف کردن جمله $B \otimes D$ بدست آمده است. گزاره بعدی مخصوص ۰-امین گروه همولوژی است.

گزاره ۲.۳. برای هر R -مدول راست B، داریم:

$$Tor_0^R(B, D) \cong B \otimes D$$

اثبات. اگر $\cdots \to P_0 \xrightarrow{\epsilon} B \to 0$ یک تجزیه تصویری از B باشد.

$$\begin{aligned} Tor_0^R(B, D) &= Ker(x)/Im(d_1 \otimes 1) && \text{(بنابر معادله۱۰)} \\ &= P_0 \otimes D/Im(d_1 \otimes 1) && \text{(} x \text{ پوچ می‌شود با } P_0 \otimes D\text{)} \\ &= P_0 \otimes D/Im(\epsilon \otimes 1) && \text{(بنابر دقیق بودن } P_0 \otimes D \text{ در۹)} \end{aligned}$$

بنابر دقیق بودن از راست ضرب تانسوری، دنباله $p_1 \otimes D \xrightarrow{d_1 \otimes 1} P_0 \otimes D \xrightarrow{\epsilon \otimes 1} B \otimes D \to 0$ دقیق است، بنابراین $B \otimes D = Im(\epsilon \otimes 1)$. و چون داریم،

$$Ker(\epsilon \otimes 1) = Im(d_1 \otimes 1) = (P_0 \otimes D)/(B \otimes D)$$

بنابراین $P_0 \otimes D/Ker(\epsilon \otimes 1) \cong B \otimes D$. □

در ادامه دو گزاره مهم را بیان خواهیم کرد، که آنها با هم خوشتعریف بودن گروه‌های همولوژی $Tor_n^R(B, D)$ از هر R-مدول، B را تضمین می‌کند. توجه چون اثبات آنها به موضوع مورد بحث ما ارتباط نداشته به آنها پرداخته نشده و علاقه مندان می‌توانند به کتاب هچر بخش $3.A$ مراجعه کنند.

گزاره ۳.۳. گروه‌های همولوژی $Tor_n^R(B, D)$ مستقل از، انتخاب تجزیه تصویری از B می‌باشد.

گزاره ۴.۳. اگر $f : B \to B'$ یک همریختی بین دو R-مدول باشد، به ترتیب یک تجزیه تصویری از B و B' بگیریم ، آنگاه برای هر $n \geq 0$ یک نگاشت شمول بصورت $\eta_n : Tor_n^R(B, D) \to Tor_n^R(B', D)$ روی گروه‌های همولوژی وجود دارد که از این تجزیه‌ها بدست آمده و تنها به f بستگی دارد.

اگر $0 \to L \xrightarrow{\psi} M \xrightarrow{\varphi} N \to 0$ یک دنباله کوتاه دقیق از مجتمع‌های زنجیری باشد به عبارت دیگر یک دنباله از همریختی مجتمع‌های $0 \to L_i \xrightarrow{\psi} M_i \xrightarrow{\varphi} N_i \to 0$ برای هر i کوتاه دقیق باشد، یا به طور معادل دیاگرام زیر را جابه جایی می‌کند:

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & N_{i+1} \arrow[r, "d_{i+1}"] \arrow[d, "\psi_{i+1}"'] & N_i \arrow[r, "d_i"] \arrow[d, "\psi_i"'] & N_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "\psi_{i-1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & M_{i+1} \arrow[r, "d_{i+1}"] \arrow[d, "\varphi_{i+1}"'] & M_i \arrow[r, "d_i"] \arrow[d, "\varphi_i"'] & M_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "\phi_{i-1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & L_{i+1} \arrow[r, "d_{i+1}"] \arrow[d] & L_i \arrow[r, "d_i"] \arrow[d] & L_{i-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
\tag{11}
$$

می توان آن را به یک دنباله بلند دقیق به صورت زیر بسط داد:

$$\cdots \to H_{i+1}(N) \to H_i(L) \to H_i(M) \to H_i(N) \to H_{i-1}(L) \to \cdots$$

در حال حاضر برای سادگی، کمی شرایط اولیه را تغییر می‌دهیم. برای دنباله کوتاه دقیق از R-مدول‌های راست $0 \to L \xrightarrow{\psi} M \xrightarrow{\varphi} N \to 0$، یک تجزیه آزاد برای هر یک از مدول‌های L, M و N پیدا می‌کنیم:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & P_1'' \arrow[r] \arrow[d] & P_0'' \arrow[r, "\epsilon''"] \arrow[d] & L \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & P_1' \arrow[r] \arrow[d] & P_0' \arrow[r, "\epsilon'"] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d] & P_0 \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd} \tag{۱۲}$$

بطوریکه $0 \to P_i'' \to P_i' \to P_i \to 0$ یک دنباله کوتاه دقیق مجزا برای هر i باشد. (اثبات وجودی آنها توسط لم هورس‌شو [۱۴] اثبات می‌شود که علاقه مندان می‌توانند این مطلب را در بخش $(۲,۲)$ کتاب ویبل ببینند.) هرگاه با یک R-مدول چپ D ، ضرب

[۱۴] Horseshoe Lemma

تانسوری کنیم و جمله‌های آخر آن را حذف کنیم، داریم:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & P''_2 \otimes D \arrow[r] \arrow[d] & P''_1 \otimes D \arrow[r] \arrow[d] & P''_0 \otimes D \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & P'_2 \otimes D \arrow[r] \arrow[d] & P'_1 \otimes D \arrow[r] \arrow[d] & P'_0 \otimes D \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & P_2 \otimes D \arrow[r] \arrow[d] & P_1 \otimes D \arrow[r] \arrow[d] & P_0 \otimes D \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd} \tag{13}$$

که هر دنباله کوتاه دقیق مجزا می‌باشد زیرا اصل آنها مجزا می‌باشد. آنگاه دنباله بلند دقیق از همولوژی از این دنباله‌های کوتاه دقیق از مجتمع‌های زنجیری را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$\begin{aligned}\cdots \to Tor_2^R(N,D) \xrightarrow{\delta_1} Tor_1^R(L,D) \xrightarrow{\psi_*} Tor_1^R(M,D) \xrightarrow{\varphi_*} Tor_1^R(N,D)\\ \xrightarrow{\delta_0} L\otimes D \xrightarrow{\psi_*} M\otimes D \xrightarrow{\varphi_*} N\otimes D \to 0\end{aligned} \tag{14}$$

نگاشت‌های δ_i را همریختی‌های همبندی [15] می‌نامیم.
همریختی همبندی را تعریف می‌کنیم: $\delta_i : Tor_i(N,D) \to Tor_{i-1}(L,D)$، فرض می‌کنیم $n \in Ker(d_i)$. از این رو φ_i پوشا می‌باشد، $m \in M_i$ وجود دارند بطوری که $\varphi_i(m) = n$. بر اساس محاسبه زیر:

$$\begin{aligned}\varphi_{i-1}(d_i(m)) &= d_i(\varphi_i(m)) && \text{(دیاگرام (11)جابه جایی است)}\\ &= d_i(n) = 0 && (n \in Ker(d_i))\end{aligned}$$

می‌دانیم که $d_i(m) \in Ker\varphi_{i-1} = Im\phi_{i-1}$. بنابراین یک $l \in L_{i-1}$ بصورت یکتا وجود دارد بطوری که $\varphi_{i-1}(l) = d_i(m)$.
توجه داشته باشید که

$$\begin{aligned}\varphi_{i-1}\circ d_i(l) &= d_i \circ \varphi_{i-1}(l) && \text{(دیاگرام (11)جابه جایی است)}\\ &= d_i \circ d_i(m) && (\varphi_{i-1}\text{یک به یک است})\\ &= 0 && (d_i(m) = 0)\end{aligned}$$

حال نگاشت $\delta_i : Tor_{i-1}(N,D) \to Tor_{i-1}(L,D)$ با ضابطه $\delta_i[n] = [l]$ تعریف می‌کنیم. که به سادگی می‌توان ثابت کرد که این نگاشت خوشتعریف و همریختی است و دنباله حاصل از آن دقیق است.

[15] Connecting Homomorphisms

۲.۳ برهان قضیه ضریب جهانی

حال با استفاده از مطالب بیان شده به اثبات قضیه ضریب جهانی برای همولوژی می‌پردازیم. اگر $\cdots \to C_n \xrightarrow{\delta_n} C_{n-1} \to \cdots$ یک مجتمع زنجیری از گروه‌های آبلی باشد. اگر $B_n = Im(\delta_n) \subset Z_n = Ker(\delta_n) \subset C_n$. بنابراین $\delta_n \mid_{Z_n} = 0$ و $\delta_n \mid_{B_n} = 0$، می‌توانیم B و C را به عنوان زیر مجتمع‌هایی از Z با نگاشت‌های کراندار بدیهی درنظر گرفت. این مطلب را به دنباله کوتاه دقیق از مجتمع های زنجیری تعمیم می‌دهیم:

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & Z_n \arrow[r] \arrow[d, "\delta_n = 0"] & C_n \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[d, "\delta_n"] & B_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\delta_n = 0"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & C_{n-1} \arrow[r, "\delta_{n-1}"] \arrow[d] & B_{n-2} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}
\tag{۱۵}
$$

زیر گروه‌های از گروه آبلی آزاد هستند،بنابراین $C_n \cong Z_n \otimes B_{n-1}$ دقت کنید که مجتمع زنجیری C مجموع مستقیمی از مجتمع‌های زنجیری Z و B نباشد،برای نگاشت‌های کراندار در C لزومی ندارد که بدیهی باشد، بر خلاف نگاشت‌هایی که در B و N هستند. بعد از ضرب تانسوری با G ،داریم:

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & Z_n \otimes G \arrow[r] \arrow[d, "\delta_n \otimes 1"] & C_n \otimes G \arrow[r, "\delta_n \otimes 1"] \arrow[d, "\delta_n \otimes 1"] & B_{n-1} \otimes G \arrow[r] \arrow[d, "\delta_n \otimes 1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z_{n-1} \otimes G \arrow[r] \arrow[d] & C_{n-1} \otimes G \arrow[r, "\delta_{n-1} \otimes 1"] \arrow[d] & B_{n-2} \otimes G \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}
\tag{۱۶}
$$

ضرب تانسوری با جمع مستقیم با توجه به رابطه (۶) جابه‌جا می‌شوند، بنابراین ردیف‌ها در دیاگرام دوم دقیق و مجزا هستند.با استفاده ازساختار (۱۴) یک دنباله بلند دقیق از گروه‌های همولوژی به صورت زیر داریم:

$$\cdots \to H_n(Z;G) \to H_n(C;G) \to H_n(B;G) \to H_{n-1}(Z;G) \to \cdots \tag{۱۷}$$

در دنباله اولیه، مجتمع زنجیری از Z_n تنها یک همریختی صفر دارد، بنابراین برای هر n داریم:
$$H_n(Z;G) = Z_n \otimes G/0 = Z_n \otimes G$$

بطور مشابه $H_n(B;G) = B_n \otimes G$.
دنباله بلند دقیق (۱۷) یکریخت است با:
$$\cdots \to B_n \otimes G \to Z_n \otimes G \to H_n(C;G) \to B_{n-1} \otimes G \to Z_{n-1} \otimes G \to \cdots \tag{۱۸}$$

$b\otimes g \in B_{n-1}\otimes G$ را در نظر می‌گیریم از این رو $\delta_n\otimes 1$ پوشا ست، و می‌توانیم $c\otimes g \in C_n\otimes G$ را با شرط $\delta_n\otimes 1(c\otimes g) = b\otimes g$ پیداکنیم. یعنی وقتی $\delta_n \otimes 1$ روی $C \otimes g$ اثر می‌دهیم جواب برابر است با $b \otimes g$ در $C_{n-1} \otimes G$.
بنابراین
$$B_{n-1} \otimes G \subset Z_{n-1} \otimes G, b \otimes g \in B_{n-1} \otimes G \Rightarrow b \otimes g \in z_{n-1} \otimes G$$

درنتیجه می‌توانیم نگاشت کرانداری را بصورت زیر تعریف کنیم:
$$i_n \otimes 1 : B_n \otimes G \to Z_n \otimes G$$

که i_n یک نگاشت شمول از $B_n \to Z_n$ می‌باشد.
با توجه به دیاگرام (۱)، می‌توانیم $H_n(C;G)$ را به عنوان A_n در نظر گرفت. با توجه به این
$$B_n \otimes G = A_{n+2}, Z_n \otimes G = A_{n+1}, \ldots$$

آنگاه با توسعه C_n می‌توانیم C_{n+1} رابسازیم. C_n و C_{n+1} را به ترتیب در جمله‌های از نگاشت‌های $i_n \otimes 1$ و $i_{n-1} \otimes 1$ تعریف خواهیم کرد.
$$C_n \cong Coker(A_{n+2} \to A_{n+1}) = Coker(B_n \otimes G \to Z_n \otimes G) = Coker(i_n \otimes 1) \tag{۱۹}$$

در حالی که
$$C_{n-1} \cong Ker(A_{n-1} \to A_{n-2}) = Ker(B_{n-1} \otimes G \to Z_{n-1} \otimes G) = Ker(i_{n-1} \otimes 1)$$

که هر دو باهم یک دنباله کوتاه دقیق می‌سازند:
$$0 \to Coker(i_n \otimes 1) \to H_n(C;G) \to Ker(i_{n-1} \otimes 1) \to 0 \tag{۲۰}$$

و $Coker(i_n \otimes 1) = Z_n \otimes G/Im(i_n \otimes 1)$. در ادامه باید $Coker(i_n \otimes 1)$ و $Ker(i_{n-1} \otimes 1)$ را پیدا کنیم.
در حالت کلی، دنباله $A \xrightarrow{f} B \to Coker(f) \to 0$ با تعریف $Coker(f) = B/f(A)$ دقیق است.
در مورد دنباله $B_n \xrightarrow{i_n} Z_n \to Coker(i_n) \to 0$، در واقع می‌دانیم که $Coker(i_n) = H_N(C)$. بنابر دقیق بودن از راست ضرب تانسوری داریم:

$$\begin{tikzcd}
B_n \otimes G \arrow[r, "i_n \otimes 1"] \arrow[d, equal] & Z_n \otimes G \arrow[r] \arrow[d, equal] & Coker(i_n \otimes 1) \arrow[r] \arrow[d, dash, "\approx"] & 0 \\
B_n \otimes G \arrow[r, "i_n \otimes 1"] & Z_n \otimes G \arrow[r] & H_n(C) \otimes G \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{۲۱}$$

بنابر دیاگرام فوق نتیجه می‌شود که $Coker(i_n \otimes 1) \cong H_n(C) \otimes G$، و این نتیجه به انتخاب B_n و Z_n وابسته نیست.
هم اکنون $Ker(i_{n-1}\otimes 1)$ یا بطور معادل $Ker(i_n\otimes 1)$ را پیدا می‌کنیم، تجزیه آزاد از $H_n(C)$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B_n \arrow[r, "i_n"] \arrow[d, equal] & Z_n \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_n(C) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
& P_1 & P_0 & H &
\end{tikzcd} \tag{۲۲}$$

با ضرب تانسوری در G، داریم:

$$0 \to P_1 \otimes G \xrightarrow{i_n \otimes 1} P_0 \otimes G \to H \otimes G \to 0 \qquad (۲۳)$$

آنگاه $Tor_1^{\mathbb{Z}}$ را با استفاده از $H \otimes G$ محاسبه می‌کنیم، که $H_1(P_1 \otimes G) = Ker(i_n \otimes 1)$. بعد دو نتیجه بدست آمده را ترکیب می‌کنیم، و قسمت اول قضیه ضریب جهانی را اثبات می‌کنیم:

قضیه ۵.۳. اگر C یک مجتمع زنجیری از گروه‌های آبلی آزاد باشد، آنگاه دنباله‌های کوتاه دقیق طبیعی به صورت زیر وجود دارند:

$$0 \to H_n(C) \otimes G \to H_n(C;G) \to Tor_1(H_{n-1}(C), G) \to 0 \qquad (۲۴)$$

که برای هر n و G، و این دنباله‌ها هر چند به طور غیر طبیعی، مجزا هستند.

برای اثبات مجزا بودن، به دنباله کوتاه دقیق مجزا $0 \to Z_n \xrightarrow{f} C_n \xrightarrow{g} B_{n-1} \to 0$ باز می‌گردیم. بنابر مجزا بودن نگاشت $p : C_n \to Z_n$ به طوری که $p \circ f = 1_{Z_n}$ وجود دارد. بعلاوه p رامی‌توان به p' گسترش داد، به طوری که دیاگرام زیر را جابه‌جایی کند:

$$\begin{tikzcd}
C_n \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, dotted, "p'"] & \\
Z_n \arrow[r, "q"] & H_n(C)
\end{tikzcd} \qquad (۲۵)$$

یک نگاشت زنجیری $F : C_. \to H_.(C)$ در نظر می گیریم، و $H_.$ یک مجتمع زنجیری با اضافه کردن نگاشت‌های کراندار بین آنها می‌سازیم. بعد ضرب تانسوری آن با G نتیجه می‌دهد $F \otimes 1 : C_. \otimes G \to H_.(C) \otimes G$. وقتی از $C_. \otimes G$ همولوژی بگیریم، معمولا $H_n(C;G)$ بدست می‌آید. و وقتی از $H_.(C) \otimes G$ همولوژی بگیریم، ضمناً،آن به ما $H_n(C) \otimes G$ می‌دهد، که ناشی از همریختی‌های صفر است. بنابراین یک همریختی روی همولوژی بصورت زیر القاء می‌کند:

$$F_* : H_n(C;G) \to H_n(C) \otimes G$$

که مجزا بودن را اثبات می کند.

۴ کاربردها

در این بخش دو محاسبه از همولوژی با ضریب‌های دلخواه را نشان خواهیم‌داد. یادآوری

$$H_i(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{اگر } i=0 \text{ یا } i=n, n \text{ فرد} \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{اگر } 0<i<n \text{ و } n \text{ فرد} \\ 0 & o.w \end{cases} \qquad (۲۶)$$

مثال ۱.۴. اگر $C = \mathbb{R}P^n$ و $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. همولوژی $H_i(C;G)$ را محاسبه می‌کنیم.

به وسیله قضیه ضریب جهانی داریم، $H_i(C;G) \cong H_i(C) \otimes G \oplus Tor_1(H_{i-1}(C), G)$. هرحالت را بطور جداگانه درنظر می گیرم. برای $i=0$،

$$
\begin{aligned}
H_0(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) &\cong H_0(\mathbb{R}P^n)\otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\oplus Tor(H_{-1}(\mathbb{R}P^n);\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) && (24)\\
&= \mathbb{Z}\otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\oplus Tor(0,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) && (26)\\
&= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\oplus Tor(0,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) && (4)\\
&= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} && (\text{بدیهی } Tor)
\end{aligned}
$$

برای $i=1$،

$$
\begin{aligned}
H_1(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) &\cong H_1(\mathbb{R}P^n)\otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\oplus Tor(H_0(\mathbb{R}P^n);\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) && (24)\\
&= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\oplus Tor(\mathbb{Z},\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) && (26)\\
&= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\oplus Tor(\mathbb{Z},\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) && (4)\\
&= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} && (\text{پایین را ببینید})
\end{aligned}
$$

یک دنباله کوتاه دقیق آزاد از $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ به صورت $0 \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z} \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\to 0$ است. بعد از ضرب تانسوری با $\mathbb{Z}$ داریم:

$$0 \xrightarrow{d_2\otimes 1} \mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z} \xrightarrow{d_1\otimes 1} (\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\otimes\mathbb{Z} \xrightarrow{\epsilon\otimes 1} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\otimes\mathbb{Z}\to 0$$

که با دنباله اولیه برابر است. بنابراین $Tor(\mathbb{Z},\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})=0$. برای $1<i<n$ زمانی که i یک عدد صحیح فرد باشد،

$$
\begin{aligned}
H_i(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) &\cong H_i(\mathbb{R}P^n)\otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\oplus Tor(H_{i-1}(\mathbb{R}P^n);\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) && (24)\\
&= \mathbb{Z}\otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\oplus Tor(0,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) && (26)\\
&= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\oplus Tor(0,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) && (5)\\
&= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} && (\text{بدیهی } Tor)
\end{aligned}
$$

برای $1<i<n$ زمانی که i یک عدد صحیح زوج باشد،

$$
\begin{aligned}
H_i(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) &\cong H_i(\mathbb{R}P^n)\otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\oplus Tor(H_{i-1}(\mathbb{R}P^n);\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) && (24)\\
&= 0\otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\oplus Tor(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) && (26)\\
&= 0\oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

برای $i=n$ زمانی که i زوج باشد، داریم:

$$H_i(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0\otimes\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\oplus Tor(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

اگر i فرد باشد، آن برابر است با $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong Tor(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$.
به طور خلاصه، داریم $H_n(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$، که حتی ساده‌تر از هومولوژی با ضرایب $\mathbb{Z}$ است. مثال بعدی همچنین درباره $\mathbb{R}P^n$ است، با این تفاوت که G را $\mathbb{Q}$ در نظر می‌گیریم.

مثال ۲.۴. اگر $C=\mathbb{R}P^n$ و $G=\mathbb{Q}$. هومولوژی $H_i(C;G)$ را محاسبه می‌کنیم.

برای $i=0$، $H_i(C;G)=\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Q}\oplus 0=\mathbb{Q}$.
برای i زوج بین 0 و n داریم:

$$\underbrace{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Q}}_{=0}\oplus Tor(0,\mathbb{Q})=0$$

$\mathbb{Z}/۲\mathbb{Z}$ یک گروه آبلی تورشن [۱۶] است، در حالی که $\mathbb{Q}$ تحت جمع یک گروه تقسیم [۱۷] است. بنابراین حاصلضرب تانسوری آنها صفر است. برای $a \in \mathbb{Z}/۲\mathbb{Z}$ و $b \in \mathbb{Q}$، $۱ \otimes ۲b = (۱ \cdot ۲) \otimes b = ۲ \otimes b = ۰ \otimes b = ۰$. با استدلال مشابه، $Tor(\mathbb{Z}/۲\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) = ۰$، و $Tor(۰, \mathbb{Q}) = ۰$. برای هر i فرد بین ۰ و n، $۰ \otimes \mathbb{Q} \oplus Tor(\mathbb{Z}/۲\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) = ۰$.
برای $i = n$ فرد،

$$۰ \otimes \mathbb{Q} \oplus Tor(\mathbb{Z}/۲\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) = ۰$$

اگر i زوج باشد، آنگاه

$$\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Q} \oplus Tor(۰, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$$

مراجع

[1] D. S. Dummit and R. M. Foote, Abstract Algebra, John Wiley and Sons, Inc., New Jersey, 2004.

[2] A. Hatcher, Algebraic Topology, Cambridge University Press, New York, 2001.

[3] C. A. Weibel, An Introduction to Homological Algebra, Cambridge University Press, New York, 1994.

---
[۱۶] Torsion Abelian Group
[۱۷] Divisible Group

حدس کارتان[1]

سینا رضازاده بقال

در این مقاله اثبات Mihailecu Preda را برای حدس کارتان بررسی می‌کنیم.

حدس کارتان: تنها دو عدد متوالی کامل ۸ و ۹ هستند. به بیانی دیگر در دنباله‌ی زیر تنها دو عدد ۸ و ۹ متوالی هستند.

$$۱, ۴, ۸, ۹, ۱۶, ۲۵, ۲۷, ۳۲, ۳۶, \ldots$$

البته توجه کنید، برای هر $k \geq ۲$ ثابت، اعداد توان kام کامل به اندازه‌ی کافی از یکدیگر فاصله دارند. بنابراین باید نشان دهیم که معادله‌ی $x^n - y^m = ۱$ که $n, m \geq ۲$، $x, y \in \mathbb{Z}$ تنها دارای جواب $n = ۲, m = ۳$ و $x = ۳, y = ۲$ است.

بدون کاسته شدن از کلیت می‌توان فرض کرد که n, m اعداد اول هستند، زیرا که اگر $p \mid m$ و $q \mid n$ در این صورت:

$$x^n - y^m = ۱ \Rightarrow (x^{\frac{n}{q}})^q - (y^{\frac{m}{p}})^p = ۱$$

پس صورت نهایی حدس کارتان به صورت زیر است.

حدس کارتان: معادله‌ی $x^p - y^q = ۱$ که p, q اعدادی اول هستند، دارای جواب یکتای $(x, y, p, q) = (۳, ۲, ۲, ۳)$ است.

$p = ۲$ و $q = ۲$ را هر کدام به صورت جداگانه اثبات می‌کنیم. اما اثبات برای حالتی که p و q اعداد اول فرد هستند را در مقاله‌های بعدی می‌آوریم. البته برای اثبات این حالت ابتدا سه قضیه زیر را ثابت می‌کنیم.

قضیه ۱. *اگر $x^p - y^q = ۱$ جواب نابدیهی داشته باشد و p و q فرد باشند، آنگاه:*

$$p^{q-۱} \equiv ۱ \mod q^۲, q^{p-۱} \equiv ۱ \mod p^۲$$

قضیه ۲. *اگر $x^p - y^q = ۱$ جواب نابدیهی داشته باشد و p, q فرد باشند آنگاه:*

$$p \equiv ۱ \mod q \quad \text{یا} \quad q \equiv ۱ \mod p$$

قضیه ۳. *اگر $x^p - y^q = ۱$ جواب نابدیهی داشته باشد و p, q فرد باشند آنگاه:*

$$p < ۴q^۲, q < ۴p^۲$$

حال نشان می‌دهیم که این سه قضیه چگونه حدس کارتان را در حالت p, q فرد نتیجه می‌دهد.

طبق قضیه‌ی ۲، $p \equiv ۱ \mod q$ یا $q \equiv ۱ \mod p$. اما اگر (x, y, p, q) جواب مساله باشد، در این صورت $(-y, -x, q, p)$ نیز در معادله صدق می‌کند. پس بدون کاسته شدن از کلیت می‌توان فرض کرد $p \equiv ۱ \mod q$. اگر $p = qt + ۱$ آنگاه:

$$p^{q-۱} = (qt + ۱)^{q-۱} \equiv (q - ۱)qt + ۱ \equiv ۱ \mod q^۲ \Rightarrow q \mid t \Rightarrow p \equiv ۱ \mod q^۲$$

اما طبق قضیه ۳، $p < ۴q^۲$، پس $p \in \{q^۲ + ۱, ۲q^۲ + ۱, ۳q^۲ + ۱\}$. اگر $q \neq ۳$ آنگاه $۳ \mid ۲q^۲ + ۱$ و $q^۲ + ۱, ۳q^۲ + ۱$ هم زوج هستند. پس $q = ۳$ و $p = ۱۹$. اما در این حال $۳^{۱۸}$ به پیمانه‌ی $۱۹^۲$ با ۱ همنهشت نیست و طبق قضیه ۱ حکم نتیجه می‌شود.

اکنون مساله را برای $q = ۲$ ثابت می‌کنیم.

---

[1] Conjecture Cartan

قضیه ۴. $(V.A.Lebesgue - ۱۸۵۰)$ *برای هر عدد اول $p \geq ۲$، معادله‌ی $x^p = y^۲ + ۱$ جواب صحیح نابدیهی ندارد.*

اثبات. اگر $p = ۲$ که به وضوح حکم برقرار است. اما اگر p فرد باشد در این صورت چون که $x^p = (۱ + iy)(۱ - iy)$ و چون تمام یکال‌های $\mathbb{Z}[i]$ توان pام هستند، نتیجه می‌شود که $۱ + iy$ و $۱ - iy$ هر دو توان pام کامل در $\mathbb{Z}[i]$ هستند. بنابراین $c \in \mathbb{Z}[i]$ وجود دارد که $۱ + iy = c^p, ۱ - iy = \bar{c}^p$. در نتیجه:

$$۲ = (c + \bar{c})(c^{p-۱} - \cdots + \bar{c}^{p-۱}) \Rightarrow c + \bar{c} \mid ۲$$

و چون $c + \bar{c}$ صحیح است پس $c + \bar{c} = \pm ۲$ و لذا $c = \pm(۱ + bi)$ که $b \in \mathbb{Z}$. از طرفی $c \nmid ۱ + i$. چون اگر $۱ + i \mid c$ آن‌گاه $۱ + i \mid ۱ + iy$ و لذا y فرد خواهد بود. پس x زوج است و چون $p \geq ۳$ پس $۸ \mid y^۲ + ۱$ که غیرممکن است. پس $۱ + i \nmid c$ ولذا b نیز زوج است. داریم

$$(۱ + bi)^p + (۱ - bi)^p = \pm ۲ \Rightarrow \binom{p}{۲}(bi)^۲ + \cdots + \binom{p}{p-۱}(bi)^{p-۱} = ۰$$

اما توجه کنید که:

$$Ord_۲(\binom{p}{k}(bi)^k) > Ord_۲(\binom{p}{۲}(bi)^۲)$$

چون که:

$$\binom{p}{k}(bi)^k \binom{p}{۲}^{-۱}(bi)^{-۲} = \binom{p-۲}{k-۲} . \frac{۲}{k(k-۱)}(bi)^{k-۲}$$

اما k زوج است و در نتیجه:

$$Ord_۲(۲(bi)^{k-۲}) \geq k - ۱ > \frac{\log k}{\log ۲} \geq Ord_۲(k) = Ord_۲(k(k-۱))$$

پس

$$Ord_۲(\binom{p}{k}(bi)^k) > Ord_۲(\binom{p}{۲}(bi)^۲)$$

برای هر $k > ۲$ و زوج. اکنون به لم زیر توجه کنید.

لم ۵. *اگر $Ord_p(x_۱) < Ord_p(x_i)$ برای $۲ \leq i \leq n$ که $x_i \in \mathbb{Q}_p$، در این صورت:*

$$Ord_p(\sum x_i) = Ord_p(x_۱)$$

که p عدد اول دلخواه است.

پس داریم:

$$Ord_۲(\sum_{k=۱}^{\frac{p-۱}{۲}} \binom{p}{۲k}(bi)^{۲k}) = Ord_۲(\binom{p}{۲}(bi)^۲)$$

اما $Ord_۲(۰) = +\infty$ و لذا بایستی داشته باشیم $b = ۰$ و لذا $c = \pm ۱$ و $y = ۰$. □

اکنون حدس را برای حالت $p = ۲$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۶. *معادله‌ی*

$$x^۲ = y^q + ۱ \qquad (۱)$$

در مجموعه‌ی اعداد صحیح دارای تنها جواب نابدیهی $x = ۳, y = ۲, q = ۳$ است.

برای اثبات قضیه، ابتدا لم‌های زیر را ثابت می‌کنیم.

لم ۷. *اگر $q \geq ۳$، عددی فرد باشد و در معادله‌ی (۱) صدق کند، در این صورت x یا $-x$ در معادله‌های زیر صدق می‌کند:*

(*i*) $a,b\in\mathbb{Z}$ با $(۲a,b)=۱$ *وجود دارند که:*

$$x-۱=۲^{q-۱}a^q, x+۱=۲b^q, y=۲ab$$

(*ii*) $y\geq ۲^{q-۱}-۲$

اثبات. i) $(x-۱)(x+۱)=y^q$. اگر x زوج باشد آن‌گاه $(x-۱,x+۱)=۱$ و چون هر دو توان qام کامل هستند و اختلاف ۲ دارند پس بایستی ±۱ باشند ولذا $x=۰$.

پس x فرد است و لذا $۲^q \mid (x-۱)(x+۱)$، با تغییر علامت x می‌توان فرض کرد که $x\equiv ۱ \mod ۴$.

$$(\frac{x-۱}{۲^{q-۱}})(\frac{x+۱}{۲})=(\frac{y}{۲})^q$$

ولی $(\frac{x-۱}{۲^q},\frac{x+۱}{۲})=۱$، پس:

$$\frac{x-۱}{۲^{q-۱}}=a^q, \frac{x+۱}{۲}=b^q$$

پس قسمت اول ثابت شد.

حال برای (ii) داریم:

$$۲^{q-۱}\mid x-۱ \Rightarrow ۲b^q\equiv ۲ \mod ۲^{q-۱} \Rightarrow b^q\equiv ۱ \mod ۲^{q-۲}$$

اما $Ord(b)$ در $\mathbb{Z}^*_{۲^{q-۲}}$ توانی از ۲ است زیرا که $|\mathbb{Z}^*_{۲^{q-۲}}|$ توان ۲ است. پس از رابطه‌ی بالا نتیجه می‌شود که $b\equiv ۱ \mod ۲^{q-۲}$. لذا:

$$|b|\geq ۲^{q-۲}-۱\Rightarrow |۲ab|\geq ۲^{q-۱}-۲$$

پس این لم نیز ثابت می‌شود. $\square$

لم ۸. *فرض کنید* $q\geq ۳$ *عددی اول و* $x^۲-y^q=۱$. *در این صورت* $q\mid x$.

اثبات. داریم $x^۲=(y+۱)(\frac{y^q+۱}{y+۱})$. اگر $d=\gcd(y+q,\frac{y^q+۱}{y+۱})$، آن‌گاه:

$$\frac{y^q+۱}{y+۱}=y^{q-۱}-y^{q-۲}+\cdots-۱\equiv -q \mod d\Rightarrow d\mid q$$

اگر $q\nmid x$ آن‌گاه $(d,q)=۱$ پس $d=۱$. بنابراین $y+۱$ و $\frac{y^q+۱}{y+۱}$ هردو مربع کامل هستند. و مثلا $y+۱=u^۲$ و $\frac{y^q+۱}{y+۱}=v^۲$.

حال $(x,y^{\frac{q-۱}{۲}})$ جوابی برای $x^۲-Yy^۲=۱$ است. چون $y+۱=u^۲$ پس y مربع کامل نیست. و لذا در $\mathbb{Z}[\sqrt{y}]$، $x+y^{\frac{q-۱}{۲}}\sqrt{y}$ یکال است. حال به لم زیر توجه کنید:

لم ۹. *گروه یکال‌های* $\mathbb{Z}[\sqrt{y}]$ *در حالتی که* $y+۱=u^۲$ *توسط* $u+\sqrt{y}$ *تولید می‌شوند.*

برهان لم: اگر $a+b\sqrt{y}$ در $\mathbb{Z}[\sqrt{y}]$ یکال باشد، در این صورت $k\in\mathbb{Z}$ را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که:

$$۱\leq (a+b\sqrt{y})(u+\sqrt{y})^k<u+\sqrt{y}$$

پس از ابتدا بدون کاسته شدن از کلیت فرض کنید $۱\leq a+b\sqrt{y}<u+\sqrt{y}$.

چون $a+b\sqrt{y}$ یکال است پس $a^۲-b^۲y=\pm۱$. به راحتی می‌توان بررسی کرد برای $a\neq ۱$ رابطه‌ی

$$۱\leq a+b\sqrt{y}<u+\sqrt{y}$$

نمی‌تواند برقرار باشد. پس $a=۱$, $b=۰$ و لذا برای هر یکال مانند $a+b\sqrt{y}$ در $\mathbb{Z}[\sqrt{y}]$ توان $k\in\mathbb{Z}$ وجود دارد که $(u+\sqrt{y})^k=a+b\sqrt{y}$.

پس، $m\in\mathbb{Z}$ وجود دارد که $x+y^{\frac{q-۱}{۲}}\sqrt{y}=(u+\sqrt{y})^m$. از آن‌جا که $(u+\sqrt{y})^{-۱}=-(-u+\sqrt{y})$ بنابراین:

$$x\equiv \pm(u^m+umm^{m-۱}\sqrt{y}) \mod y\mathbb{Z}[\sqrt{y}]$$

پس $x\pm u^m\equiv mu^{m-۱}\sqrt{y}$ به پیمانه‌ی $y\mathbb{Z}[\sqrt{y}]$ و در نتیجه $mu^{m-۱}\equiv ۰ \mod y$ ولی $(y,u)=۱$ و لذا $m\mid y$. اما y زوج است و لذا m نیز زوج است. داریم:

$$x+y^{\frac{q-۱}{۲}}\sqrt{y}=\pm(u^۲+y+۲u\sqrt{y})^{\frac{m}{۲}}$$

اگر دو طرف معادله را به پیمانه $u\mathbb{Z}[\sqrt{y}]$ در نظر بگیریم، بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} &x+y^{\frac{q-1}{2}}\sqrt{y} \equiv \pm y^{\frac{m}{2}} \mod u\mathbb{Z}[\sqrt{y}] \\ &\Rightarrow u \mid x+y^{\frac{q-1}{2}}\sqrt{y} \pm y^{\frac{m}{2}} \\ &\Rightarrow u \mid y^{\frac{q-1}{2}} \end{aligned}$$

اما $(y,u)=1$ پس $u=1$ و $y=0$. تناقض حاصل نشان می‌دهد که فرض خلف باطل است و $q \mid x$. $\square$

اکنون با توجه به لم زیر حکم به راحتی نتیجه می‌شود.

لم ۱۰. *اگر* $q \geq 3$ *و* $x^2-y^q=1$ *در این صورت* $x \equiv \pm 3 \mod q$.

اثبات. می‌دانیم که $x-1=2^{q-1}a^q$ و $x+1=2b^q$ برای $a,b \in \mathbb{Z}$ که $(2a,b)=1$. داریم:

$$\begin{aligned} &b^{2q}-(2a)^q=(\frac{x+1}{2})^2-2(x-1)=(\frac{x-3}{2})^2 \\ &\Rightarrow (b^2-2a)(\frac{b^{2q}-(2a)^q}{b^2-2a})=(\frac{x-3}{2})^2 \end{aligned}$$

حال اگر $\gcd(b^2-2a,\frac{b^{2q}-(2a)^q}{b^2-2a})=1$ آن‌گاه، $b^2 \geq 2a$. زیرا که اگر $b^2<2a$ آن‌گاه سمت چپ عبارت بالا منفی خواهد شد. پس $b^2-2a=c^2$. داریم:

$$\mid 2a \mid = \mid c^2-b^2 \mid \geq 2 \mid b \mid -1 \Rightarrow \mid a \mid \geq \mid b \mid$$

از طرفی دیگر:

$$\mid a \mid^q = \frac{\mid x-1 \mid}{2^{q-1}} \leq \frac{\mid x-1 \mid}{16} < \frac{\mid x+1 \mid}{2} = \mid b \mid^q \Rightarrow \mid a \mid < \mid b \mid$$

توجه کنید که برای $q=3$ حکم از لم قبل نتیجه می‌شود، پس فرض کردیم $q \geq 5$.

تناقض حاصل نشان می‌دهد که $\gcd(b^2-2a,\frac{b^{2q}-(2a)^q}{b^2-2a})=1$ برقرار نیست، اما می‌دانیم که اگر $(x,y)=1$ آنگاه $\gcd(x-y,\frac{x^q-y^q}{x-y}) \mid q$. زیرا که اگر $d=\gcd(b^2-2a,\frac{b^{2q}-(2a)^q}{b^2-2a})$ آن‌گاه:

$$d \mid x^{q-1}+x^{q-2}y+\cdots+y^{q-1} \Rightarrow qx \equiv 0 \mod d$$

اما $(d,x)=1$، پس $d \mid q$. بنابراین $q \mid (\frac{x-3}{2})^2$ و لذا $x \equiv 3$ به پیمانه q. اما بایستی $-x$ را هم در نظر بگیریم، چون x را به گونه‌ای انتخاب کرده بودیم که $x \equiv 1 \mod 4$ پس در حالت کلی $x \equiv \pm 3 \mod q$. $\square$

پس کافی است حالت $x^2-y^3=1$ را حل کنیم که آن را در مقاله‌ی بعد بررسی می‌کنیم.

بررسی نظریه حراج و کاربردهای آن در مدیریت

علیرضا صادقی‌پور

چکیده

یکی از کاربردهای جالب نظریه‌ی بازی‌ها در علوم مدیریتی و اقتصادی، مبحث طراحی مکانیزم است که در آن مکانیزم‌های اقتصادی برای رسیدن به اهداف خاص مانند بیشینه کردن سود، وادار کردن افراد به فاش کردن اطلاعات خصوصی و ... طراحی می‌شوند. یکی از این مکانیزم‌ها، حراج است. در نظریه‌ی حراج، از مفاهیم مختلفی از حوزه‌ی نظریه‌ی بازی‌ها و هم‌چنین نظریه‌ها و ساختارهای متعارف اقتصادی استفاده می‌شود. در این نوشته سعی بر آن شده است تا به گونه‌ای مختصر و مفید به بررسی حراج بپردازیم. در بخش اول به بررسی تئوری حراج‌های مختلف و ویژگی‌های آن می‌پردازیم. در بخش دوم سعی می‌کنیم یکی از انواع مختلف حراج را بیشتر بررسی کنیم و در مورد ویژگی خاص آن، که تشویق کردن افراد به راست‌گویی است، توضیح دهیم . در نهایت در بخش آخر به دو مثال کاربردی از استفاده از حراج‌ها برای نشان دادن اهمیت آن‌ها خواهیم‌پرداخت.

حراج

تعریف و انواع حراج

حراج را می‌توان یک سازوکار شبیه بازار دانست که در آن قواعد صریح و مشخصی وجود دارد. این قواعد نحوه‌ی اختصاص منابع و قیمت‌ها را بر اساس پیشنهاد[1] هر یک از افراد درگیر در بازار تعیین می‌کنند. کالاهایی که معمولا در حراج به فروش می‌رسند، انواع مختلفی دارند. مانند محصولات هنری، کتاب‌ها و اجناس عتیقه، تولیدات کشاورزی، حق برداشت از معادن، اوراق مشارکت و قرضه‌ی دولتی و شرکتی و حتی طلا. برای مثال از کاربرد حراج، نحوه‌ی فروش بردگان در زمان‌های گذشته را نیز می‌توان نام برد.

پرسش اصلی این است که چرا از حراج به جای سازوکارهای دیگر خرید و فروش کالا مثل ارائه‌ی کالا با قیمت مشخص، استفاده می‌کنیم؟ اولین پاسخی که به ذهن می‌رسد این است که برای برخی از کالاها نمی-توان قیمتی تعیین کرد. برای مثال در بازار عرضه‌ی ماهی‌های تازه صیدشده، قیمت هر ماهی بسته به میزان عرضه و تقاضا دارد که در هر لحظه احتمال تغییر دارد.

گاهی اوقات یک خریدار می‌خواهد کالایی را از یکی از چند فروشنده تهیه کند. این حالت نیز نوعی حراج است که حراج وارونه نیز گفته می‌شود. هر چند با تعریفی که عموم مردم از حراج دارند، همسو نیست. دولت‌ها بهترین مثال استفاده از این نوع حراج هستند. در اقتصادهای مدرن خرید دولت از بخش خصوصی، چیزی حدود ۱۰ درصد تولید ناخالص ملی را تشکیل می‌دهد. در اکثر کشورها، دولت با یک حراج دربسته[2] کالا را از کسی که کمترین قیمت (با اطمینان از کیفیت) را ارائه کرده‌است، می‌خرد.

از کاربردهای جالب دیگر حراج می‌توان موارد زیر را نام برد:

- حراج حق انحصار طبیعی
- حراج تعرفه‌های واردات به منظور تشخیص میزان کارایی این تعرفه‌ها

[1] bid
[2] Sealed bid

- استفاده از سازوکار حراج برای انتخاب مکان احداث تاسیسات نامطلوبی مانند زندان یا محل دفن زباله‌های خطرناک

- حراج بازه‌های زمانی استفاده از فرودگاه بین خطوط هوایی به جای روش قدیمی تعرفه‌ای

چهار نوع مختلف حراج برای فروش یک کالای مشخص استفاده می‌شوند:

۱. ۱. حراج انگلیسی[۳] : این مدل شناخته شده‌ترین حراج در بین مردم است که در آن مجری حراج، از یک قیمت پایه شروع کرده و با بالا بردن قیمت، کالا را به فردی که بیشترین قیمت را پیشنهاد داده است، می‌فروشد. شرط اصلی حراج انگلیسی این است که هر پیشنهاد دهنده در هر لحظه مقدار دقیق آخرین پیشنهاد را بداند. کالاهای هنری و اجناس عتیقه معروف‌ترین مثال حراج انگلیسی هستند.

۲. ۲. حراج هلندی[۴] : حراج هلندی، برعکس حراج انگلیسی است. در این حراج، مجری از یک قیمت پایه‌ی بالا شروع می‌کند و قیمت را در هر مرحله کاهش می‌دهد، تا جایی که یک نفر قیمت را بپذیرد. این روش برای فروش گل‌های تازه چیده شده در هلند، ماهی در اسرائیل و تنباکو در کانادا به کار می‌رود.

۳. ۳. حراج دربسته‌ی قیمت اول[۵] : در این حراج هر فرد، پیشنهاد دربسته‌ی خود را اعلام می‌کند و کالا به فردی که بیشترین پیشنهاد را داده است با همان قیمت پیشنهادی فروخته می‌شود. تفاوت مهم این حالت با حراج انگلیسی این است که در حراج انگلیسی هر فرد از پیشنهاد دیگران مطلع می‌شود و با داشتن این اطلاع می‌تواند پیشنهاد خود را تغییر دهد، اما در حراج دربسته افراد به طور هم‌زمان و بدون اطلاع از رقم پیشنهاد دیگران، پیشنهاد خود را اعلام می‌کنند. در فروش حق برداشت از معادن و گاهی اوقات فروش آثار هنری از این حراج استفاده می‌شود اما مهم‌ترین کاربرد آن همان استفاده‌ی دولت برای خرید کالا یا خدمات از شرکت‌های خصوصی است.

۴. ۴. حراج دربسته‌ی قیمت دوم[۶] : مشابه حالت بالا با این تفاوت که برنده، قیمت پیشنهادی خود را نمی-پردازد بلکه قیمت نفر پس از خود را پرداخت می‌کند. این مدل با این که فواید نظری فراوانی دارد اما کمتر در عمل استفاده می‌شود.

بدون شک مدل‌های فراوان دیگری با اعمال تغییراتی در هر یک از این چهار مدل اصلی استفاده می‌شوند. برای مثال فروشنده گاهی اوقات یک قیمت پایه در نظر می‌گیرد و پیشنهادهایی که خیلی پایین هستند، کلا حذف می‌کند. ممکن است فرصت افراد برای پیشنهاد دادن محدود باشد. حراج‌گذار ممکن است از افراد حق ورود دریافت کند. یا در یک حراج انگلیسی ممکن است فروشنده یک حداقل میزان قابل قبول برای افزایش پیشنهادها در هر مرحله تعیین کند.

دو پرسش مهمی که در ادامه به طور دقیق‌تر بررسی خواهند شد این است که اصولا چرا به جای سازوکارهای دیگر از حراج استفاده می‌شود؟ و با توجه به تنوع روش‌های مختلف حراج، در هر شرایطی از کدام باید استفاده کرد؟

توانایی ایجاد تعهد

حراج‌ها معمولا در شرایط انحصاری به کار می‌روند. در شرایطی که در آن یک فروشنده یا یک خریدار وجود دارند. هر چند که در شرایط رقابتی مانند فروش ماهی یا محصولات کشاورزی نیز بعضا به کار می‌روند. در ادامه بیشتر تاکید ما بر شرایط انحصاری حراج خواهد بود.

در نظریه‌ی حراج‌ها یک فرض اساسی این است که حراج‌گذار قبل از شروع حراج قواعد خود را کاملا مشخص کرده است و پس از دریافت پیشنهادها امکان ندارد این قواعد را تغییر دهد. هر چند که این کار ممکن است به نفع وی باشد. تعهد حراج‌گذار به این قاعده بسیار مهم است زیرا برای مثال در یک مدل ساده مثل حراج دربسته‌ی قیمت اول نیز، فروشنده پس از دیدن پیشنهادهای افراد از نحوه‌ی ارزش‌دهی آن‌ها به کالا مطلع خواهد شد. وی می‌تواند کالا را با قیمتی بیشتر از بالاترین پیشنهاد ولی در عین حال کمتر از بالاترین ارزش-دهی ارائه کند. در این شرایط فردی که بیشترین ارزش را برای کالا قادر است، حاضر است با این قیمت کالا را بخرد. البته باید توجه داشت که اگر شرکت‌کنندگان در حراج احتمال دهند که فروشنده این چنین رفتار خواهد کرد بدون شک رفتار آن‌ها نیز تغییر خواهد کرد.

[۳] English auction
[۴] Dutch auction
[۵] First-price sealed-bid auction
[۶] Second-price sealed-bid auction

فایده‌ی این تعهد در این است که قواعد حراج می‌توانند به نحوی تنظیم شوند که فروشنده را به هدف معین خود برساند. برای مثال همان‌طور که در فصل‌های بعد خواهیم دید، می‌توان قواعدی را تنظیم کرد که همه‌ی افراد ارزش‌دهی واقعی خود را برای کالا اعلام کنند یا قوانینی گذاشت که سود فروشنده را بیشینه کند.

روش‌های فراوانی برای دست‌یابی به این میزان از تعهد وجود دارد. برای مثال در شرایط برگزاری مناقصه توسط دولت، بخش برگزارکننده موظف است از قواعد روشن و واضحی که در قانون ذکر شده‌اند و در اختیار همه‌ی افراد قرار دارند، پیروی کند. در خیلی از شرایط هم صرفا اعتبار فروشنده و حفظ آن دلیل کافی برای تعهد به قواعد بیان شده‌است.

باید توجه داشت که این تعهد کامل یکی از طرف‌های معامله به این معنا نیست که وی می‌تواند تمام سود ممکن را در معامله کسب کند. معضل اصلی در این راه، اطلاعات نامتقارن است. اگر حراج‌گذار به طور کامل، ارزش‌دهی هر یک از خریداران در مورد هر کالا را می‌دانست، می‌توانست کالا را با قیمتی کمتر از بالاترین ارزش ارائه کند و اظهار کند که خریداران یا این قیمت را می‌پذیرند یا وی کالا را نمی‌فروشد. (چانه‌زنی نداشته باشیم) در این شرایط با توجه به این که متقاضیان کالا می‌دانند فروشنده به تعهد خود پایبند خواهند بود، فرد با بیشترین ارزش‌دهی به کالا، کالا را خواهد خرید. مشکل مهم در این سازوکار این است که فروشنده هیچ گاه اطلاعات کاملی از توابع ارزش‌دهی افراد ندارد و با برپا کردن حراج، سعی می‌کند تخمینی از آن را به دست بیاورد. در بخش بعدی بیشتر به بحث عدم تقارن اطلاعات خواهیم پرداخت.

طبیعت عدم اطمینان

همان‌طور که اشاره شد، عدم تقارن اطلاعات مشکل اساسی در حراج است. اگر اطلاعات کامل در اختیار بود کلا مساله به سادگی حل می‌شد. دلیل اصلی این که یک انحصارگر، کالا را از طریق حراج به فروش می‌گذارد، تمایل وی برای شناخت ارزش‌دهی افراد مختلف به کالا است.

این‌که پیشنهاد دهندگان، در برابر عدم اطمینان چه واکنشی نشان می‌دهند، بستگی فراوانی به جهت‌گیری آن‌ها در مقابل ریسک دارد. در نتیجه یکی از معیارهای مهمی که در مدل‌سازی هر شرایط حراج باید در نظر داشت، نحوه‌ی واکنش افراد به ریسک است. هر چند که ویژگی‌های ریسک‌پذیری فروشنده نیز مهم است اما معمولا وی را ریسک‌خنثی در نظر می‌گیریم.

تفاوت افراد در ارزش‌دهی به کالا دو دلیل عمده دارد که هر دو در مدل‌سازی شرایط حراج تاثیر مهمی دارند. در یک سوی طیف، فرض می‌کنیم که هر فرد دقیقا ارزشی که کالا برای وی دارد را می‌داند و در عین حال از ارزش کالا برای دیگر رقبا کاملا بی‌اطلاع است. از دید وی ارزش دیگران از یک توزیع احتمالی مشخص می‌-شود. هم‌چنین هر فرد می‌داند که در نظر دیگران نیز، ارزش‌دهی وی از یک توزیع احتمال مشخص محاسبه می‌شود. این توزیع‌ها، سلیقه‌های مختلف افراد را مشخص می‌کنند. به بیان دقیق‌تر برای پیشنهاددهنده‌ی iام، $i = ۱, \dots, n$، یک توزیع احتمالی F_i وجود دارد که ارزش‌دهی وی، v_i، را مشخص می‌کند. فقط خود فرد ارزش‌دهی خود را می‌داند و دیگران حتی حراج‌گذار از آن بی‌خبرند. در نهایت، توزیع‌های رقبا از یکدیگر مستقل است. به این مدل، مقادیر خصوصی مستقل[۷] گفته‌می‌شود. این مدل برای حراج یک کالای عتیقه، که در آن خریداران، کالا را برای استفاده‌ی شخصی خود می‌خرند، به کار می‌رود. هم‌چنین برای مناقصه‌های دولتی، که در آن هر تولیدکننده هزینه‌های تولید خود را می‌داند.

در سوی دیگر این طیف، حراج کالای عتیقه‌ای را در نظر بگیرید که پیشنهاددهندگان، کالا را با هدف فروش در یک بازار دیگر می‌خرند یا مثلا حق استفاده از یک معدن. در این‌جا کالایی که فروخته می‌شود یک ارزش حقیقی واحد و مشترک برای همه‌ی افراد دارد اما مشکل اینجاست که این عدد برای افراد مشخص نیست. یعنی برای مثال افراد نمی‌دانند که در معدن چه میزانی از سنگ وجود دارد. هر یک از رقبا، بر اساس اطلاعاتی که در دست دارد، حدسی از میزان واقعی ارزش کالا می‌زند. به بیان ریاضی، کالا یک ارزش واقعی، V دارد و ارزش‌های محاسبه شده توسط هر یک از خریداران، v_i، از یکدیگر مستقل است و یک توزیع احتمالی $H(v_i \mid V)$ دارد که تمام بازیگران حراج از H اطلاع دارند. این مدل را مقدار مشترک[۸] می‌گویند.

فرض کنید که یکی از پیشنهاددهندگان، ارزش‌دهی دیگری را بداند. اگر مدل مقدار عمومی، استفاده شود، وی اطلاعات اضافی در مورد ارزش واقعی کالا به دست‌آورده است و در نتیجه ممکن است مقدار خود را تغییر دهد. اما اگر مدل مقادیر خصوصی مستقل را به کار برده باشیم، تاثیر نخواهدداشت زیرا پیشنهاد دهنده بر اساس ترجیحات خود، ارزش‌دهی خودش را تعیین کرده‌است.

همان‌طور که اشاره شد، این دو مدل، دو سر یک طیف قرار دارند و در شرایط واقعی، معمولا حراج در این بین قرار دارد. برای مثال در یک حراج که افراد به منظور فروش، کالا را می‌خرند، ممکن است هم عدم اطمینان دقیق از قیمت کالا در بازار دوم وجود

[۷] Independent-private-values
[۸] Common-value

داشته باشد و هم این که توانایی هر یک از افراد برای فروش کالا در بازار دوم متفاوت باشد. یا در یک مناقصه، توانایی هر یک از تولیدکنندگان برای عرضه‌ی کالا متفاوت باشد در عین حال که یک عدم اطمینان مشترک در تکنولوژی تولید بین همه‌ی تولیدکنندگان وجود داشته‌باشد.

یک مدل عمومی‌تر برای بررسی ارتباط بین ارزش‌دهی‌های پیشنهاد دهندگان وجود دارد که دو مدل بالا را نیز به عنوان حالت‌های خاص دربردارد. با در نظر گرفتن n پیشنهاد دهنده، فرض می‌کنیم x_i یک سیگنال خصوصی است که نمایانگر ارزش فرد iام است و داریم $x = (x_1, \ldots, x_n)$. همچنین $s = (s_1, \ldots, s_m)$ بردار متغیرهایی است که کیفیت کالا را مشخص می‌کنند. خریداران هیچ‌یک از اجزای s را نمی‌توانند تشخیص دهند اما برخی یا همه‌ی اجزای آن توسط فروشنده قابل تشخیص و اندازه‌گیری هستند. میزان ارزش کالا برای نفر iام را $v_i(s, x)$ در نظر می‌گیریم. در نتیجه، میزان ارزش هر فرد، نه تنها به سیگنال خصوصی وی، بلکه به سیگنال‌های دیگران و هم‌چنین کیفیت واقعی کالا بستگی دارد. یعنی مواردی که توسط وی قابل تشخیص نیستند. این فرمول‌بندی در حالتی که $m = 0$ و $v_i = x_i$ باشد تبدیل به حالت مقادیر خصوصی مستقل می‌شود و برای $m = 1$ و $V_i = s_1$ به حالت مقدار مشترک تبدیل می‌شود.

نکته‌ی دیگری که در مدل‌سازی باید در نظر داشت، پاسخ این پرسش است که آیا پیشنهاد دهندگان به طریق قابل تشخیصی از یکدیگر متمایز هستند یا خیر؟ به بیان دقیق‌تر آیا باید برای توابع ارزش‌دهی همه‌ی افراد از یک توزیع یکسان استفاده کرد یا هر فرد توزیع خاص خود را دارد. به حالت اول پیشنهاددهندگان متقارن و به حالت دوم نامتقارن می‌گویند. برای مثال از عدم تقارن در نوع پیشنهاد دهندگان، می‌توان مناقصه‌ی دولتی را در نظر گرفت که در آن علاوه بر تولیدکنندگان داخلی، خارجی‌ها نیز به رقابت می‌پردازند.

ساده‌ترین مدل حراج برای تحلیل‌های بعدی، بر مبنای چهار فرض زیر استوار است:

- فرض۱: خریداران ریسک‌خنثی هستند.
- فرض۲: فرض‌های مدل مقادیر خصوصی مستقل برقرارند.
- فرض۳: خریداران، متقارن هستند.
- فرض۴: پرداخت، تابعی است صرفا وابسته به مبالغ پیشنهاد.

در نتیجه‌ی این فروض، حراج به یک تعادل می‌رسد. هر فردی میزان ارزش کالا در نزد خودش، تعداد کل متقاضیان، جهت‌گیری آن‌ها نسبت به ریسک و توزیع‌های احتمالی مقادیر را می‌داند. علاوه بر این می‌داند که دیگران نیز این اطلاعات را در دسترس دارند و دیگران خبر دارند که او اطلاعات را می‌داند و به همین ترتیب. بر اساس اطلاعاتی که هر فرد در دست دارد، میزان پیشنهاد خود را تعیین می‌کند. در یک تعادل نش بازی، هر فرد مقداری را بر اساس ارزش‌دهی خود پیشنهاد داده است و هیچ یک از افراد انگیزه‌ای برای تغییر مقدار پیشنهاد خود، حتی با دانستن پیشنهادهای دیگران، ندارند.

در همین‌جا، بدیهی است که حراج هلندی و حراج دربسته‌ی قیمت اول، مستقل از همه‌ی فرضیات مختلف درباره‌ی ریسک‌پذیری یا وابستگی ارزش‌دهی‌ها یا ...، نتیجه‌ی یکسانی خواهند داشت. زیرا در هر دو حالت، پیشنهاد دهنده باید برای خودش تعیین کند که سقف مقداری که می‌خواهد چقدر است و همان را پیشنهاد دهد. در نتیجه در بررسی‌های آینده حراج هلندی را در نظر نخواهیم گرفت.

مقایسه‌ی حراج‌ها

فروشنده کدام‌یک از چهار نوع حراج را باید انتخاب کند؟ در این بخش نشان خواهیم‌داد که اگر مدل ساده بر مبنای چهار فرض قبلی را در نظر بگیریم، تفاوتی بین هیچ‌یک از انواع حراج وجود ندارد. در اصل هر یک از این چهار نوع حراج، به طور میانگین، سود یکسانی برای فروشنده فراهم خواهند کرد. در نگاه اول، این ادعا به نظر اشتباه می‌آید، زیرا واضح است که دریافت بیشترین پیشنهاد در حراج قیمت اول، بهتر از دریافت دومین مبلغ پیشنهادی در حراج قیمت دوم است. اما باید توجه داشت که خریداران در این دو نوع حراج رفتار متفاوتی نشان خواهندداد و در اصل در حراج قیمت دوم مقادیر بیشتری پیشنهاد خواهندداد.

ابتدا حراج انگلیسی را در نظر می‌گیریم. در این حراج نفر دوم (با دومین بیشترین ارزش‌دهی) به محض این-که قیمت از ارزش کالا برای وی بالاتر رفت، خارج خواهد شد. در نتیجه نفر اول، با پرداخت مقدار ارزش نفر دوم، کالا را به دست می‌آورد.

این مقدار معمولا فاصله‌ی مناسبی با ارزش کالا برای خود نفر اول دارد. در نتیجه، علیرغم شرایط انحصاری، برنده‌ی حراج سود کرده است. (کالا را با قیمتی کمتر از میزانی که واقعا برای وی ارزش دارد، به دست آورده است.)

فقط خود خریدار میزان سود خود را می‌داند، چون فقط وی از تابع ارزش‌دهی خود خبر دارد. اما از دید یک ناظر بیرونی، مانند فروشنده، به طور میانگین سودی که خریدار خواهد برد چقدر است؟ فرض می‌کنیم که ارزش کالا از دید n پیشنهاددهنده‌ی مختلف به ترتیب $v_{(۱)}, \dots, v_{(n)}$ باشد که در آن $v_{(۱)}$ بیشترین مقدار و $v_{(۲)}$ دومین مقدار است. (این مقادیر در اصل آمار مرتبه‌ی اول[۹] و آمار مرتبه‌ی دوم هستند.) میزان سودی که برنده خواهد داشت برابر $v_{(۱)} - v_{(۲)}$ خواهد بود. از دید برنده، مقادیر دیگران متغیرهای مستقلی است که از یک تابع احتمال F (با تابع چگالی f) پیروی می‌کند. در نتیجه میزان انتظاری سود فرد، برابر میزان تفاوت انتظاری آمار مرتبه‌ی اول و مرتبه‌ی دوم برای یک تابع توزیع است. با استفاده از ویژگی‌های آمارهای مرتبه می‌توان ثابت کرد که این میزان برابر مقدار انتظاری $[۱ - F(v_{(۱)})]/f(v_{(۱)})$ خواهد بود.

بر اساس تعریفی که از این میزان سود داشتیم، مقداری که فروشنده دریافت خواهد کرد، برابر تفاضل ارزش-دهی برنده با این مقدار سود است. یعنی میزان دریافت انتظاری فروشنده در حراج انگلیسی برابر است با امید ریاضی متغیر $J(v_{(۱)})$ که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$J(v_{(۱)}) = v_{(۱)} - \frac{۱ - F(v_{(۱)})}{f(v_{(۱)})}$$

معمولا فرض می‌شود که تابع توزیع F به گونه‌ای است که J اکیدا صعودی است. این فرض به این معناست که میزان پرداختی انتظاری برنده با افزایش میزان ارزش کالا برای وی، افزایش می‌یابد.

حالا حراج دربسته‌ی قیمت دوم را در نظر می‌گیریم. در این حالت، استراتژی هر بازیکن در شرایط نش بازی، پیشنهاد مبلغی دقیقا مساوی با ارزش کالا برای وی است. زیرا میزان پیشنهادی که فرد می‌دهد صرفا مشخص می‌کند که وی برنده است یا بازنده و مقداری که پرداخت می‌کند خارج از کنترل وی است. اگر فرد بخواهد مبلغی را کمتر از ارزش کالا در نزد خود پیشنهاد دهد، تغییری در وضع وی ایجاد نخواهد شد، زیرا وی اگر ببرد، به اندازه‌ی تفاوت ارزش کالا برای وی و پیشنهاد بعد از خودش سود خواهد کرد مگر این‌که با کم کردن مقدار پیشنهاد خود، ببازد. (مبلغ پیشنهاد وی از نفر دوم کمتر شود) که در این حالت هم به ضرر وی خواهد بود. در نتیجه در کل، پیشنهاد دادن دقیقا به اندازه‌ی ارزش کالا، استراتژی غالب است بر پیشنهاد کمتر. بر عکس، اگر فرد بخواهد مبلغی بیشتر از ارزش کالا برای خودش، پیشنهاد بدهد، تنها حالتی که تغییر ایجاد می‌کند این است که این افزایش پیشنهاد باعث بردن وی شود. در این حالت وی مجبور است پیشنهاد نفر دوم پس از خود را بپردازد که از ارزش کالا برای وی بیشتر است و فرد ضرر خواهد کرد. در نتیجه مانند حراج انگلیسی، در حراج دربسته‌ی قیمت دوم، میزان پرداختی برابر پیشنهاد نفر دوم است و به طور مشابه میزان پرداختی انتظاری، همان امید ریاضی $J(v_{(۱)})$ است.

نقطه‌ی اشتراک دو نوع حراجی که در بالا بررسی کردیم، این است که در هر دو، افراد یک استراتژی اکیدا غالب دارند که مستقل از حدس آن‌ها از پیشنهادهای دیگران است. اما در حراج قیمت اول، تعادل اندکی ضعیف‌تر است و نشان خواهیم داد که افراد در یک تعادل نش بازی خواهند کرد. یعنی هر فرد، با در نظر گرفتن نحوه‌ی تصمیم‌گیری دیگران در مورد پیشنهادهای خود، استراتژی‌ای را برمی‌گزیند که بهترین پاسخ به استراتژی‌های مختلف رقباست.

یک حراج قیمت اول را در نظر می‌گیریم. تصمیم نفر iام که ارزش کالا برای وی v_i است را در نظر بگیرید. وی فرض می‌کند که رقبا برای تصمیم‌گیری خود از تابع پیشنهاد B استفاده می‌کنند به این معنا که اگر ارزش هر فرد v_j باشد، پیشنهاد وی $B(v_j)$ خواهد بود. (در نظر داشته باشید که همچنان وی از ارزش کالا در نزد دیگران خبر ندارد.) فرض کنید B یک تابع اکیدا صعودی است. با این شرایط بهترین پیشنهاد برای فرد iام چه خواهد بود؟ اگر وی مقدار b_i را پیشنهاد دهد و برنده شود، به مازاد $v_i - b_i$ دست خواهد یافت. احتمال این که وی ببرد برابر احتمال این است که همه‌ی $n - ۱$ رقیب دیگر، مقادیری داشته باشند که $B(v_j) < b_i$ که این احتمال برابر است با $[F(B^{-۱}(b_i)]^{n-۱}$. فرد iام پیشنهادی را انتخاب می‌کند که میزان انتظاری مازاد وی را بیشینه کند:

$$\pi_i = (v_i - b_i)[F(B^{-۱}(b_i))]^{n-۱}$$

فرد b_iای را برمی‌گزیند که $\delta\pi_i/\delta b_i = ۰$. در این حالت با مشتق‌گیری از π_i نسبت به v_i خواهیم‌داشت:

$$d\pi_i/dv_i = \delta\pi_i/\delta v_i + (\delta\pi_i/\delta b_i)(db_i/dv_i)$$

---

[۹] First order statistic

که با توجه به صفر بودن جمله‌ی دوم و مشتق‌گیری از رابطه‌ی بالا داریم:

$$\frac{d\pi_i}{dv_i} = \frac{\delta\pi_i}{\delta v_i} = [F(B^{-1}(b_i))]^{n-1}$$

تا اینجا بهتری پاسخ فرد iام را به یک تابع فرضی B پیدا کردیم. حال برای رسیدن به تعادل نش باید در نظر داشته‌باشیم که این تابع فرضی باید با فرض عقلانیت تمام بازیکن‌ها همگن باشد. به این معنی که میزان بهینه‌ی پیشنهاد نفر iام که از معادله‌ی بالا به دست می‌آید باید دقیقا همان مقداری باشد که تابع B برای وی محاسبه خواهد کرد، یعنی $b_i = B(v_i)$. با جایگزین کردن شرایط نش در معادله‌ی بالا خواهیم داشت:

$$\frac{d\pi_i}{dv_i} = [F(v_i)]^{n-1}$$

در تعادل نش بازی، همه‌ی n بازیکن به طور همزمان، حالت بهینه را انتخاب خواهند کرد و در نتیجه معادله‌ی بالا برای تمام مقادیر $i = 1, \ldots, n$ برقرار خواهد بود. این معادله‌ی دیفرانسیل را با انتگرال‌گیری از دو طرف حل می‌کنیم. (از این شرط مرزی استفاده می‌کنیم که اگر فردی کمترین میزان ارزش ممکن برای کالا را داشته‌باشد، مازاد وی صفر خواهدبود و در اصل $B(v_l) = v_l$). و در نتیجه با استفاده از تعریف π_i و شرایط نش که به معادله‌ی بالا رسید، داریم:

$$B(v_i) = v_i - \frac{\int_{v_l}^{v_i}[F(\xi)]^{n-1}d\xi}{[F(v_i)]^{n-1}}, i = 1, \ldots, n$$

توجه کنید که همان‌طور که فرض کرده بودیم این تابع صعودی است. جمله‌ی دوم در سمت راست معادله‌ی بالا میزانی است که فرد کمتر از ارزش کالا، پیشنهاد می‌دهد.

برای جمع‌بندی، دقت کنید که استدلال بالا دو مرحله داشت. ابتدا بهترین پاسخ هر فرد به پیشنهادهای دیگران را با فرض دانستن تابع پیشنهادها به دست‌آوردیم. سپس با استفاده از تعادل نش و این واقعیت که پاسخ‌های بهینه باید مطابق همین تابع فرضی باشند، به پاسخ مساله رسیدیم.

برای حالت خاصی که توزیع F یکنواخت است و کمترین مقدار ارزش ممکن برابر صفر است، خواهیم داشت $B(v) = (n-1)v/n$. یعنی فرد به نسبت $(n-1)/n$ از ارزش کالا، پیشنهاد می‌دهد.

برنده در این حالت، فردی است که بیشترین میزان ارزش برای کالا را دارد. در انتخاب مبلغ پیشنهادی، هر فرد فرض می‌کند که ارزش کالا برای وی بیشترین مقدار ممکن است. این فرض بی‌ضرر است زیرا اگر این-گونه نباشد و فرد ببازد مبلغی پرداخت نخواهد کرد. می‌توان نشان داد که میزان پیشنهادی هر فرد برابر است با دومین میزان انتظاری پیشنهاد با در نظر داشتن اطلاعاتی که فرد دارد، که همان ارزش‌دهی خودش است. به بیان دیگر هر فرد تخمین می‌زند که نفر دوم بعد از وی (به طور میانگین) کجاست و مقداری برابر ارزش وی پیشنهاد می‌دهد. در نتیجه از دید خریدار که اطلاعی از عدد $v_{(1)}$ ندارد، قیمت انتظاری، میزان انتظاری $B(v_{(1)})$ است که می‌توان نشان داد با میزان انتظاری $J(v_{(1)})$ برابر است. در نتیجه به طور میانگین، قیمت در حراج دربسته‌ی قیمت اول، همان قیمت در حراج انگلیسی و قیمت در حراج دربسته‌ی قیمت دوم است.

استدلال‌های بالا نظریه‌ی تساوی مبلغ دریافتی[10] را ثابت می‌کند:

با در نظر گرفتن فرضیات قبلی، هر یک از چهار نوع حراج، قیمت میانگین یکسانی را نتیجه می‌دهند. در حراج انگلیسی و قیمت دوم، قیمت دقیقا برابر دومین ارزش‌دهی از بالا است ولی در دو حالت دیگر، قیمت برابر میزان انتظاری دومین ارزش با در نظر گرفتن ارزش‌دهی برنده است. باید دقت کرد که در شرایط خیلی خاصی این دو قیمت دقیقا برابر خواهند شد ولی به طور میانگین در هر دو دسته قیمت یکسان خواهد بود.

با این که هر دو دسته‌ی حراج‌ها (دسته‌ی اول، حراج انگلیسی و قیمت دوم و دسته‌ی دوم، حراج هلندی و قیمت اول) به طور میانگین قیمت یکسانی خواهندداشت اما یک تفاوت عملی مهم بین این دو است. در دسته‌ی اول هر فرد دقیقا می‌داند که چه کار باید بکند. در حراج انگلیسی فرد تا جایی که قیمت برابر ارزش‌دهی وی است ادامه می‌دهد و در حراج قیمت دوم، فرد عینا مقدار ارزش‌دهی خود را اعلام می‌کند. اما در دسته‌ی دوم فرد مقداری کمتر از ارزش‌دهی خودش پیشنهاد می‌دهد که این مقدار به تابع توزیع ارزش‌های رقبا و تعداد آن‌ها بستگی دارد.

نظریه‌ی تساوی مبلغ دریافتی، بیان می‌کند که با در نظر گرفتن فرض‌های بالا، تفاوتی بین چهار نوع حراج وجود ندارد. اما اگر هر یک از این فرض‌ها را حذف کنیم، شرایط جدیدی به وجود خواهد آمد که باعث ایجاد تفاوت بین خروجی انواع مختلف حراج خواهد شد.

[10] Revenue-Equivalence Theorem

حراج ویکری

تعریف

همان‌طور که در ابتدای بحث مطرح شد، نکته‌ی اساسی حراج، ناتوانی فروشنده در تشخیص توابع ارزش‌دهی افراد است. اما آیا می‌توان سازوکاری طراحی کرد که افراد مقدار واقعی ارزش کالا برای خود را فاش کنند. دیدیم که در حراج دربسته‌ی قیمت دوم، این اتفاق می‌افتد.

به حراج دربسته‌ی قیمت دوم که در بخش پیش دیدیم، حراج ویکری[۱۱] نیز گفته می‌شود. حراجی که در آن هر فرد مستقل از دیگران، به طور هم‌زمان و بدون اطلاع از پیشنهاد دیگران، مبلغی را پیشنهاد می‌دهد و کالا به فردی که بیشترین پیشنهاد را داده است، می‌رسد ولی وی مبلغ پیشنهادی نفر پس از خود را خواهد پرداخت. همان‌طور که نشان داده شد، در این نوع از حراج هر فرد مقدار واقعی ارزش-دهی خود را بروز می‌دهد. این مدل حراج سازوکاری بسیار قوی دارد اما محدوده‌ی کاربرد کمی دارد. یک مدل تعمیم‌یافته از حراج ویکری وجود دارد که می‌تواند به بررسی حالت‌های خیلی پیچیده‌تر، مشابه آن‌چه که در واقعیت رخ می‌دهد، بپردازد.

حراج ویکری تعمیم یافته

فرض می‌کنیم که n ,... ,۱ $= i$ مصرف کننده داریم که هر یک از کالاهای k ,... ,۰ $= j$ استفاده می‌کنند. x_i^j معرف میزان مصرف کالا j توسط مصرف کننده‌ی i است. کالای ۰ نمایانگر پول است و هر فرد یک سبد مصرف به شکل $x_i = (x_i^1, \ldots, x_i^k)$ دارد. هر مصرف کننده در ابتدا یک سبد کالای اولیه‌ی $\bar{x}_i$ و یک میزان پول اولیه‌ی $\bar{x}_i^0$ دارد.

یک تخصیص منابع $x = (x_1, \ldots, x_n)$ قابل قبول است اگر مجموع هر کالا (شامل پول) با میزان دسترس برابر باشد:

$$\sum_{i=1}^{n} x_j^i = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i^j$$

هر مصرف‌کننده تابع مطلوبیتی به شکل $u_i(x) + x_i^0$ دارد، که به تابع مطلوبیت شبه‌خطی[۱۲] معروف است. این تابع مشخص می‌کند که مطلوبیت هر فرد، به کل نحوه‌ی تخصیص منابع بستگی دارد، نه فقط به میزان کالایی که به خودش رسیده است. در اکثر مثال‌هایی که بررسی خواهیم کرد، فرض می‌کنیم که $u_i(x) = u_i(x_i)$.

هدف بدیهی در تخصیص منابع این است که مجموع مطلوبیت‌ها بیشینه شود، یعنی:

$$\max \sum_{i=1}^{n} u_i(x) + x_i^0;$$

$$\text{s.t} \quad : \quad \forall j = 0, \ldots, k; \sum_{i=1}^{n} x_j^i = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i^j$$

در حالت ساده‌ی حراج ویکری، تابع مطلوبیت، اختلاف بین ارزش کالا در نزد فرد و مبلغ پرداختی است. همان‌طور که در این حراج، مصرف‌کننده نمی‌خواست ارزش‌دهی خود را برای تولیدکننده فاش کند، در این مساله‌ی تخصیص منابع نیز، شرکت‌کنندگان نمی‌خواهند توابع مطلوبیت واقعی خود را فاش کنند. مساله، طراحی مکانیزمی است که افراد صادقانه اطلاعات خصوصی خود را فاش کنند.

در حراج ویکری تعمیم‌یافته:

۱. هر مصرف کننده‌ی i یک تابع مطلوبیت $r_i(.)$ به مرکز معرفی می‌کند که می‌تواند درست یا غلط باشد.

۲. مرکز، تخصیص (x_i^*)) را که مطلوبیت‌های گزارش شده را بر اساس قید منابع، بیشینه می‌کند، محاسبه می‌کند.

۳. مرکز یک تخصیص دیگر $\hat{x}_i$) را محاسبه می‌کند که در آن مجموع مطلوبیت همه به جز فرد iام بیشینه شده است با این قید که از هیچ یک از منابع فرد iام استفاده نشود.

---

[۱۱] Vickery Auction

[۱۲] Quasilinear utility function

۴. فرد i سبد x_i^* را دریافت می‌کند و پرداختی $\sum_{j\neq i}[r_j(x^*) - r_j(\hat{x}_{\ i})]$ را از مرکز دریافت می‌کند.

در نتیجه دریافتی نهایی فرد در حراج ویکری تعمیم‌یافته برابر

$$u_i(x^*) + \sum_{j\neq i} r_j(x^*) - \sum_{j\neq i} r_j(\hat{x}_{\ i})$$

است.

ادعا می‌کنیم که اگر مکانیزم بالا استفاده شود، هر فرد مقدار واقعی تابع مطلوبیت خود را بیان می‌کند و به بیان دیگر $r_i(.) = u_i(.)$.

قدم اول در اثبات این ادعا توجه به این نکته است که جمله‌ی سوم در عبارت بالا مستقل از تصمیم فرد است زیرا کاملا از کنترل وی خارج است. برای دقت بیشتر، این جمله را با K جایگزین می‌کنیم.

حال توجه کنید که مرکز تخصیصی را ارائه کرده است که

$$r_i(x) + \sum_{j\neq i} r_j(x)$$

را با رعایت محدودیت منابع، بیشینه کرده است و مصرف کننده می‌خواهد که مرکز مطلوبیت او را بیشینه کند:

$$u_i(x) + \sum_{j\neq i} r_j(x) - K$$

که با مقایسه‌ی این دو عبارت بدیهی است که برای مصرف کننده انتخاب $r_i(.) = u_i(.)$ بهینه است.

مثال‌های حراج ویکری تعمیم‌یافته

حراج ویکری استاندارد: در این حالت تابع مطلوبیت مصرف کننده‌ی i، $v_i - p$ است که در آن v_i ارزش کالا در نزد مصرف‌کننده و p قیمتی است که می‌پردازد. اگر مصرف‌کننده‌ی i کالا را ببرد، $x_i = ۱$ و در غیر این صورت $x_i = ۰$ خواهد بود. در نتیجه مجموع توابع مطلوبیت به شکل

$$\sum_{t=۱}^{n} v_i x_i$$

و محدودیت منابع به شکل

$$\sum_{i=۱}^{n} x_i = ۱$$

در خواهد آمد.

فرض کنیم m اندیس مصرف‌کننده‌ای است که بیشترین مقدار v_i را دارد. در این صورت برای بیشینه کردن مجموع مطلوبیت‌ها مرکز $x_m^* = ۱$ را قرار می‌دهد و برای بقیه‌ی مصرف‌کننده‌ها x_j را صفر در نظر می‌گیرد. اگر فرض کنیم، مصرف‌کننده‌ی s دومین مقدار را از بالا دارد، مرکز با حذف مصرف‌کننده‌ی m، بیشینه‌ی مطلوبیت افراد باقی‌مانده را پیدا می‌کند که برابر با v_s خواهدبود. در نتیجه سود خالص نهایی فرد در مدل تعمیم‌یافته برابر $v_m - v_s$ است که دقیقا همان چیزی است که در حالت استاندارد بررسی شده‌بود.

چند واحد از یک کالا: فرص کنید که یک کالا داریم اما $\bar{x}$ واحد از آن در دسترس است. (x_i^*) را تخصیصی در نظر می‌گیریم که مجموع مطلوبیت‌های تمام مصرف کنندگان را بیشینه می‌کند و $\hat{x}_{j\ i}$ مقداری است که به مصرف‌کننده‌ی j می‌رسد اگر مجموع مطلوبیت‌های همه به جز i بیشینه شود. در این صورت دریافتی فرد i در حالت تعمیم یافته برابر خواهد بود با:

$$u_i(x_i^*) + \sum_{j\neq i} u_j(x_j^*) - \sum_{j\neq i} u_j(x_{j\ i})$$

برای این که ببینیم این مکانیزم چگونه کار می‌کند فرض می‌کنیم که دو مصرف‌کننده داریم و سه واحد از یک کالا در دسترس است. فرد اول برای اولین واحد کالا ۱۰ دلار، برای دومین واحد ۸ و برای سومین واحد ۵ دلار ارزش قائل است. فرد دوم نیز به ترتیب

(۹و۷و۶). با یک بررسی ساده مشخص می-شود که باید به فرد اول دو واحد و به فرد دوم یک واحد داد. در این حالت فرد اول به مطلوبیت کلی ۱۸ و فرد دوم به مطلوبیت ۹ خواهد رسید.

اما مکانیزم حراج ویکری تعمیم‌یافته، این مساله را این‌گونه حل می‌کند که اگر فرد اول نبود، تمام کالاها به فرد دوم داده می‌شود و مطلوبیت ۲۲ (مجموع ۹ و ۷ و ۶) تامین می‌شد. در نتیجه دریافتی خالص نفر اول در حراج تعمیم‌یافته برابر

$$۱۸ + [۹۲۲] = ۱۸۱۳ = ۵$$

خواهد بود. یعنی نفر اول، برای دو واحد کالایی که دریافت خواهد کرد، ۱۳ دلار خواهد پرداخت.

به طور مشابه، برای نفر دوم، خالص دریافتی برابر

$$۹ + [۱۸۲۳] = ۹۵ = ۴$$

خواهد بود و وی برای یک واحد کالای دریافتی‌اش، ۵ دلار خواهد پرداخت. فروشنده هم برای سه واحدی که فروخته است، ۱۸ دلار دریافت خواهد کرد.

کالاهای عمومی: فرض کنید که مصرف کننده‌ی i در ابتدا $\bar{x}_i$ واحد از یک کالا در اختیار دارد. وی می‌تواند به اندازه‌ی x_i در یک کالای عمومی شرکت کند که این کار به مجموع $G = \sum_{i=۱}^{n}$ منجر خواهد شد. در نتیجه مجموع مطلوبیت‌ها برابر خواهد بود با:

$$\sum_{i=۱}^{n} u_i(G) + \sum_{i=۱}^{n} \bar{x}_i - G$$

فرض می‌کنیم تابع مطلوبیت $u_i(.)$ یک تابع مشتق‌پذیر، صعودی و محدب است.

مساله‌ی معروف کالاهای عمومی این است که G^*ای که مجموع مطلوبیت‌ها را بیشینه می‌کند شرط زیر را برآورده می‌کند:

$$\sum_{i=۱}^{n} u_i'(G^*) = ۱$$

در حالی که توزیعی که برای هر فرد بهینه است، شرط زیر را برآورده خواهد کرد:

$$u_i'(G^\circ) = ۱$$

با شرایطی که در نظر گرفتیم، مجموع میزان مشارکت داوطلبانه‌ی افراد از میزان بهینه‌ی اجتماعی کمتر است.

حال بررسی می‌کنیم که مدل ما چگونه مشکل را برطرف خواهد کرد. فرض کنید سه مصرف‌کننده وجود دارند که دارایی اولیه‌ی آن‌ها ۱۰ واحد است. اگر مجموع کالای مشارکتی برابر $G = x_۱ + x_۲ + x_۳$ باشد، فرد iام، ارزش خالصی برابر با $۴G + ۱۰ - x_i$ خواهدداشت. در نتیجه مجموع مطلوبیت‌ها برابر خواهد بود با

$$۱٫۲G + (۳۰ - G) = ۳۰ + ۰٫۲G$$

که به وضوح با قرار دادن $x_۱ = x_۲ = x_۳ = ۱۰$ بیشینه خواهد شد. مجموع مطلوبیت هر دو مصرف کننده‌ای برابر خواهد بود با

$$۸G + (۲۰ - G) = ۲۰ - ۰٫۲G$$

که باز هم به وضوح در شرایط $x_۱ = x_۲ = x_۳ = ۰$ بیشینه خواهد شد. در نتیجه خالص پرداختی هر فرد در تعادل برابر خواهد بود با

$$۰٫۴ \times ۳۰ + ۰٫۸ \times ۳۰ - [۰٫۸ \times ۰ + ۲۰] = ۱۶$$

در نهایت، در تعادل، هر مصرف‌کنندهی ۱۰ واحد پرداخت می‌کند، ۱۲ واحد مطلوبیت از کالای عمومی بهره‌مند می‌شود و ۴ واحد اضافی هم برای تشویق وی به انجام این کار دریافت خواهد کرد. باید توجه داشت که در این شرایط برای رسیدن به تخصیص بهینه، مرکز باید مبلغی پول پرداخت کند.

بحث کالاهای عمومی و مشکلی که در اینجا مطرح شد، از مباحث معروف این حوزه است. به طور کلی مشارکت در ساخت امکانات عمومی مانند پارک‌ها و فضای سبز، راه‌ها، پل‌ها و ... از مثال‌هایی معروفی هستند که مشابه مورد کاربردی بالا قابل بررسی هستند.

در انتهای این بخش بد نیست اشاره کنیم که مدل تعمیم یافته‌ی بالا در دسته‌ی مکانیزم‌های افشای مستقیم[۱۳] قرار دارد که در آن‌ها پیامی که به مرکز ارسال می‌شود، خود اطلاعات خصوصی مصرف-کننده است. دسته‌ی دیگر مکانیزم‌های غیرمستقیم نیز

[۱۳] Direct revelation mechanism

قابل تصورند که در آن مثلا مبلغ پیشنهادی به مرکز اعلام می‌شود. اثبات می‌شود که هر چیزی که با یک مکانیزم غیرمستقیم قابل دستیابی باشد، با مکانیزم مستقیم نیز به دست خواهدآمد.

حراج در دنیای واقعی

فروش حق استفاده از طیف‌های رایویی

یکی از موارد کاربرد جالب حراج‌ها، در فروش حق استفاده‌ی برخی از طیف‌های خاص رادیویی در امریکا بوده است. دولت امریکا در سال ۱۹۹۳ تصمیم به فروش حق استفاده از طول موج‌های رادیویی خاصی، که قبلا برای استفاده‌های نظامی به کار می‌رفتند، از طریق برگزاری یک حراج گرفت. مهم‌ترین کاربرد این امواج در نسل جدید خدمات ارتباطی شخصی (PCS)[۱۴] مانند تلفن‌های جیبی، ماشین‌های فاکس قابل حمل و شبکه‌های ارتباط رایانه‌ای بیسیم بوده‌است.

این حراج یکی از بزرگترین و پیچیده‌ترین موارد در تاریخ بوده است. ارزش طیف ارائه شده، ۱۰.۶ میلیارد دلار تخمین زده شده بود و هزاران حق استفاده برای فروش آماده بودند. شرکت کنندگان در حراج شامل شرکت‌های بزرگ ارتباطات راه دور و مخابرات تلفن همراه بودند. این شرکت‌ها باید پس از صرف هزینه‌ی هنگفت خرید حق امتیاز، مبالغ بسیار بیشتری را برای نصب و راه‌اندازی زیرساخت‌های موردنیاز صرف می‌کردند. علاوه بر این حجم این بازار و استقبال مردم از وسایل ارتباطی بیسیم ناشناخته بود. در نتیجه در مجموع شرکت‌ها ریسک بسیار بزرگ و ناشناخته‌ای را در ازای سود فراوان احتمالی پذیرفته بودند.

چیزی حدود ۱۷ نفر از بهترین اقتصاددان‌های آن زمان توسط شرکت‌های مخابراتی و هم‌چنین دولت برای مشاوره در این زمینه استخدام شدند.

در گذشته ابتدا دولت به صورت فردی حق استفاده از طیف موج‌های رادیویی را تخصیص می‌داد. به این صورت که متقاضیان نام‌نویسی می‌کردند و دولت با بررسی‌های خود، بهترین گزینه را انتخاب می‌کرد. این روش به دلیل زمان‌بر و سخت بودن رویه‌ی آن و هم‌چنین خالی ماندن تعداد زیادی از حق امتیازها منسوخ شد. سپس مدتی از روش لاتاری استفاده شد که در آن حق امتیاز به صورت شانسی بین افراد مختلف تقسیم شد. نتیجه‌ی این کار این بود که در سال ۱۹۸۹ یک شرکت ناآشنا بر اساس شانس، به حق راه‌اندازی خطوط تلفن همراه در منطقه‌ای از امریکا دست پیدا کرد و اندکی بعد این حق را با مبلغ ۴۱ میلیون دلار به کمپانی دیگری فروخت. بد نیست بدانیم که بر اساس تخمین اولیه‌ی دولت، مجموع ارزش همه‌ی حق امتیازهایی که در دهه‌ی ۸۰ واگذار شدند در حدود ۴۶ میلیون دلار بودند.

حراج طیف‌های رادیویی، ایده‌ی جدیدی نبود. نیوزلند در سال ۱۹۸۹ و انگلستان در سال ۱۹۹۰ از این روش استفاده کرده بودند. سرانجام در آگوست ۱۹۹۳ کنگره‌ی امریکا دولت این کشور را موظف کرد که روش‌های مختلفی برای حراج و قیمت‌دهی رقابتی را طراحی و تست کند تا نهایتا در می ۱۹۹۴ حراج را برگزار کند. قانون محدوده‌ی وسیعی از اهداف مختلف را برای حراج مشخص کرده بود:

- استفاده‌ی کارا و موثر از طیف‌های الکترومغناطیسی
- تشویق به راه‌اندازی سریع فناوری‌های نوین
- جلوگیری از تمرکز بیش از اندازه‌ی حق امتیازها در دست یک شرکت خاص
- اطمینان از رسیدن بخشی از حق امتیازها به شرکت‌هایی که صاحبان آن‌ها از قشرهای متوسط جامعه هستند، یا خانم هستند و هم‌چنین شرکت‌های کوچک و شرکت‌های تلفن روستایی

قانون، اولویت بالا بودن سود دولت به عنوان هدف حراج را به شدت پایین در نظر گرفته بود. دستیابی به اهدافی که در بالا ذکر شدند، محرک اصلی استفاده از سازوکار حراج بوده است. در غیر این‌صورت دولت می‌توانست با عرضه‌ی انحصاری حق امتیازها، به میزان کم و با قیمت بالا، به سود فراوانی دست پیدا کند. با این وجود تخمین‌های موجود از ارزش این حقوق، کمیته‌ی طراح حراج را وارد کرد که میزان سود را نیز در طراحی حراج خود در نظر بگیرند.

[۱۴] Personal communications services

این کمیته با بررسی مکانیزم‌های مختلف حراج، پیشنهادهای اولیه خود را در اختیار شرکت‌ها قرار داد. بیش از ۲۲۰ شرکت و گروه نظرات خود را اعلام کردند و در نهایت مدل نهایی توسط مقامات دولتی با راهنمایی اعضای این کمیته انتخاب شد. هر چند که بحث‌های سیاسی به تصمیم کنگره برای برگزاری حراج منتج شده بود اما رویه‌ی طراحی حراج کاملا توسط اقتصاددان‌ها انجام شد. بدون دخالت سیاستمداران.

تجربه‌های گذشته: ایده‌ی حراج طیف‌ها، اولین بار در نیوزلند به کار رفت. دولت نیوزلند بر اساس مشاوره‌ی یک شرکت انگلیسی-امریکایی، حراج دربسته‌ی قیمت دوم برگزار کرد. نتیجه‌ی شرم‌آور این حراج ، این بود که برندگان مبالغی بسیار کمتر از پیشنهاد خود را پرداختند. برای مثال در یک مورد برنده صدهزار دلار پیشنهاد داده بود در حالی که پیشنهاد دوم پس از وی، ۶ دلار بود. در یک مورد دیگر، پیشنهاد اول ۷ میلیون دلار و پیشنهاد بعدی ۵هزار دلار بود. یک دانشجو برای تلویزیون محلی در یک شهر کوچک، یک دلار پیشنهاد داد و از آن‌جایی که پیشنهاد دیگری وجود نداشت، برنده شد و مبلغی هم پرداخت نکرد. در مجموع این حراج به سود ۳۶ میلیون دلاری برای دولت منجر شد که یک هفتم ۲۴۰ میلیون دلاری بود که پیش‌بینی شده بود.

دو مشکل اساسی که در این حراج وجود داشتند:

- تاثیر سیاسی حراج: از دید عموم پس از حراج مشخص شده بود که حق امتیاز برای هر شرکت چقدر ارزش داشته و شرکت تا چه میزان کمتری پرداخت کرده است. هر چند که در تئوری ثابت می‌شود که این مکانیزم بهترین قیمت را و بیشترین سود را تعیین می‌کند اما جنبه‌ی روانی و زیر سوال رفتن دولت مهم‌تر بوده است.

- نداشتن مقدار کمینه‌ی قیمت: اگر مقدار کمینه‌ای برای قیمت نهایی تعیین می‌شد، سود نهایی افزایش پیدا می‌کرد. در شرایطی مثل نیوزلند که رقابت بین پیشنهاد دهندگان کم است، تعیین کمینه‌ی قیمت، تا حدی می‌تواند جای خالی رقابت را پر کند.

در مجموع به دلیل شکایت‌های عمومی، دولت حراج قیمت دوم را متوقف کرد و در حال حاضر از حراج دربسته‌ی قیمت اول استفاده می‌کند.

تجربه‌ی دولت استرالیا نیز بیانگر اهمیت توجه به جزئیات طراحی حراج است. دولت دو حق امتیاز تلویزیون ماهواره‌ای را در آوریل ۱۹۹۳ از طریق حراج دربسته‌ی قیمت اول ارائه کرد. نتیجه‌ی این حراج بسیار مضحک و خنده‌دار بود و وزیر ارتباطات وقت استرالیا را تا نزدیکی اخراج شدن برد. حق امتیازها را دو شرکت ناآشنا بردند که مبالغی بسیار بالا پیشنهاد داده بودند و توانسته بودند با این مبلغ یک کنسرسیوم بسیار معتبر و مطرح را در حراج شکست دهند. مبالغ پیشنهادی به ترتیب ۲۱۲ و ۱۷۷ میلیون دلار بودند و دولت نتیجه‌ی حراج را شروع عصری جدید نامید.

اندکی بعد مشخص شد که دو شرکت برنده هیچ تمایلی برای پرداخت مبالغ پیشنهادی ندارند. این دو شرکت ۲۰ پیشنهاد دیگر با فاصله‌های ۵ میلیون دلاری از یکدیگر ارائه کرده بودند تا بتوانند با بالاترین پیشنهاد خود مطمئن باشند که برنده می‌شوند. سپس هر دو شرکت اعلام کردند که مبلغ مورد نظر را نمی‌توانند بپردازند. طبق قوانین در این شرایط برنده نفر دوم بود که باز هم همین شرکت‌ها بودند. با تکرار این کار، در نهایت حق امتیازها با قیمت‌های ۱۱۷ و ۷۷ میلیون دلار فروخته شدند که به ترتیب ۹۵ و ۱۰۰ میلیون دلار از مقدار اولیه کمتر بودند. در ادامه هر دو شرکت حق خود را به شرکت‌های دیگری فروختند و میزان قابل توجهی هم سود کردند.

درگیری‌های این حراج صنعت تلویزیون ماهواره‌ای را در استرالیا یک سال عقب انداخت. دلیل اصلی بروز این اتفاق مشخص نکردن جریمه در صورت انصراف از پرداخت و در نتیجه بی‌معنی بودن پیشنهادها بوده‌است.

تجربه‌های از این دست لزوم توجه به تمام جزئیات در طراحی این حراج را مشخص می‌کند. در امریکا با در نظر گرفتن یک رویه‌ی دقیق برای طراحی جزئیات مختلف حراج، فروش طیف‌های رادیویی از طریق تکرار حراج دربسته‌ی قیمت اول در چند مرحله انجام شد.

حراج‌های اینترنتی

یکی از فضاهای جدید تجارت، اینترنت است. مشابه مباحث مختلفی که از فضای تجارت وارد اینترنت شده‌اند، حراج‌ها نیز اینترنتی شده‌اند. برگزاری حراج در اینترنت ویژگی‌ها و مشکلات خاص خودش را دارد. ویژگی‌هایی مانند امکان برقراری هم‌زمانی به صورت واقعی یا برگزاری حراج در سطح دنیا بدون نیاز به جمع کردن شرکت‌کنندگان و ... و مشکلاتی مانند مسائل امنیتی و اعتماد نکردن کاربران.

در تحقیقی بر روی ۱۰۰ سایت معروف برگزاری حراج اینترنتی، نتایج زیر به صورت خلاصه به دست آمده‌اند:

- اولین و واضح‌ترین نتیجه: حراج‌های اینترنتی یک فیلد به شدت پویا و در حال رشد در تجارت الکترونیک هستند.
- تکنولوژی به اندازه‌ای پیشرفت کرده است که به راحتی بتوان حراج اینترنتی برگزار کرد و از طرف دیگر مدل‌های کسب و کار نیز به حدی از پیشرفت رسیده‌اند که بتوانند برای حجم زیاد کاربران اینترنت به کار آیند.
- معمول‌ترین حراج برخط، حراج انگلیسی است که تقریبا یک هفته ادامه دارد و برنده صرفا بر اساس قیمت پیشنهادی‌اش مشخص می‌شود.
- بیشترین کالایی که در حراج‌های برخط فروخته می‌شود تجهیزات رایانه‌ای و اشیای قیمتی است که غالبا از مدل B۲C استفاده می‌شود.
- شرکت‌هایی که حراج برخط، کار اصلی آن‌هاست، معمولا بر داشتن سایت‌های مجهز و توجه به قواعد اصرار دارند. در مقابل شرکت‌هایی که کار آن‌ها حراج است (نه لزوما اینترنتی) تقریبا مفهوم جدیدی از حراج را با توجه به ویژگی‌های فضای اینترنتی ایجاد کرده‌اند.
- در مجموع در این حوزه، بخش‌های مختلفی برای ادامه‌ی بررسی‌ها و ایجاد مدل‌های جدید وجود دارد. به نظر می‌آید از تمام ویژگی‌های فضای برخط در طراحی حراج‌های فعلی استفاده نشده‌است و می‌توان مدل‌های حراج جدیدی را در این فضا ارائه کرد. هم‌چنین بررسی رفتار پیشنهاد دهندگان در اینترنت با توجه به ویژگی‌های ارتباطی خاص آن، زمینه‌ی تحقیقاتی دیگری خواهدبود.

کارهای آتی

در بررسی یکسان بودن نتیجه‌ی حراج‌ها به طور میانگین، چهار شرط ساده‌سازی اولیه داشتیم. در آینده می‌توان بررسی کرد که با حذف هر یک از این شرایط چه اتفاقی می‌افتد و چگونه باید عمل کرد. هم‌چنین نتایج بررسی‌ها و طراحی حراج در امریکا، مدل‌ها و ایده‌های جدیدی از برگزاری حراج را معرفی کرد که جای تحقیق و بررسی بیشتر دارد.

مراجع

[1] Hal R. Varian, *Varian. Economic Mechanism Design forComputerized Agents* , Usenix Workshop on Electronic Commerce, July 11-12, 1995.

[2] Preston R. McAfee and John McMillan , *Auctions and Bidding* ,Journal of Economic Literature, 25:699-738, 1987.

[3] John McMillan , *Selling Spectrum Rights* , Journal of Economic Perspectives, 8(3):145-162, 1994.

[4] Carrie Beam and ArieSegev, *Auctions on the Internet: A Field Study* , Working Paper 98-WP-1032, November 1998 (Revised).

[5] Paul Milgrom , *Auctions and Bidding: A Primer* , Journal of EconomicPerspectives, 3(3):3-22, 1989.

[6] William Vickrey , *Counterspeculation, Auction and Competitive Sealedtenders* , Journal of Finance, 16:8-37, 1961.

اثباتها و ردها

ایمره لاکاتوش
ترجمه : فرید بویا

چکیده

مؤلف در این کتاب از یک کلاس خیالی صحبت می‌کند. در این کلاس دانش‌آموزان و معلم مشغول بحث بر روی یک مسئله هستند. هر کدام از دانش‌آموزها، طرز فکر خاص خود را دارد. معلم نیز به عنوان شخص دانا، میان آنها داوری می‌کند. در این کتاب، فضای کلاس همان فضای علمی جامعه است. هر دانش آموز نماینده یک یا چند دانشمند با طرز فکر مشابه است، که حتی در بعضی موارد جملاتی را به زبان می‌آورد که دانشمند مذکور در کتاب خود یا جایی دیگر نقل کرده‌است. معلم، به مشابه یک جامعه علمی می‌ماند که بعضی طرز فکرها را به بعضی دیگر ترجیح می‌دهد و از بعضی دانش‌آموزها(دانشمندها) در رابطه با روشهان سؤال می‌کند و آنها را زیر سؤال می‌برد. در حین پیش‌رفتن متن، طرز فکرها کم‌کم پخته‌تر می‌شوند و اشکالات وارد بر آنها کمتر می‌شود.

۱ یک مسئله و یک حدس

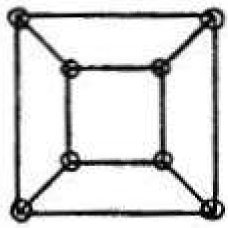
اشخاصی در کلاسی خیالی در حال بحث روی یک مسئله هستند : آیا رابطه‌ای منطقی بین تعداد رئوس(گوشه‌ها،v)، تعداد یالها(لبه ها،e) و تعداد وجه های(f) یک چند وجهی وجود دارد ؟ همانند رابطه‌ای که میان تعداد اضلاع و تعداد زاویه‌های یک چند ضلعی به صورت (v=e) وجود دارد ؟ آنها پس از مقدار زیادی سعی و خطا به این نتیجه می‌رسند که برای تمامی چند وجهی‌های منتظم، رابطه $v-e+f=2$ برقرار است. یکی از آنها حدس می‌زند که این رابطه ممکن است برای تمام چندوجهی‌ها برقرار باشد. بقیه سعی می‌کنند که حدس او را رد کنند. آنها از راه‌های مختلف به حدس او هجوم می‌برند، ولی حدس محکم می‌ایستد. نتایج بدست‌آمده گمان این را می‌دهد که شاید این حدس قابل اثبات باشد.

۲ یک اثبات

معلم : در جلسه قبل به یک حدس در مورد چند وجهی‌ها رسیدیم که طبق آن برای هر چند وجهی رابطه $v-e+f=2$ برقرار است. با روشهای مختلف درستی آن را تحقیق کردیم. ولی هنوز آن را اثبات نکرده‌ایم. آیا کسی اثباتی پیدا کرده‌است؟

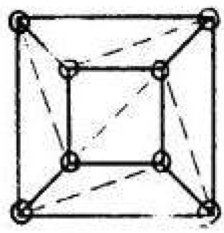
شاگرد سیگما: من به شخصه اعتراف می‌کنم که هنوز نتوانسته‌ام برای این قضیه اثباتی صریح پیدا کنم... با این حال درستی‌اش در حالت‌های بسیار زیادی تحقیق شده‌است و شکی نیست که این رابطه برای تمام احجام برقرار است. پس به نظر می‌رسد که گزاره به طور رضایت بخشی نمایش داده‌شده‌باشد. ولی اگر اثباتی دارید، خواهشاً آن را ارایه دهید.

معلم: اتفاقاً من یک اثبات دارم. این اثبات مبنی بر این تجربه فکری است :
لم[۱] ۱ : فرض کنید که چند وجهی خالی است و از لاستیک نرم و قابل انعطاف ساخته‌شده‌است. اگر ما یکی از وجه‌های آن را بُبریم، می‌توانیم وجه‌های باقیمانده را بکشیم و آنها را روی تخته سیاه بنشانیم، بدون اینکه به آنها صدمه بزنیم. وجه‌ها و یال‌ها ممکن است شکل اصلی خود را از دست‌بدهند، یال‌ها ممکن است دیگر خط راست نباشند و منحنی شده باشند، ولی v و e تغییر نخواهندکرد، پس رابطه $v-e+f=2$ برای چند وجهی برقرار است، اگر و تنها اگر، رابطه $v-e+f=1$ برای این شبکه مسطح برقرار باشد — یادتان هست که ما یک وجه را بُریدیم. (شکل ۱ شبکه مسطح را هنگامی که چندوجهی مورد نظر یک مکعب است، نشان می‌دهد)



شکل ۱

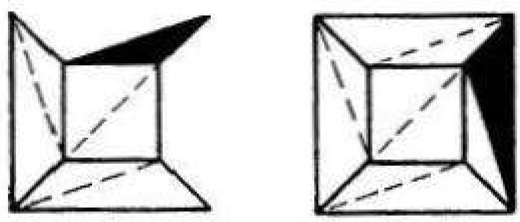
گام ۲ : حال ما شبکه خود که شبیه نقشه جغرافیا است را مثلث‌بندی می‌کنیم. برای چندضلعی‌های بدست‌آمده (که ممکن است از خطوط ناصاف تشکیل شده‌باشند)، تک‌تک قطررسم می‌کنیم (ممکن است قطرها هم ناصاف باشند). این کار را تا آنجا ادامه می‌دهیم که تمامی چندضلعی‌های باقیمانده مثلث شوند. با رسم هر قطر در شبکه، مقدارe و f هر کدام ۱ واحد اضافه می‌شود، لذا مجموع $(v-e+f)$ بی‌تغییر می‌ماند. (شکل ۲)



شکل ۲

[۱] lemma

گام ۳ : از شبکه مثلث‌بندی‌شده، شروع به حذف تک‌تک مثلث‌ها می‌کنیم. در هنگام حذف یک مثلث، یا یک یال و یک ناحیه(وجه) را حذف می‌کنیم(شکل ۳ (آ))، یا دو یال و یک رأس و یک ناحیه را حذف می‌کنیم(شکل ۳ (ب)). پس رابطه v−e+f=۲ قبل از حذف مثلث‌ها برقرار است، اگر و تنها اگر پس از حذف مثلث‌ها برقرار باشد. درآخر، تنها یک مثلث باقی‌می‌ماند. رابطه v−e+f=۲ به وضوح برای یک مثلث برقرار است. لذا ما حدس خود را ثابت کرده‌ایم[۲].



(ب) (آ)

شکل ۳

شاگرد دلتا: شما باید دیگر این را یک قضیه بدانید. دیگر هیچ موضوع حدس‌گونه‌ای در مورد آن وجود ندارد.

شاگرد آلفا: من یک چیز را متوجه نمی‌شوم. من می‌توانم درک کنم که این تجربه قابل انجام بر روی یک مکعب یا یک چهاروجهی است، اما چگونه می‌توانم مطمئن باشم که بر روی هر چندوجهی قابل انجام است؟ برای مثال، آیا شما مطمئن هستید که هر چندوجهی، بعد از بریده‌شدن یک وجه، قابل نشاندن روی صفحه است؟ من به گام اول مشکوکم.

شاگرد بتا: آیا شما مطمئن هستید که در مثلث‌بندی نقشه، با اضافه کردن هر یال همواره یک ناحیه اضافه می‌شود؟ من به گام دوم مشکوکم.

شاگرد گاما: آیا شما مطمئن هستید که (در گام سوم) فقط دو حالت وجود دارد؟ آیا مطمئن هستید که در پایان (این گام) تنها یک مثلث باقی می‌ماند؟ من به گام سوم مشکوکم.

معلم : البته که مطمئن نیستم.

آلفا: پس حالا وضعیتمان از قبل بدتر است! به جای تنها یک حدس حالا حداقل ۳ حدس داریم! و شما اسم این را اثبات می‌گذارید!

معلم : اعتراف می‌کنم که واژه سنتی "اثبات" برای این "تجربه فکری" کمی، و البته به درستی، گمراه‌کننده است. من فکر نمی‌کنم که این (تجربه فکری) درستی این حدس را ثابت کند.

دلتا: پس (تجربه فکری) چکار می‌کند؟ فکر می‌کنید یک اثبات ریاضی چه چیزی را ثابت می‌کند؟

[۲] این اثبات متعلق به کوشی است.

معلم : این یک پرسش ظریف است که ما بعداً به آن جواب خواهیم‌داد. تا آن زمان، پیشنهاد می‌کنم که واژه فنی و مقدس "اثبات[۳]" را برای یک "تجربه فکری[۴]" یا همان "شبه آزمایش[۵]" نگه دارید — که به تجزیه حدس اولیه به زیرحدس‌ها یا لِم ها اشاره می‌کند، که باعث نشاندن حدس در یک قالب(شاید خیلی دور از موضوع) می‌شود. برای مثال "اثبات" ما، حدس اصلی در مورد کریستال‌ها و احجام را بر اساس ورقه‌های لاستیکی بیان می‌کند. دکارت و اویلر، پدران این حدس، قطعاً این (طرز فکر) را حتی در خواب هم ندیده‌بودند.

۳ ایراد گرفتن از اثبات بوسیله مثال های نقض موضعی که کلی نیستند

معلم: این تجزیه حدس (به زیر حدس ها) که توسط اثبات به آن اشاره شده‌بود، گستره‌های جدیدی برای تحقیق درستی، باز می‌کند. تجزیه باعث شده که حدس در فضای بازتری مورد انتقاد قرار گیرد. ما حالا به جای یک شانس، حداقل ۳ شانس برای مثال نقض داریم!

گاما: من قبلاً هم عدم علاقه خود نسبت به لم سوم ابراز کرده‌ام. فکر می‌کنم که ممکن است حالت‌های دیگری به هنگام حذف یک مثلث وجود داشته‌باشد.

معلم: مورد شک بودن دلیل بر معیوب بودن نیست.

گاما: حال آیا مثال نقض، عیب[۶] محسوب می‌شود؟(یا آن هم عیب نیست)

معلم: یقیناً. حدس‌ها به شک و عدم علاقه توجهی نمی‌کنند، ولی قطعاً نمی‌توانند به مثال نقض بی‌توجه باشند.

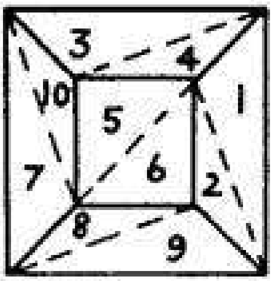
تتا: حدس‌ها به وضوح با کسانی که آن‌ها را ارائه داده‌اند، فرق دارند.

گاما: من یک مثال نقض ابتدایی ارائه می‌دهم. شبکه مثلثی را که به وسیله انجام دو گام اول بر روی یک مکعب ایجاد می‌شود را در نظر بگیرید.(شکل ۲) حال اگر من یک مثلث از وسط(و نه از حاشیه) شبکه بردارم، من یک مثلث(وجه) برداشته‌ام بدون اینکه هیچ یال یا رأسی حذف شود. پس لم سوم غلط است — نه تنها برای مکعب، بلکه برای هر چندوجهی بجز چهاروجهی(که در شبکه مسطح خود تنها مثلث های مرزی دارد). پس اثبات شما قضیه اویلر را تنها برای چهاروجهی ثابت می‌کند. ولی ما از قبل می‌دانستیم که چهاروجهی در رابطه اویلر صدق می‌کند، پس چرا آن‌را(دوباره) اثبات کنیم؟

معلم: حق با توست. اما دقت کن که مکعب که مثال نقض برای لم سوم بود، مثال نقض برای حدس اصلی نیست. تو ضعف بحث ما — اثبات — را نشان دادی، ولی حدس ما را باطل(رد) نکردی.

آلفا: پس با این حساب اثبات خود را دور خواهیدریخت؟

[۳] proof
[۴] thought-experiment
[۵] quasi-experiment
[۶] criticism



شکل ۴

معلم: خیر. عیب لزوماً نابودی نیست. من اثباتم را اصلاح می‌کنم تا بتواند در برابر عیب وارد شده مقاومت کند.

گاما: چگونه؟

معلم: بگذارید قبل از اینکه توضیح بدهم چگونه، شما را با این اصطلاحات آشنا کنم. "مثال نقض موضعی[۷]" را مثال نقضی می‌نامم که یک لم(و نه لزوماً حدس کلی) را رد می‌کند. "مثال نقض کلی[۸]" را مثال نقضی می‌نامم که حدس اصلی را رد می‌کند. پس مثال نقضی که تو آوردی، یک مثال نقض موضعی است و نه کلی. مثال نقض موضعی، عیب اثبات را بیان می‌کند، نه عیب حدس را.

گاما: پس حدس ممکن است درست باشد، ولی اثبات شما آنرا ثابت نمی‌کند.

معلم: ولی من به راحتی می‌توانم اثباتم را دقیق‌تر کنم و اشکال آن را رفع کنم. برای این کار من لم اشتباه را با یک لم کمی تغییر یافته جایگزین می‌کنم، که مثال نقض تو آن را رد نخواهدکرد. من دیگر ادعا نمی‌کنم که هر مثلثی که برداشته‌شود یکی از آن دو حالت شکل می‌گیرد. من تنها می‌گویم که در هر مرحله این حکم برای مثلث‌های مرزی برقرار است. بایستی قبول داشته‌باشید که تنها با یک تلاش جزئی اثبات دقیق شد.

گاما: من فکر نمی‌کنم که ملاحظه‌ی شما آن قدر هم جزیی بود، بلکه در واقع بسیار مبتکرانه بود. برای روشن شدن موضوع، نشان می‌دهم که این(علی رغم تصحیح) غلط است. شبکه مسطح شکل ۴ را در نظر بگیرید و مثلث‌ها را به ترتیب از ۱ تا ۸ جدا کنید. هنگام جدا کردن مثلث شماره ۸، مثلث ۸ یک مثلث مرزی است، در صورتی که هیچ یک از دو حالت ذکر شده برایش رخ نمی‌دهد: ۲ یال و یک ناحیه حذف می‌شوند، که در این صورت مجموع v-e+f تغییر می‌کند و دو مثلث جدا از هم ۹ و ۱۰ خواهیم داشت.

معلم: می‌توانم با گفتن این جمله که "منظورم از یک مثلث مرزی، مثلثی بود که حذفش شبکه را ناهم‌بند نکند"، آبروی خود را حفظ کنم. ولی اخلاق علمی و صداقت ذهنی اجازه استفاده ناجوانمردانه از جملاتی راکه با "منظورم از ..." شروع می‌شوند، نمی‌دهد. پس من اعتراف می‌کنم که بایستی نسخه دوم عملیات حذف مثلث را با یک نسخه سوم جای‌گزین کنم: در هر مرحله مثلثی را برمی‌دارم که حذف آن، مقدار v-e+f را تغییر ندهد.

[۷] local counterexample
[۸] global counterexample

کاپا: در کمال تواضع قبول دارم که لم مربوط به این عملیات(حذف مثلث) صحیح است: اگر ما مثلث‌ها را یک‌به‌یک طوری حذف کنیم که در هر مرحله v-e+f تغییر نکند، آنگاه v-e+f تغییر نمی‌کند.

معلم: نه(منظورم آن نیست). لم جدید این است که مثلث های شبکه ما می‌توانند طوری شماره‌گذاری شوند که با حذف آن‌ها به ترتیب، تا رسیدن به مثلث آخر، مقدار v-e+f تغییر نکند.

کاپا: ولی چگونه می‌توان این ترتیب را ساخت، با فرض اینکه حتی واقعا چنین ترتیبی وجودداشته‌باشد؟ نسخه اولیه تجربه فکری شما، دستور العمل(پیدا کردن ترتیب) را میداد: مثلث‌ها را به هر ترتیب دلخواه بردارید. نسخه تصحیح شده(دوم) هم این کار را میکرد: مثلث های مرزی را به هر ترتیب دلخواه بردارید. حال شما می‌گویید که بایستی به یک ترتیب خاص عمل کنیم، ولی نمی‌گویید که طبق کدام الگو، یا اینکه اصلاً این ترتیب وجود دارد یا خیر. پس تجربه فکری فرو می‌ریزد. شما "تحلیل اثبات[۹]" — که همان لیست لم‌هاست — را بهبود بخشیدید، ولی تجربه فکری که شما اسمش را "اثبات" گذاشتید، دیگر وجود ندارد و ناپدید شده‌است.

رو: فقط گام سوم ناپدیدشده‌است.

کاپا: علاوه براین، آیا شما(واقعاً) لم را بهبود بخشیدید؟ دو نسخه اول لم که ساده بودند، حداقل قبل از اینکه رد شوند درست به نظر می‌رسیدند؛ نسخه طولانی و وصله پینه شده جدید حتی ممکن هم به نظر نمیرسد. آیا واقعاً فکر می‌کنید که ممکن از رد شدن فرار کند(رد نشود)؟

معلم: گزاره‌های "ممکن" و یا حتی "بدیهتاً درست" معمولاً خیلی زود رد می‌شوند. این حدس‌های پیچیده و (ظاهراً)غیر ممکن و آبدیده شده در عیبجویی هستند که ممکن است درست باشند.

امگا: اگر حدس‌های پیچیده شما رد شدند و شما این دفعه نتوانستید آنها را با حدس‌های رد نشده دیگر جایگزین کنید چه؟ اگر موفق به بهبود صحبت‌های خود به وسیله وصله پینه نشدید چه؟ شما این دفعه توانستید با تعویض یکی از لم‌های خود از دست یک مثال نقض موضعی که کلی نبود فرار کنید. اگر دفعه بعدی نتوانستید فرار کنید چه؟

معلم: سؤال خوبی است، برنامه فردا(این سؤال) خواهدبود.

۴ ایراد گرفتن از اثبات بوسیله مثال های نقض کلی

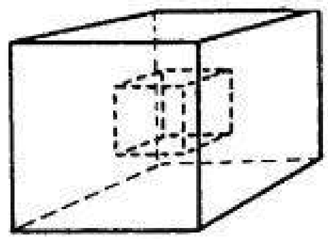
آلفا: من یک مثال نقض دارم که هم لم اول شما و هم خود حدس اصلی را نقض می‌کند.

معلم: صحیح! چه جالب. بگو ببینیم.

آلفا: حجمی را در نظر بگیرید که به وسیله دو مکعب محصور شده‌است — دو مکعب که یکی در داخل دیگری است، ولی با آن تماس پیدا نمی‌کند (شکل ۵). این مکعب توخالی، لم شماره یک را نقض می‌کند، چرا که با بریدن هیچ کدام از وجه‌ها، چه داخلی و چه خارجی، چندوجهی قابل نشاندن روی صفحه نمی‌شود. علاوه بر آن، برای هر

[۹] proof analysis

مکعب $v-e+f=2$ است، پس برای این شکل $v-e+f=4$ می‌شود.



شکل ۵

معلم: مثال خوبی بود. بگذارید اسمش را مثال نقض ۱ بگذاریم. خب حالا چه؟

۱.۴ رد حدس: روش تسلیم[۱۰]

گاما: جناب معلم، خونسردی شما من را متحیر می‌کند. یک مثال نقض همان قدر(خوب) یک حدس را رد می‌کند که ده مثال نقض آن را رد می‌کنند. حدس و اثباتش به کلی اشتباه از کار درآمدند. تسلیم شوید! باید تسلیم شوید. حدس اشتباه را دور بریزید و آن را فراموش کنید و یک مسیر جدید را امتحان کنید.

معلم: قبول دارم که با مثال نقض آلفا، ضربه سختی بر حدس وارد شد. ولی این درست نیست که اثبات "به کلی اشتباه" بود. اگر فعلاً، پیشنهاد قبلی من مبنی بر استفاده واژه "اثبات" برای یک "تجربه فکری" که باعث تجزیه حدس اصلی به چند زیرحدس می‌شود را قبول کنید، دیگر نیازی ندارید که هرجا سخن از آن آمد، از "تضمین درستی" سخن بگویید. اثبات من یقیناً فرمول اویلر را از دیدگاه اول ثابت کرد، ولی نه لزوماً از دیدگاه دوم. شما فقط به اثبات‌هایی علاقه دارید که آن چیزی که قرار است ثابت کنند را ثابت می‌کنند. من به (همه)اثبات‌ها علاقه دارم، حتی اگر نتوانند کار مورد نظر را انجام دهند. کریستف کلمب (که قرار بود به هند برسد)به هند نرسید، ولی چیز بسیار جالبی کشف کرد.

آلفا: پس بنا بر فلسفه شما — یک مثال نقض موضعی(و نه کلی) ایراد به اثبات است و نه به حدس — مثال نقض کلی ایراد به حدس است و نه لزوماً به اثبات. شما قبول می‌کنید که حدس خود را تسلیم کنید، ولی از اثبات خود دفاع می‌کنید. ولی اگر حدس اشتباه است، اثبات آن دقیقا چه چیزی را ثابت می‌کند؟!

گاما: مقایسه‌ای که با کریستف کلمب انجام دادید (اینجا) فرو می‌ریزد. قبول کردن یک مثال نقض بایستی به معنای تسلیم کامل باشد.

[۱۰] method of surrender

۲.۴ رد مثال نقض: روش تحریم هیولاها[11]

دلتا: ولی چرا مثال نقض را قبول کنیم؟ ما حدس خود را ثابت کردیم — الان یک قضیه است. قبول دارم که با این چیز به اصطلاح "مثال نقض" تناقض دارد. یکی از آن‌ها بایستی کنار رود. ولی چرا قضیه کنار برود هنگامی که ثابت شده‌است؟ این "ایراد" است که باید کنار رود. این ایراد، جعلی است(معتبر نیست). یک جفت مکعب در دل هم، یک چندوجهی نیست؛ یک هیولا است. یک حالت غیر عادی، نه یک مثال نقض.

گاما: چرا نه؟ یک چندوجهی حجمی است که سطحش از چندضلعی‌ها تشکیل شده‌باشد. و مثال نقض من چنین خاصیتی دارد.

معلم: بگذارید اسمش را تعریف ۱ بگذاریم.

دلتا: تعریف تو صحیح نیست. یک چندوجهی بایستی یک رویه باشد که: وجه، رأس و یال داشته‌باشد و قابلیت تغییر شکل و نشانده‌شدن روی صفحه را داشته‌باشد. چند وجهی هیچ ربطی به مفهوم "حجم" ندارد، چند وجهی یک رویه تشکیل شده از یک دستگاه از چند ضلعی‌ها است.

معلم: این را تعریف ۲ بنامید.

دلتا: پس تو در واقع به ما ۲ تا چندوجهی نشان دادی — یکی کاملاً در داخل دیگری. یک زن باردار با یک بچه در شکم خود، یک مثال نقض برای گزاره "انسان‌ها یک سر دارند" نیست.

آلفا: عجب! مثال نقض من یک مفهوم جدید از چندوجهی به وجود آورد. یا اینکه جرأت این را داری که بگویی همواره منظورت از چندوجهی، یک رویه بوده‌است؟

معلم: بگذارید فعلاً تعریف شماره ۲ دلتا(از چندوجهی) را قبول کنیم. آیا می‌توانی باز هم فرض ما را رد کنی؟

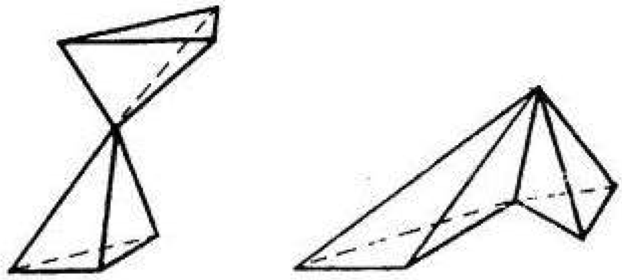
آلفا: یقیناً. دو چهاروجهی که در یک یال با هم اشتراک دارند(شکل ۶(آ)). یا دو چهاروجهی که در یک رأس با هم اشتراک دارند(شکل ۶(ب)). هر دوی این‌ها هم‌بند هستند، تنها یک رویه دارند و برای هر دوی آن‌ها $v-e+f=3$ است.

معلم: آن‌ها را مثال نقض های ۲ الف و ۲ ب بنامید.

دلتا: تخیلات منحرفت را تحسین می‌کنم، ولی قطعاً من نگفتم هر سیستمی از چندضلعی‌ها یک چندوجهی است. وقتی می‌گویم چندضلعی، منظورم یک سیستم از چندضلعی‌هاست که (۱) در هر یال دقیقاً دو وجه اشتراک داشته‌باشند و (۲) از داخل هر چندضلعی بتوان به داخل هر چندضلعی دیگر بدون برخورد با هیچ رأسی رفت. شکل اول تو با شرط ۱ ناسازگار است و رد می‌شود و شکل دوم تو با شرط ۲.

معلم: تعریف ۳.

[11] the method of monster-barring



(ب) (آ)

شکل ۶

آلفا: ابتکار منحرفت را تحسین میکنم که با ساختن تعریف پشت تعریف مانع از رد شدن ایده های ضعیف خود می‌شوی. چرا یک چندوجهی را صرفاً یک سیستم از چندضلعی‌ها تعریف نمی‌کنی که برای آن رابطه $v-e+f=۲$ برقرار باشد؟ این تعریف دقیق ...

کاپا: تعریف P.

آلفا: ... اختلاف را برای همیشه از میان خواهدبرد. دیگر نیازی برای بررسی موضوع نخواهدبود.

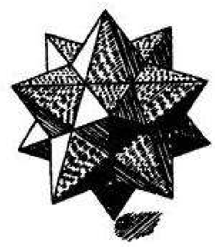
دلتا: ولی هیچ قضیه‌ای در دنیا وجود ندارد که به وسیله هیولاها نقض نشود.

معلم: ببخشید که بحثتان را قطع می‌کنم. همانطور که دیدید، رد کردن به وسیله مثال نقض، به معنی و تعریف اشیاء مورد بحث بستگی دارد. اگر بخواهیم که یک مثال نقض بی‌طرفانه (برای یک حدس)عیب باشد، بایستی در مورد تعاریف و معانی با هم تفاهم داشته‌باشیم. برای رسیدن به چنین تفاهمی، می‌توان هنگامی که سوء تفاهمی بر سر تعریف یک شیء پیش می‌آید، برای شیء مورد نظر یک تعریف دقیق ارائه داد. من به شخصه، واژه "چندوجهی" را تعریف نکردم. فرض کردم که شماها با مفهوم آن "آشنایی" دارید، یعنی می‌توانید چندوجهی را از غیرش تشخیص دهید — چیزی که بعضی منطقدان‌ها آن را دانستن بسط مفهوم چندوجهی می‌خوانند. این طور که پیداست، بسط مفهوم چندوجهی اصلاً واضح نبود: هنگامی که مثال های نقض یافت می‌شوند، تعاریف به طور مکرر پیشنهاد می‌شوند و مورد بحث قرار می‌گیرند. پیشنهاد می‌کنم که فعلاً تمامی تعاریف را با هم در نظر بگیریم و بحث در مورد اختلاف تعاریف و اختلاف نتایج حاصل از پذیرفتن هریک ازآنها را به بعد موکول کنیم. آیا کسی می‌تواند مثال نقضی ارائه بدهد که حتی با سخت‌گیرترین تعریف هم سازگار باشد؟

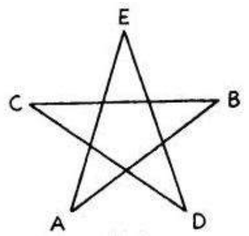
کاپا: با تعریف P ؟

معلم: بدون تعریف P.

گاما: من می‌توانم. به مثال نقض ۳ توجه کنید: یک چندوجهی ستاره‌گون[۱۲]، که اسمش را جوجه تیغی[۱۳] می‌گذارم (شکل ۷). این شکل از ۱۲ ستاره ۵رأسی[۱۴] تشکیل شده‌است (شکل ۸). ۱۲ رأس، ۳۰ یال و ۱۲ وجه پنج ضلعی دارد — می‌توانید خودتان چِک کنید. از آنجا که قضیه دکارت-اویلر برای این شکل برقرار نیست و در اینجا $v-e+f=-6$ است، این قضیه نمی‌تواند درست باشد.



شکل ۷



شکل ۸

دلتا: چرا فکر می‌کنی که جوجه تیغی تو یک چند وجهی است؟

گاما: مگر نمی‌بینی؟ این یک چندوجهی است که وجوهش، ۱۲تا ستاره ۵رأسی هستند. در تعریف آخر تو نیز صدق می‌کند: این یک سیستم از چندضلعی‌ها به طوری که (۱) در هر یال دقیقاً دو چندضلعی اشتراک داشته باشند و (۲) از هر چندضلعی می‌توان به چندضلعی‌های دیگر رفت، بدون اینکه مجبور به عبور از رأسی باشیم.

دلتا: ولی (حالا)تو نمی‌دانی که یک چندضلعی چیست! یک چند ضلعی یک سیستم از یالهاست به طوری که (۱) در هر رأس دقیقاً دو یال اشتراک داشته‌باشند و (۲) یال ها، بجز در رأس ها، هیچ جا یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

معلم: بگذارید اسمش را تعریف ۴ بگذاریم.

گاما: نمی‌دانم که چرا شرط دوم را می‌گذاری. تعریف صحیح بایستی فقط شرط اول را داشته‌باشد.

معلم: تعریف ′۴.

گاما: شرط دوم هیچ ربطی به ذات چندضلعی ندارد. ببین: اگر من یکی از یال‌ها را (از محل تقاطع)کمی خم کنم، آنگاه ستاره ۵رأسی حتی با تعریف تو هم یک چندضلعی است. تو فرض می‌کنی که یک چندضلعی حتماً باید با گچ روی تخته سیاه کشیده‌شده‌باشد، در صورتی که بایستی آن را یک یک ساختمان چوبی فرض کنی: در این صورت واضح است که نقطه مشترکی که از آن صحبت می‌کردی، یک نقطه نیست، بلکه دو نقطه یکی بالای دیگری هستند(که هنگام تصویر شدن بر روی صفحه، روی هم افتاده اند). تو به وسیله مفهوم نشانده‌شدن چندضلعی در صفحه گمراه شده‌ای(در صورتی که لزوماً چنین شرطی نیست) — بایستی بگذاری که (چندضلعی)بال‌هایش را در فضا بگستراند.

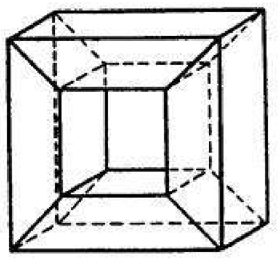
[۱۲] star-polyhedron
[۱۳] Urchin
[۱۴] star pentagon

دلتا: می‌توانی بگویی که مساحت یک ستاره ۵رأسی چقدر است؟ یا اینکه می‌گویی بعضی از چندضلعی‌ها اصلاً مساحت ندارند؟

گاما: مگر خود تو نبودی که می‌گفتی مفهوم چندوجهی هیچ ارتباطی با مفهوم حجم و احجام ندارد؟ حال چرا مفهوم چندضلعی را به مفهوم مساحت ربط می‌دهی؟ ما قبول کردیم که چندوجهی یک رویه بسته با تعدادی یال و رأس است — حال چرا قبول نمی‌کنی که یک چندضلعی، صرفاً یک منحنی بسته با تعدادی رأس است؟ ولی اگر به عقایدت پایبندی، من می‌توانم مساحت یک ستاره ۵رأسی را تعریف کنم.[۱۵]

معلم: بگذارید فعلاً این دعوا را کنار بگذاریم، و همانند قبل پیش برویم. دو تعریف آخر، ۴ و ′۴، را در نظر بگیرید. آیا کسی می‌تواند مثال نقضی بدهد که با هر دو تعریف چندضلعی‌ها سازگار باشد؟

آلفا: این هم یک مثال نقض. یک قاب عکس همانند شکل ۹ را در نظر بگیرید. این یک مثال نقض است که با هرکدام از تعاریفی که تا به حال گفته‌شده‌است، سازگار است. با این حال، اگر رئوس، یال‌ها و وجه‌های آن را بشمارید، می‌بینید که $v-e+f=0$.



شکل ۹

معلم: مثال نقض ۴.

بتا: این پایان کار حدس ماست. واقعاً افسوس دارد، چرا که برای حالت‌های خیلی زیادی درست بود و کار می‌کرد. ولی ظاهراً فقط وقتمان را تلف کردیم.

آلفا: دلتا؟ (چه شده؟) من واقعاً متعجب شدم. چیزی نمی‌گویی؟ نمی‌توانی این مثال نقض را (با یک تعریف جدید)رد کنی؟ فکر می‌کردم که هیچ قضیه‌ای در دنیا نباشد که تو نتوانی با یک حقه زبانی مناسب آن را از رد شدن نجات دهی. حال تسلیم شده‌ای؟ آیا بالاخره قبول کردی که چندوجهی‌های غیر اویلری نیز وجود دارند؟ احسنت!

دلتا: تو واقعا بایستی یک اسم مناسب برای موجودات غیر اویلریت پیدا کنی و آنها را "چندوجهی" صدا نکنی و ما را گمراه نکنی. ولی من کم‌کم دارم از هیولاهای تو خسته می‌شم و به اونا دیگه علاقه‌ای ندارم. من از "چندوجهی"های

[۱۵] به مقالات میستر(Meister) مراجعه کنید.

رقّت‌آور تو، که فرمول زیبای اویلر برای آنها برقرار نیست، متنفرم. من در ریاضیات به دنبال نظم و هماهنگی هستم، درحالیکه تو فقط بی نظمی و آشفتگی منتشر می‌کنی. روش‌های ما قابل انطباق نیستند.

آلفا: تو یک محافظه کار از مد افتاده هستی! تو هرج و مرج طلب‌ها را به خاطر شرارتشان در خراب کردن "نظم" و "هماهنگی" ات سرزنش می‌کنی، و مشکلات را با پیشنهادهای زبانی حل می‌کنی.

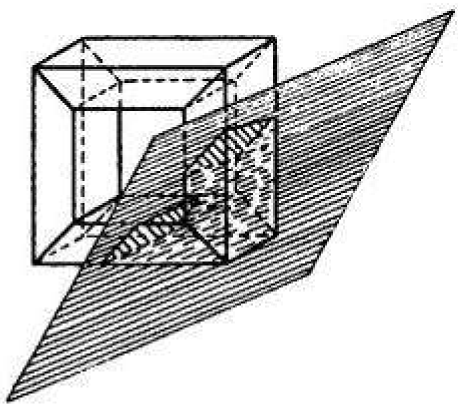
معلم: بیایید جدیدترین تعریف نجات دهنده را بشنویم.

آلفا: منظورتان آخرین حقه زبانی است؟ آخرین انقباض از مفهوم چندوجهی! دلتا به جای اینکه مسائل را حل کند، آنها را منحل می‌کند.

دلتا: من مفاهیم را منقبض نمی‌کنم. این تو هستی که مفاهیم را بسط میدهی. برای مثال، این قاب عکس اصلاً یک چندوجهی معتبر نیست.

آلفا: چرا؟

دلتا: یک نقطه دلخواه در "تونل" موجود در قاب(جایی که عکس قرار است باشد) انتخاب کن. یک صفحه از آن بگذران. خواهی دید که هر صفحه ای که انتخاب کنی، قاب عکس را در دو چند ضلعی کاملاً جدا از هم قطع می‌کند(شکل ۱۰).

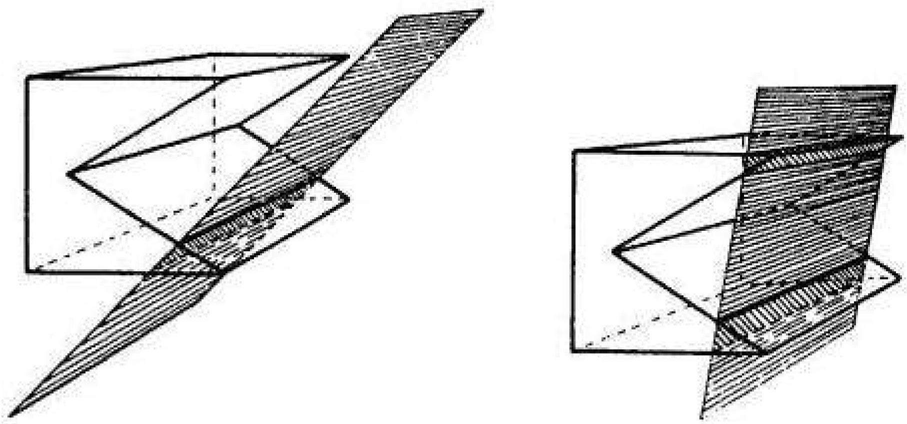


شکل ۱۰

آلفا: خب حالا چه؟

دلتا: وقتی که یک چندوجهی معتبر داریم، برای هر نقطه در فضا، حداقل یک صفحه وجود دارد که از آن نقطه میگذرد و چندوجهی را دقیقاً در یک چندضلعی قطع می‌کند. در مورد چندوجهی‌های محدب، برای هر صفحه و نقطه، این خاصیت برقرار است. در مورد چندوجهی‌های مقعر معمولی، برای بعضی نقاط، بعضی صفحات

هستند که چند سطح مقطع (با چندوجهی)دارند، ولی همواره صفحاتی هم وجود دارند که تنها یک سطح مقطع دارند(شکل‌های ۱۱(آ) و ۱۱(ب)). در مورد این قاب عکس، اگر نقطه را در درون تونل انتخاب کنیم، هر صفحه گذرنده از آن، دو سطح مقطع خواهد داشت. حال تو چگونه می‌توانی آنرا چندوجهی بنامی؟



(ب) (آ)

شکل ۱۱

معلم: مثل اینکه یک تعریف دیگر داریم، این دفعه یک تعریف ضمنی. آنرا تعریف ۵ بنامید.

آلفا: یک سری مثال نقض، یک سری تعریف متناظر با آنها. تعاریفی که هیچ چیز جدیدی ندارند، صرفا آیاتی در باره یک مفهوم قدیمی هستند، که به نظر می رسد به اندازه تعداد مثال نقض ها،شرط پنهان دارد(که آنرا از نقض شدن نجات میدهد). گزاره "برای هر چندوجهی $v-e+f=۲$ است" به نظر غیر قابل بحث میرسد، یک حقیقت کهن و "جاودانه". عجیب است که روزگاری این یک حدس زیبا بود، پر از هیجان و مبارزه افکار. حال به خاطر تغییرها و تحریف‌های عجیب شما در تعاریف، این به یک سنت بی ارزش تبدیل شده‌است، یک تعصب پست.[از کلاس خارج می‌شود.]

دلتا: نمیفهمم چطور شخص قابلی مثل آلفا باید استعدادش را با عیبجویی از دیگران تلف کند. به نظر میرسد که او غرق در ساختن هیولاها باشد. ولی هیولاها هرگز باعث رشد نمی‌شوند، چه در دنیای واقعی و چه در دنیای افکار. تکامل همواره یک الگوی منظم دارد.

گاما: علم ژنتیک حرف تو را رد می‌کند. نشنیده ای که جهش‌های ژنتیکی که باعث تولید گیاهان و جانوران غیر عادی(هیولا) می‌شوند، نقش مهمی در تحولات عظیم سیر تکامل دارند؟ (نسل شناسان) این موجودات تکامل یافته و عجیب و غریب را "هیولاهای امیدوار" مینامند. به نظر من، مثال نقض‌های آلفا، گرچه هیولا بودند، ولی "هیولای امیدوار" بودند.

دلتا: به هرحال. آلفا تسلیم شد. دیگر هیولا نخواهیم دید.

گاما: من یک هیولای جدید دارم. این هیولا با تمامی شرایط در تعاریف ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ و ۵ مطابقت دارد، ولی برای آن $v-e+f=1$ است. این(مثال نقض ۵) یک استوانه ساده است. ۳ تا وجه دارد(بالا، پایین و کنار یا پوشه[۱۶])، ۲ تا یال دارد(۲ دایره در بالا و پایین) و رأسی ندارد. بر طبق تعاریف تو، این یک چندوجهی معتبراست: (۱) دقیقاً دو چندضلعی در هر یال برخورد دارند و (۲) از درون هر چند ضلعی به درون هر چندضلعی دیگر می‌توان رفت، بدون اینکه از یال یا رأسی بگذریم. و البته بایستی قبول کنی که چندضلعی‌ها هم معتبر هستند: (۱) دقیقاً دو یال در هر رأس برخورد دارند و (۲) یال‌ها هیچ نقطه اشتراکی با هم جز در رأس‌ها ندارند.

دلتا: آلفا مفاهیم را (فقط)بسط میداد، ولی تو (آنقدر آنها را بسط میدهی که)آنها را میدَری! "یال"های تو یال(معتبر) نیستند! هر یال دقیقاً دو رأس دارد!

معلم: تعریف ۶ ؟

گاما: ولی چرا وجود "یال هایی" با ۰ یا ۱ رأس را تکذیب می‌کنی؟ تو (در بحث‌های قبلی)مفاهیم را منقبض میکردی، ولی الان داری آنها را نابود می‌کنی، طوری که به زحمت چیزی (از مفهوم چندوجهی)باقی میماند!

دلتا: چرا پوچ بودن این به اصطلاح ابطال‌های خود را نمیبینید؟ تا به امروز، هر چندوجهی جدید(یا هر مفهوم جدید دیگر) که ابداع میشد، به نحو خودش در جایی کاربرد داشت ؛ امروزه چندوجهی ها(و مفاهیم جدید دیگر) فقط به خاطر عیبجویی از استدلال‌های پدرانمان ابداع می‌شوند، و هیچ فایده دیگری ندارند. بحث ما تبدیل به موزه جنین(هیولا)های ناقص الخلقه شده که چندوجهی‌های نجیب، در صورت داشتن یک گوشه بسیار کوچک از این موزه نیز بایستی بسیار خوشحال باشند!

گاما: من فکر می‌کنم که اگر میخواهیم در باره موضوعی عمیق شویم و آنرا بهتر بشناسیم، بایستی آنرا مطالعه کنیم نه در حالت عادی بلکه در حالت بحرانی و غیر عادی. اگر میخواهید بدن عادی و سالم را بشناسید، آنرا هنگامی که غیر عادی و مریض است مطالعه کنید. اگر میخواهید توابع را بشناسید، نقاط تکین آنها را مطالعه کنید. اگر میخواهید چندوجهی‌های معمولی را مطالعه کنید، چندوجهی‌های تندرو و غیرعادی را مطالعه کنید. اینگونه است که شخص می‌تواند تحلیل ریاضی را تا عمیق ترین نقاط و قلب موضوع پیش ببرد. حتی اگر در مورد هیولاها حق با تو باشد، آیا پوچ بودن روش "موقتی[۱۷]" خود را نمیبینی؟ اگر میخواهی بین "هیولاها" و "مثال‌های نقض" یک حد تعیین کنی، نمی‌توانی این حد را دائماً(هنگام یافت مثال نقض) تغییر دهی.

معلم: فکر می‌کنم که ما نباید استراتژی دلتا را در راستای مقابله با مثال نقض‌های کلی قبول کنیم، گرچه بایستی برای اجرای دقیق و عالی آن به او تبریک بگوییم. می‌توانیم به شایستگی اسم روش او را "روش تحریم هیولاها" بگذاریم. با استفاده از این روش، شخص می‌تواند هر مثال نقض برای حدس اصلی را با یک تعریف دوباره از چندوجهی، اجزای سازنده چندوجهی، یا اجرای سازنده اجزای سازنده چندوجهی، حذف کند، گاهی زیرکانه ولی همیشه "فی البداهه". ما بایستی به مثال‌های نقض احترام بیشتری بگذاریم، نه اینکه سرسختانه آنها را اخراج و تحریم کنیم و آنها را هیولا بنامیم. شاید بزرگترین اشتباه دلتا، تبعیض متعصبانه اش در تعبیر اثبات ریاضی باشد: او فکر

[۱۶] jacket
[۱۷] ad hoc

می‌کند که یک اثبات، لزوماً آن چیزی را که برای ثابت شدنش تنظیم شده، ثابت می‌کند(و نه چیز دیگری را). تفسیر من از اثبات، اجازه میدهد که یک حدس اشتباه "ثابت" شود، یعنی به زیرحدس هایی تجزیه شود. اگر حدس اشتباه باشد، آنگاه من قطعاً توقع دارم که یکی از زیرحدس‌ها اشتباه باشد. ولی همین تجزیه ممکن است همچنان جالب باشد! من ناراحت نمی‌شوم اگر مثال نقضی برای یک حدس "ثابت" شده پیدا شود ؛ من حتی علاقه مندم که یک حدس اشتباه را "ثابت" کنم!

تتا: من دیگه نیستم.

کاپا: او از کتاب مقدس پیروی می‌کند: "همه چیز را بررسی کنید، خوبها را نگه دارید."

۳.۴ بهبود حدس با استفاده از روش‌های تحریم استثناءها[۱۸]: تحریم جزء به جزء[۱۹] در مقابل عقب نشینی استراتژیک[۲۰] و نمایش مطمئن[۲۱]

بتا: استاد، فکر می‌کنم که شما میخواهید از آن سخنرانی‌های عجیبتان برای ما انجام دهید. با عرز پوزش به خاطر کم صبری، یک چیزی در سینه ام مانده است و بایستی آنرا بیرون بریزم.

معلم: ادامه بده. [آلفا دوباره وارد کلاس می‌شود.]

بتا: من بعضی از صحبت‌ها و استدلال‌های دلتا را احمقانه تشخیص میدهم، ولی به این باور رسیده ام که همه آنها از یک جای معقول و مستدل سرچشمه میگیرند. به نظر من، حدس ما درست است، ولی فقط در یک محدوده خاص، که استثناءها در آن نیستند. من با این کار که این استثناءها را "هیولا" یا "موجودات ناقص الخلقه" بنامیم مخالفم. این کار به این تصمیم اسلوب شناسانه(بد) منجر می‌شود که آنها را به نوبه خودشان مثال هایی جالب و شایسته بررسی تلقی نکنیم. ولی من با واژه "مثال نقض" هم مخالفم ؛ این اسم به درستی آنها را با مثال‌های تأیید کننده قضیه هم ارزش میخواند، ولی به یک نوعی بوی جنگ و دشمنی میدهد، به طوری که بعضی ها، مثل گاما، هنگام مواجهه با آنها وحشت می‌کنند و به این فکر میفتند که اثبات هایی زیبا و مبتکرانه را تماماً رها کنند. نه: آنها فقط "استثناء" هستند.

سیگما: حرف دل من را زدی. واژه "مثال نقض" نوعی تأثیر پرخاشگرانه دارد و به آنهایی که اثبات را ابداع کرده اند بی احترامی می‌کند. "استثناء" واژهٔ درست است. (به نظر من)به طور کلی سه نوع قضیه ریاضی وجود دارد :
۱. قضیه هایی که همواره درست هستند و هیچ محدودیت و استثنائی ندارند ؛ به طور مثال، مجموع زوایای داخلی هر مثلث مسطح دو برابر اندازه زاویه قائمه است.
۲. قضیه هایی که بر پایه یک یا چند اصل غلط بنا شده اند و هیچ جوره نمی‌توان آنها را قبول کرد.
۳. قضیه هایی که با اینکه بر اصول درست بنا شده اند، ولی با این حال محدودیت هایی و استثناءهایی در بعضی حالات دارند...

[۱۸] exception-barring methods
[۱۹] piecemeal exclusions
[۲۰] strategic withdrawal
[۲۱] playing for safety

اپسیلون: چی؟؟

سیگما: شخص نباید قضیه‌های غلط را با قضیه هایی که چند استثناء دارند، اشتباه بگیرد. همانطور که مَثَل میگوید: "استثناء، قاعده را ثابت می‌کند.[۲۲]"

اپسیلون (به کاپا): این کودن کیه؟ اون باید بره یکم منطق یاد بگیره.

کاپا (به اپسیلون): و یکم چندوجهی‌های غیر اویلری (یاد بگیره).

دلتا: باعث شرمساری است، ولی بایستی اعتراق کنم که در این مورد خاص، من و آلفا در یک جبهه هستیم. ما در مورد اینکه یک قضیه یا درست و یا غلط است تفاهم داشتیم و فقط در مورد قضیه اویلر با هم اختلاف داشتیم که درست است یا غلط. ولی سیگما از ما میخواهد که به وجود قضیه هایی "اصولاً" درست ولی شامل بعضی "استثناءها" اعتراف کنیم. قبول وجود مسالمت آمیز قضیه‌ها و استثناءها در کنار هم، همان رسیدن به هرج و مرج و بی نظمی در ریاضیات است.

آلفا: موافقم.

اتا: نمیخواستم که صحبت‌ها و استدلال‌های زیبای دلتا را قطع کنم، ولی فکر می‌کنم که مختصر توضیحی راجع به چگونگی پیشرفت ذهنی ام در طول زندگی، مفید باشد. در دوران مدرسه من یک — همانطور که شما اسمش را گذاشته اید — "هیولا تحریم کُن"[۲۳] بودم، نه برای دفاع در مقابل افرادی مثل آلفا، بلکه برای دفاع در مقابل افرادی مثل سیگما. یادم هست که زمانی در یک مجله داشتم در مورد قضیه اویلر میخواندم: "ریاضیدان‌های خبره اثبات هایی برای درستی قضیه در حالت کلی ارائه کرده اند. با این حال استثناءهایی وجود دارد... لازم است که به این استثناءها توجه(بیشتری) شود، چرا که حتی در بین مؤلف‌های جدید هم کمتر کسی آنها را عمیقاً میشناسد." با اینکه در کتاب‌ها و سخنرانی‌های هندسه همواره گفته می‌شود که قضیه زیبای اویلر $v-e+f=2$ "محدودیت هایی دارد"، یا اینکه "به نظر نمیرسد صحیح باشد"، با این حال شخص هیچ گاه دلیل اصلی (وجود)این استثناءها را نمیفهمد. من این "استثناءها" را خیلی دقیق مطالعه کردم و ملاحظه کردم که آنها با تعاریف اصلی مفاهیم موجود در مسئله همخوانی ندارند. پس اثبات و قضیه دوباره برقرار می‌شوند و وجود همزمان و هرج و مرج گونه قضایا و استثناءها از میان میرود.

آلفا: می‌توانی بگویی که به خاطر شخصیت هرج و مرج طلب سیگما، این کار(تحریم هیولا) را کردی، ولی این نه تنها توجیه کافی نیست، بلکه حتی بهانه خوبی هم نیست. چرا با پذیرفتن اعتبار مثال نقض‌ها و رد کردن قضیه و اثبات هرج و مرج را برطرف نمی‌کنی؟

اتا: چرا باید اثبات را رد کنم؟ من هیچ چیز اشتباهی در آن نمیبینم. تو میبینی؟ تحریم هیولا(من) به نظرم منطقی تر از تحریم اثبات(تو) می آید.

معلم: این بحث نشان داد که تحریم هیولا، همراهان بیشتری را جذب خواهد کرد، اگر از دیدگاه اتا به آن نگاه

[۲۲] The exception proves the rule.

[۲۳] monster-barrer

شود. ولی بیایید به بتا و سیگما برگردیم. بتا مثال‌های نقض را استثناء نامید. سیگما با او موافق بود و...

بتا: خوشحالم که سیگما با من موافق بود، ولی من با نظر سیگما موافق نیستم. یقیناً ۳نوع قضیه وجود دارد: صحیح، نومیدانه غلط و امیدوارانه غلط. این نوع آخر قضیه‌ها را می‌توان با افزودن یک شرط محدود کننده که استثناءها را ذکر می‌کند، به قضیه‌های صحیح تبدیل کرد. من هیچگاه به فرمول‌ها یک محدوده درستی نامشخص نسبت نمیدهم. در حقیقت، اکثر فرمول‌ها صحیح هستند، اگر بعضی شرایط برقرار باشند. با یافتن این شرایط و البته مشخص کردن دقیق معانی واژه هایی که استفاده می‌کنم، تمامی شک و بلاتکلیفی را از بین میبرم. پس همانطور که میبینید، من هرگز از وجود مسالمت آمیز فرمول‌های بهبود نیافته(نوع آخر) و استثناءها حمایت نمی‌کنم. من فرمول هایم را بهبود میبخشم و آنها را به فرمول‌های بی نقص، همانند فرمول‌های نوع اول سیگما تبدیل می‌کنم. در واقع من روش تحریم هیولاها را قبول دارم، تا جایی که به من محدوده درستی حدس اصلی را نشان بدهد ؛ و من آنرا رد می‌کنم، در جایی که از آن به عنوان یک روش زبانی برای نجات قضیه‌های "دلپسند" استفاده شود. این دو قابلیت روش دلتا بایستی از هم جدا نگه داشته شوند. من اسم روشم را، که مشخصه اش اولین قابلیت روش قبلی است، روش "تحریم استثناءها" میگذارم. من از این روش استفاده می‌کنم تا دقیقاً محدوده ای که در آن قضیه اویلر برقرار است را پیدا کنم.

معلم: این "محدوده دقیق" که قولش را داده بودی چیست؟ "فرمول دقیق" تو چیست؟

بتا: برای تمامی چندوجهی هایی که حفره[۲۴] (همانند مکعب‌های در هم) یا تونل[۲۵] (همانند قاب عکس) نداشته‌باشند، $v-e+f=۲$ است.

معلم: مطمئنی؟

بتا: بله، مطمئنم.

معلم: در مورد چهاروجهی‌های دوقلو چه میگویی؟

بتا: ببخشید. برای تمامی چندوجهی هایی که حفره یا تونل یا ساختمان چندگانه نداشته‌باشند، $v-e+f=۲$ است.

معلم: میفهمم. من با خط مشی تو در رابطه با بهبود حدس، به جای قبول یا رد آن، موافقم. من آن را هم به روش تسلیم و هم به روش تحریم هیولاها ترجیح میدهم. با این حال، من دو ایراد در آن میبینم. اول اینکه ادعای تو مبنی بر اینکه روشت نه تنها حدس‌ها را بهبود میبخشد، بلکه آنها را بی نقص می‌کند، غیر قابل دفاع است.

بتا: صحیح؟

معلم: بایستی اعتراف کنی که هر نسخه جدید از حدس تو، حذف فی البداهه یک سری مثال نقض است که به تازگی یافت شده اند. هنگامی که در مقابل مکعب‌های درون هم به مشکل بر میخوری، چندوجهی‌های حفره دار را حذف می‌کنی. وقتی که قاب عکس را مشاهده می‌کنی، چندوجهی‌های تونل دار را حذف می‌کنی. من ذهن باز و هوشیار تو را تحسین می‌کنم؛ مشاهده این استثناءها (و نتیجه گرفتن از آنها)بسیار خوب است، ولی فکر می‌کنم که

[۲۴] cavity
[۲۵] tunnel

ارزشش را داشته‌باشد که کمی اسلوب در روشت — که در آن کورمالانه به دنبال استثناءها میگردی — تزریق کنی. این خوب است که اعتراف می‌کنی گزاره "تمامی چندوجهی‌ها اویلری اند" فقط یک حدس است. ولی چرا به گزاره "تمامی چندوجهی‌های بدون حفره و تونل اویلری اند" شأن یک قضیه را میدهی(که دیگر حدس نیست)؟ چگونه می‌توانی مطمئن باشی که تمامی استثناءها را پیدا کرده ای؟

بتا: آیا می‌توانید یکی را که من در نظر نگرفتم بگویید؟

آلفا: جوجه تیغی من؟

گاما: و استوانه من؟

معلم: من حتی به یک استثناء خاص برای نشان دادن (درستی)استدلالم نیاز ندارم. استدلال من در مورد "احتمال" وجود چنین استثناءهایی بود.

بتا: ممکن است حق با شما باشد. نمی‌توان دائماً موضع خود را (به هنگام ظهور یک مثال نقض جدید)عوض کرد. نمی‌توان گفت که: اگر هیچ استثنائی رخ نداد، قضیه را کلاً درست مینامیم. ولی اگر بعداً در هر زمانی استثنائی رخ داد، آنگاه برای آن استثناء هم قائل شویم. بگذارید ببینم. ابتدا حدس زدیم که برای همه چندوجهی‌ها $v-e+f=۲$ است، چونکه آنرا برای مکعب، هشت وجهی، هرم و منشور درست یافتیم.قطعاً این روش خام نتیجه گیری کل از جزء قابل قبول نیست. جای تعجب نیست که استثناءها ظاهر شدند ؛ بلکه حیرت آور است که چرا خیلی بیشتر از این‌ها قبل تر یافت نشد. به نظر من این به این خاطر بود که ما بیشتر سرگرم چندوجهی‌های محدب بودیم. به محض اینکه چندوجهی‌های دیگر پدیدار شدند، تعمیم هایمان دیگر صحیح نبودند. پس به جای اینکه استثناءها را جزء به جزء تحریم کنم، یک خط مرز معتدل ولی مطمئن میکشم: "تمامی چندوجهی‌های محدب، اویلری هستند." امیدوارم که قبول داشته‌باشید که این دیگر هیچ چیز حدس گونه ای ندارد و یک قضیه است.

گاما: استوانه من چه؟ این محدب است!

بتا: حرفت خنده دار است!

معلم: بیایید فعلاً استوانه را فراموش کنیم. می‌توانیم بدون آن هم مقداری ایراد وارد کنیم. در این نسخه جدید و بهبود یافته روش تحریم استثناءها که بتا آنرا خیلی چابک در جواب به عیب جویی من ابداع کرد، عقب نشینی جزء به جزء جایش را به یک عقب نشینی استراتژیک به مکانی داده است که امید است یک دژ محکم برای حدس باشد. تو داری یک نمایش مطمئن پیاده می‌کنی. ولی آیا واقعاً آنقدر که ادعا می‌کنی (به درستی حرفت)مطمئن هستی؟ تو همچنان هیچ تضمینی نداری که دیگر هیچ استثنائی در محدوده ات نخواهد بود. از آن طرف، ممکن است که خیلی افراطی عقب نشینی کرده باشی و تعداد زیادی چندوجهی اویلری را پشت دیوارها جا گذاشته باشی. حدس اولیه ما یک اغراق بود، ولی قضیه "تکمیل شده" تو از نظر من خیلی شبیه دست کم گرفتن است، با این حال نمی‌توانی مطمئن باشی که اغراق هم نیست.

ولی من میخواهم که ایراد دومم را هم وارد کنم: استدلال تو به اثبات مراجعه نمی‌کند ؛ در هنگام حدس زدن محدوده درستی حدس، ظاهراً هیچ نیازی به اثبات نداشتی. مطمئنّاً فکر نمی‌کنی که اثبات‌ها زائد و اضافی هستند.

این طور فکر می‌کنی؟

بتا: من هرگز چنین حرفی نزدم.

معلم: نه نزدی. ولی تو ملاحظه کردی که اثبات ما، حدس اصلی را ثابت نمی‌کند. حال آیا حدس بهبود یافته تو را ثابت می‌کند؟

بتا: خب...

اتا: استاد، بابت این سخنرانی از شما ممنونم. شرمساری بتا، به وضوح برتری روش بدنام شده تحریم هیولاها را نشان میدهد. به خاطر اینکه ما بر این باوریم که اثبات، آن چیزی را ثابت می‌کند که قرار است ثابت کند و جوابمان صریح و بدون ابهام است. ما اجازه نمیدهیم که مثال نقض‌های نافرمان، اثبات‌های قابل احترام را آزادانه ویران کنند، حتی اگر در لباس مبدل یک استثناء "نجیب" باشند.

بتا: من اصلاً شرمسار نمی‌شوم اگر مجبور باشم که اسلوبم را در مواجهه با عیب جویی به زحمت درست کنم، بهبود ببخشم و — ببخشید استاد — بی نقص کنم. حرف من این است. من حدس اصلی را رد می‌کنم، چرا که استثناءهایی برایش وجود دارد. همچنین اثبات را هم رد می‌کنم، چرا که همان استثناءها، برای حداقل یکی از لم‌ها هم استثناء هستند. (در اصطلاحات شما اینطوری ترجمه می‌شود: یک مثال نقض کلی حتما یک مثال نقض موضعی نیز هست.) آلفا در این مرحله متوقف می‌شود، چرا که رد حدس نیازهای ذهنی او را به طور کامل ارضاء می‌کند. ولی من ادامه میدهم. با ایجاد یک محدوده مناسب برای حدس و اثبات، من حدس را بی نقص میسازم، که حالا دیگر صحیح می‌شود، و اثبات اساساً معتبر را بی نقص میسازم، که دیگر "محکم" می‌شود و به وضوح دیگر هیچ لم غلطی نخواهد داشت. به عنوان مثال، مشاهده کردیم که هر چندوجهی بعد از حذف یک وجه قابل نشاندن روی صفحه نیست. ولی برای هر چندوجهی محدب چنین کاری را می‌توان انجام داد. من می‌توانم به درستی حدس بی نقص شده و محکم اثبات شده ام را یک "قضیه" بنامم. دوباره میگویم: "تمامی چندوجهی‌های محدب اویلری هستند." برای چندوجهی‌های محدب، تمامی لم‌ها به وضوح درست هستند و اثبات، که قبلاً در دامنه اشتباه خود محکم نبود، در دامنه محدود شده برای چندوجهی‌های محدب محکم خواهد بود.پس استاد، من سؤال شما را جواب دادم.

معلم: پس لم ها، که زمانی قبل از پیدایش استثناءها درست به نظر میرسیدند، دوباره به وضوح درست به نظر میرسند... تا اینکه یک استثناء دیگر پیدا شود. اعتراف می‌کنی که "تمام چندوجهی‌ها اویلری اند" حدس (خالی)بود ؛ همین الان هم اعتراف کردی که "تمام چندوجهی‌های بدون حفره و تونل اویلری اند" هم حدس بود ؛ چرا اعتراف نمی‌کنی که "تمام چندوجهی‌های محدب اویلری هستند" هم حدس است؟!

بتا: این دفعه "حدس" نیست، بلکه "بصیرت" است!

معلم: من از "بصیرت" گستاخانه ات متنفرم. من به حدس زدن هوشیارانه احترام میگذارم، به خاطر اینکه از بهترین طبیعت‌های آدمی سرچشمه میگیرد: شجاعت و فروتنی.

بتا: من یک قضیه ارائه کردم: "تمام چندوجهی‌های محدب اویلری اند." شما فقط پند و موعظه دادید. آیا می‌توانید یک مثال نقض ارائه دهید؟

معلم: نمی‌توانی مطمئن باشی که این کار را نخواهم کرد. تو حدس اصلی را بهبود بخشیدی، ولی نمی‌توانی ادعا کنی که آنرا بی نقص کردی — که به استحکام کامل در اثبات خود رسیدی.

بتا: شما می‌توانید؟

من نیز نمی‌توانم. ولی من فکر می‌کنم که روش من برای بهبود حدس‌ها از روش تو بهتر باشد، چرا که من یک پیوستگی و فعل و انفعال واقعی بین اثبات‌ها و مثال نقض‌ها برقرار می‌کنم.

بتا: آماده یادگیری هستم.

۴.۴ روش تعدیل هیولاها[۲۶]

رو: می‌شود من هم در بحث شرکت کنم؟

معلم: یقیناً.

رو: قبول دارم که بایستی روش "تحریم هیولاها" دلتا را، به عنوان یک اسلوب کلی، رد کنیم، چرا که اصلاً "هیولا"ها را جدی نمیگیرد. بتا نیز "استثناء"ها را جدی نمیگیرد، چرا که او صرفاً آنها را لیست می‌کند و سپس به یک جای امن عقب نشینی می‌کند. لذا هر دوی این روشها، تنها به یک سری از اشیاء ویژه و محدود علاقه دارند. روش من بین اشیاء تبعیض قائل ن‌می‌شود. می‌توانم نشان دهم که با نگاه دقیقتر و بررسی بیشتر، استثناءها دیگر استثناء نخواهند بود و قضیه اویلر برای آنها برقرار خواهد بود.

معلم: جدی؟

آلفا: چطور ممکن است که مثال نقض ۳ من، جوجه تیغی(شکل ۵)، یک چندوجهی اویلری باشد؟ در حالیکه ۱۲ وجه به شکل ستاره ۵رأسی دارد...

رو: من هیچ "ستاره ۵رأسی" نمیبینم. آیا متوجه نیستید که این چندوجهی در واقع وجه هایش مثلث هستند؟ ۶۰ وجه مثلثی داریم، همچنین ۹۰ یال و ۳۲ رأس که لذا "مشخصه اویلر" برای آن ۲ می‌شود. ۱۲ ستاره ۵رأسی، ۳۰ یال و ۱۲ رأس یک خیال بود. هیولاها وجود ندارند، این ما هستیم که تعبیرهای وحشتناک انجام میدهیم.شخص بایستی ذهن خود را از توهمات منحرف کننده پاک کند، بایستی یاد بگیرد که چگونه درست ببیند و آنچه را که میبیند درست تعریف کند. روش من "درمانی" است: هرگاه — به اشتباه — یک مثال نقض دیدید، به شما یاد میدهم که چگونه آنرا به صورت یک مثال تأیید کننده ببینید. من خیالات وحشتناک شما را تعدیل می‌کنم...

آلفا: استاد! خواهشاً هر چه زودتر روش خود را ارائه دهید، قبل از اینکه رو، ما را شستشوی مغزی بدهد!

معلم: بگذارید ادامه دهد.

[۲۶] the method of monster-adjustment

رو: منظورم را رساندم.

گاما: می‌توانی راجع به اشکالات روش دلتا بیشتر توضیح بدهی؟ هر دوی شما هیولاها را اخراج کردید...

رو: دلتا گول توهمات شما را خورد. او قبول کرد که جوجه تیغی تو، ۱۲ وجه، ۳۰ یال و ۱۲ رأس دارد و غیر اویلری است. ولی چنین تعبیری(وجوه ستاره گون) از جوجه تیغی اشتباه است. این نقش جوجه تیغی بر روی یک ذهن سالم و خالص نیست، بلکه نقش منحرف شده آن بر روی یک ذهن مریض و رنجور است.

کاپا: اما چگونه می‌توانی ذهن‌های سالم را از ذهن‌های ناسالم و تعابیر منطقی را از تعابیر وحشتناک تشخیص بدهی؟

رو: چگونه ممکن است که آنها را غاطی کنی؟

سیگما: ببین رو، آیا واقعاً فکر می‌کنی که آلفا هیچ گاه جوجه تیغی خود را به شکل یک چندوجهی با وجوه مثلثی ندیده است؟ البته که ممکن است دیده باشد. ولی یک بررسی دقیقتر(از جوجه تیغی) نشان میدهد که این وجوه مثلثی، ۵ تا ۵ تا در یک صفحه مشترک هستند و یک پنج ضلعی منتظم را — همانند قلب — درمیان خود و در وسط جسم مخفی دارند. این ۵ مثلث، به همراه پنج ضلعی منتظم وسطشان، ستاره ۵رأسی معروف را میسازند، که بنا به گفته پاراسلسوس[۲۷]، نشانه سلامت است...

رو: خرافات!

سیگما: لذا راز جوجه تیغی برای ذهن سالم آشکار می‌شود: (جوجه تیغی)یک جسم منظم است که تابحال زیاد بدان فکر نشده‌است. (فکر کردن به)تقارن‌های زیبای آن ممکن است رازهای توازن طبیعت را برایمان آشکار سازد...

آلفا: از دفاعت ممنونم سیگما. باز دوباره متقاعد شدم که دشمنان کمتر از دوستان آدم را شرمنده می‌کنند. البته وجوه چندوجهی من می‌تواند مثلث یا ستاره ۵رأسی تعبیر شود. میخواهم که هر دو تعبیر را بطور مساوی بپذیرم...

کاپا: واقعاً؟

دلتا: ولی مطمئناً (فقط)یکی از آنها تعبیرِ درست است!

آلفا: میخواهم هر دو تعبیر را بطور مساوی بپذیرم، ولی یکی از آنها مسلماً یک مثال نقض کلی برای حدس اویلر است. چرا فقط تعبیری که با عقاید رو سازگار است را بپذیریم؟ بهرحال. استاد می‌شود خواهش کنم که حالا روش خود را توضیح دهید؟

[۲۷] Paracelsus

۵.۴ بهبود حدس با روش تلفیق لم[۲۸]. حدس برخاسته از اثبات در مقابل حدس ساده

معلم: بیایید به (مثال نقض) قاب عکس برگردیم. من به شخصه آنرا یک مثال نقض کلی درست برای حدس اویلر میدانم، و البته یک مثال نقض موضعی درست برای لم اول اثباتم.

گاما: ببخشید استاد، ولی قاب عکس چگونه لم اول را نقض می‌کند؟

معلم: یک وجه را بردارید و سعی کنید که آنرا روی صفحه بنشانید. موفق نخواهید شد.

آلفا: بگذارید کمی کمکتان کنم. فقط آن چندوجهی هایی که قابل نشاندن روی سطح کره هستند، بعد از حذف یک وجه قابل نشاندن روی صفحه میباشند(و برعکس).

واضح است که اگر یک چندوجهی روی کره نشانده شده باشد، حذف یک وجه از آن باعث نشانده شدن آن روی صفحه می‌شود؛ و برعکس، هر چند وجهی با یک وجه حذف شده نشانده شده روی صفحه را می‌توان مچاله کرد و روی کره منهای قطب شمال آن نشاند و وجه حذف شده را روی قطب نشاند. ولی قاب عکس هیچگاه قابل نشاندن روی کره نیست؛ آنرا فقط روی چنبره[۲۹] می‌توان نشاند.

معلم: بسیار خوب. حالا، برعکس دلتا، من این قاب عکس را بعنوان عیب برای حدس قبول می‌کنم. لذا من حدس اولیه را غلط اعلام می‌کنم، ولی فوراً یک نسخه محدود و اصلاح شده از آن را ارائه میدهم: حدس دکارت-اویلر برای چندوجهی‌های "ساده" برقرار است. یک چند وجهی "ساده" است، اگر بعد از حذف یک وجه، بتوان آنرا روی صفحه نشاند. لذا مقداری از حدس اولیه را حفظ کرده ایم. داریم: "مشخصه اویلر"برای چندوجهی‌های "ساده" برابر ۲ است.این فرضیه نه با مکعب‌های درهم، نه با چهاروجهی‌های دوقلو و نه با جوجه تیغی، با هیچکدام نقض نمی‌شود، چرا که هیچکدام از آنها "ساده" نیستند.
لذا در حالیکه روش تحریم استثناءها، دامنه حدس اصلی و لم رد شده را به یک دامنه مشترک و مطمئن محدود می‌کند، و لذا مثال نقض را هم برای حدس و هم برای لم عیب می‌داند، روش تلفیق لم من از اثبات حمایت می‌کند ولی دامنه حدس اصلی را به دامنه لم رد شده محدود می‌کند. در واقع، هنگام مواجهه با یک مثال نقض که هم کلی و هم موضعی است،شخصی که از روش تحریم استثناءها استفاده می‌کند، بایستی هم لم‌ها و هم حدس اصلی را اصلاح کند، در صورتیکه من(کسیکه از روش تلفیق لم استفاده می‌کند) فقط حدس اصلی را اصلاح می‌کنم و لم‌ها ثابت میمانند. متوجه هستید؟

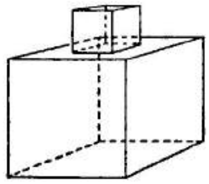
آلفا: بله، فکر می‌کنم. برای اینکه نشان دهم که فهمیده ام، حدس شما را رد می‌کنم.

معلم: روشم را یا حدس بهبود یافته ام را؟

آلفا: حدس بهبود یافته را.

معلم: پس احتمالاً هنوز روش من را درک نکرده ای. ولی مثال نقض ات را بیاور ببینیم.

[۲۸] the method of lemma-incorporation
[۲۹] Torus

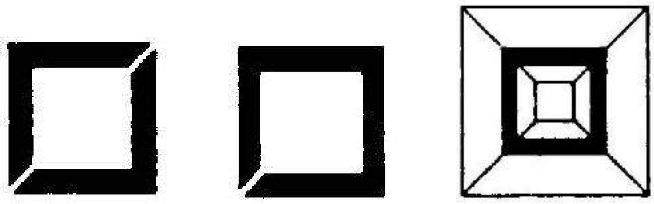


شکل ۱۲

آلفا: یک مکعب را در نظر بگیرید که یک مکعب کوچکتر روی آن نشسته است(شکل ۱۲). این چندوجهی با تمامی تعاریف ما — تعریف ۱، ۲، ۳، ۴، ′۴ و ۵ — سازگار است و لذا یک چندوجهی واقعی است. و ساده است، چرا که می‌توان با حذف یک وجه آنرا روی صفحه نشاند. پس بنا بر حدس بهبود یافته شما، بایستی مشخصه اویلرش برابر ۲ باشد. با اینحال ۱۶ رأس، ۲۴ یال و ۱۱ وجه دارد و مشخصه اویلرش برابر ۳ میباشد. این یک مثال نقض کلی برای حدس بهبود یافته شما، و همچنین برای اولین حدس بتا با استفاده از روش تحریم استثناءها است. این چندوجهی، با وجود اینکه هیچ حفره یا تونلی ندارد و ساختمان چندگانه هم ندارد، باز هم اویلری نیست.

دلتا: بیایید این مکعب کاکُل دار[۳۰] را مثال نقض ۶ بنامیم.

معلم: تو حدس بهبود یافته من رو ابطال کردی، ولی روش بهبود من را نابود نکردی. بایستی دوباره اثبات را بررسی کنم، و ببینم که چرا در مورد چندوجهی تو غلط از آب در آمد. حتماً یک لم دیگر غلط است.



(ج) (ب) (آ)

شکل ۱۳

بتا: البته که اینطور است. من همیشه به لم دوم شک داشته ام. این لم فرض می‌کند که در هنگام مثلث بندی نقشه، با کشیدن یک قطر، همواره تعداد یالها و ناحیه‌ها یکی اضافه می‌شود. ولی این درست نیست. اگر شبکه مسطح مکعب کاکل دار را بکشیم، یک ناحیه حلقه-مانند[۳۱] مشاهده می‌کنیم(شکل ۱۳ (آ)). در این ناحیه، کشیدن هیچ قطری باعث اضافه شدن ناحیه‌ها نمی‌شود(شکل ۱۳ (ب)). بایستی حتماً ۲ قطر رسم کنیم تا ناحیه‌ها یکی اضافه شود(شکل ۱۳ (ج)).

[۳۰] crested cube
[۳۱] ring-shaped

معلم: آفرین. حالا من باید حدسم را محدودتر کنم...

بتا: میدانم که میخواهید چکار کنید. میخواهید بگویید که "چندوجهی‌های ساده با وجوه مثلثی اویلری اند". میخواهید از شر مثلث بندی خلاص شوید؛ و شما این لم را (مثل لم قبل)به یک شرط تبدیل می‌کنید.

معلم: خیر، اشتباه می‌کنی. قبل از اینکه اشتباهت را بگویم، میخواهم کمی راجع به روشت(تحریم استثناءها) حرف بزنم. وقتی دامنه حدست را به یک حوزه "امن" محدود می‌کنی، هیچ بررسی درستی از اثبات انجام نمیدهی. در واقع، روش تو اصلا نیازی به این کار ندارد. این جمله غیر حرفه ای که "در ناحیه محدود من، لمها همگی درست هستند، هرچه که میخواهند باشند"، تو را راضی می‌کند، ولی مرا نه. من لمی که توسط مثال نقض رد شده بود را به درون حدس میاورم، لذا اثبات را به دقت بررسی می‌کنم و یک نسخه تصحیح شده از لم را ارائه میدهم. لمهای رد شده لذا در حدس بهبود یافته من ظاهر می‌شوند. روش تو، تو را مجبور نمی‌کند که به زحمت بیفتی و اثبات را به دقت بررسی کنی، چرا که اثبات اصلاً در حدس بهبود یافته تو ظاهر نمی‌شود، آن طور که در حدس من ظاهر می‌شود. حال به پیشنهاد فعلی ات برمیگردم. لمی که بوسیله ناحیه حلقه-مانند نقض شد، این نبود که "همه وجوه مثلث هستند"، بلکه این بود که "هر ناحیه با کشیدن هر قطری به دو ناحیه تقسیم می‌شود". من این لم را به شرط تبدیل می‌کنم. بیایید هر ناحیه که این شرط را دارد(با اضافه کردن هر قطر، به دو ناحیه تقسیم می‌شود) را "واقعاً همبند"[۳۲] بنامیم. در این صورت، بهبود دوم من به این صورت خواهد بود: برای یک چندوجهی ساده، که تمام وجوهش "واقعاً همبند" هستند، $v-e+f=2$. علت اشتباه عجولانه ات درباره من، روشت است. روش تو به تو نمی آموزد که اثبات را به دقت تحلیل کنی. تحلیل اثبات، بعضی اوقات ساده و بعضی اوقات واقعاً دشوار است.

بتا: درک می‌کنم. بایستی یک نکته به حرفهای شما اضافه کنم. فکر می‌کنم که یک طیف کامل از گرایش‌های "استثناء تحریم کننده[۳۳]" بر من آشکار شده‌است. بدترین آنها، فقط استثناءها را تحریم می‌کند، بدون اینکه به اثبات توجهی کند. اینها به هنگام مواجهه همزمان با اثبات و مثال نقض، نمیدانند که چکار کنند. برای این استثناء تحریم کننده ها، اثبات و مثالهای نقض کاملاً مجزا از هم و بی ارتباط هستند. ممکن است بعضی از آنها ادعا کنند که اثبات تنها در دامنه محدود شده کار می‌کند، و لذا هیچ تناقضی وجود ندارد؛ اما شروطی که مطرح کرده اند(و دامنه را محدود کرده است)، همچنان به اثبات بی ارتباط است.
دسته دیگری هستند که از دسته اول بهتر هستند. آنها یک بررسی سریع از اثبات انجام میدهند و (همانند من)برای شروطی که قرار است برای ایجاد دامنه امن بگذارند، الهام میگیرند. بهترین دسته ولی آنهایی هستند که اثبات را به دقت بررسی و تحلیل می‌کنند، و بر مبنای آن، یک توصیف دقیق از دامنه‌های ممنوعه(آنهایی که دیگر نباید جزء دامنه باشند) میدهند. در واقع، روش شما، از این لحاظ یک نوع تحریم استثناء است...

آیوتا: ...و این رابطه منطقی و بنیادی بین اثباتها و ردها را نشان میدهد.

معلم: امیدوارم که الان دیگر همه شما بتوانید درک کنید که اثباتها، با اینکه ممکن است حدس را به درستی اثبات نکنند، ولی یقیناً به بهبود حدس کمک می‌کنند. استثناء تحریم کننده‌ها نیز آنرا بهبود میبخشند، ولی بهبود آنها مستقل از اثبات است و ممکن است هیچگاه به اثبات منتهی نشود. روش ما، بوسیله ثابت کردن بهبود میبخشد. این پیوستگی ذاتی منطق اکتشاف[۳۴] و منطق توجیه[۳۵]، مهمترین جلوه روش تلفیق لم است.

[۳۲] simply-connected
[۳۳] exception-barrer
[۳۴] logic of discovery
[۳۵] logic of justification

بتا: حالا حرفهای عجیب شما راجع به اثبات یک حدس غلط و همچنین بی تفاوتی در مواجهه همزمان با اثبات و رد را میفهمم.

کاپا (در کنار): ولی چرا اسمش را اثبات میگذارید، در حالیکه هر کاری می‌کند بجز اثبات؟

معلم: دقت کن که تعداد بسیار کمی از افراد چنین تمایلی دارند. بیشتر ریاضیدانان به خاطر تعصب‌ها و پیشداوری‌های خود، نمی‌توانند همزمان یک حدس را اثبات و رد کنند. آنها یک حدس را یا رد و یا ثابت می‌کنند. علاوه بر این، اگر حدس مربوطه متعلق به خودشان باشد، هرگز قادر نیستند که بوسیله رد کردن آن، آنرا بهبود ببخشند. آنها قصد دارند حدسهای خود را بدون رد کردن بهبود بخشند؛ هیچگاه از نادرستی آنها کم نکنند و فقط کم کم به درستی آنها اضافه کنند؛ و لذا علم را از ترس از مثال نقض خالی سازند. این زمینه کاری بهترین استثناء تحریم گرها است: آنها با یک "نمایش مطمئن" شروع می‌کنند و یک اثبات برای دامنه "امن" طراحی می‌کنند، و سپس یک بررسی جامع از حدس و اثبات خود انجام میدهند تا ببینند که آیا از همه شروطی که گذاشته اند استفاده کرده اند یا خیر. اگر نه، حدس اولیه خود را قویتر میسازند[۳۶] و با مشخص سازی لم‌ها و شرایطی که اثبات بر آنها استوار است(و حذف بقیه)، حدس خود را تعمیم میدهند[۳۷]. برای مثال، در مورد حدس ما، بعد از یک یا دو مثال نقض، آنها قضیه موقتی "تمامی چندوجهی‌های محدب اویلری اند" — که از روش تحریم استثناءها بدست آمده است — را ارائه میدهند، و بررسی حالت غیر محدب را به بعد موکول می‌کنند. سپس اثبات کوشی را به دقت بررسی می‌کنند و پس از اینکه متوجه می‌شوند از محدب بودن در اثبات استفاده نشده‌است، قضیه بدست آمده از تلفیق لم را ارائه میدهند! هیچ چیز معیوبی در این روش — که در ابتدا از "تحریم استثناء ابتدایی" و سپس بطور مکرر از "تحلیل اثبات" و "تلفیق لم" استفاده می‌کند — وجود ندارد.

بتا: البته که این روش عیوب را از بین نمیبرد، فقط راجع به آنها بحث نمی‌کند: بجای اینکه مستقیماً یک "حدس بیش از حد قوی"[۳۸] را نقد کند، یک "حدس بیش از حد ضعیف"[۳۹] را نقد می‌کند.

معلم: بتا! خوشحالم که توانسته ام متقاعدت کنم. رو و دلتا، شما چی فکر می‌کنید؟

رو: من به شخصه فکر می‌کنم که مسئله وجوه "حلقه-مانند" یک "شبه مسئله"[۴۰] است. این از آنجا ناشی می‌شود که شما از اجزای تشکیل دهنده این صفحه — که باعث لحیم شدن این دو مکعب شده‌است — تعبیر وحشتناکی کرده اید.

معلم: بشتر توضیح بده.

رو: این مکعب کاکل دار از دو مکعب لحیم شده به هم تشکیل شده، قبول؟

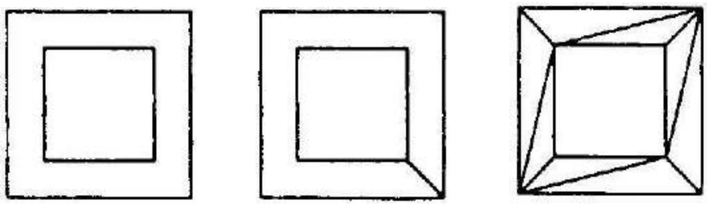
معلم: خب.

[۳۶] sharpen
[۳۷] generalise
[۳۸] over-statement
[۳۹] under-statement
[۴۰] pseudoproblem

رو: شما از "لحیم شدن"، تعبیر اشتباهی انجام داده اید. لحیم شدن، شامل یالهایی از رئوش مربع پایینی در مکعب بالایی به رئوس مربع بالایی مکعب پایینی است. لذا اصلاً ناحیه "حلقه-مانند"ی وجود ندارد!

بتا: وجه حلقه-مانند وجود دارد! این یالهایی که ازشان حرف میزنی هستند که وجود ندارند!

رو: آنها از چشمان آموزش ندیده تو مخفی هستند[۴۱].



(آ) جانکیرس (ب) ماتایسن (ج) چشمان آموزش ندیده

شکل ۱۴: سه نسخه از ناحیه حلقه-مانند(پاورقی را ببینید)

بتا: توقع داری که حرفهایت را جدی بگیریم؟ چیزی که ما میبینیم خرافات است ولی یالهای "مخفی" تو واقعی هستند؟

رو: به این بلور نمک نگاه کن. آیا یک مکعب است؟

بتا: یقیناً

رو: یک مکعب ۱۲ یال دارد، اینطور نیست؟

بتا: بله، همینطور است.

رو: ولی این مکعب اصلاً یال(قابل رویت) ندارد. آنها مخفی هستند و فقط در بازسازی منطقی تو از بلور ظاهر می‌شوند.

بتا: باید بهش فکر کنم. ولی یک چیز مسلم است. استاد به طرز فکر خود پسندانه من، مبنی بر اینکه روشم به یقین منتهی می‌شود، و البته فراموش کردن اثبات، ایراد گرفت. این ایراد دقیقاً به همان اندازه به روش تو وارد هستند.

معلم: دلتا، تو چی؟ چگونه میخواهی این ناحیه حلقه-مانند را اخراج کنی؟

[۴۱] جانکیرس(Jonquieres) معتقد بود که بایستی یک مثلث بندی کامل از ناحیه انجام شود(شکل ۱۴(آ))، در صورتی که ماتایسن(Matthiessen) تنها به اضافه کردن یک یال بسنده کرد(شکل ۱۴(ب)).

دلتا: نمی‌کنم. شما مرا به روش خود آوردید. تنها چیزی که برایم جای تعجب دارد، این است که چرا شما لم سوم را نیز وارد حدس نمی‌کنید تا از درستی آن مطمئن شوید؟ من یک نسخه چهارم ارائه میدهم که امیدوارم آخرین نسخه از حدس باشد: "تمامی چندوجهی هایی که (۱) ساده هستند، (۲) تمامی وجوهشان واقعاً همبند هستند و (۳) طوری هستند که مثلثهای ایجاد شده هنگام مثلث بندی شبکه شان، می‌توانند طوری شماره گذاری شوند که اگر به ترتیب آنها را حذف کنیم، مقدار v-e+f تا قبل از حذف آخرین مثلث تغییر نکند، اویلری هستند". نمیدانم چرا شما این را به یکباره ارائه ندادید؟ اگر شما روشتان را جدی میگرفتید، بایستی هر کدام از لمها را بلافاصله به شرط تبدیل میکردید. چرا اینطور پیشروی تکه تکه[۴۲]؟

آلفا: محافظه کار، انقلابی می‌شود! پیشنهادت به نظرم غیرعملی است. چرا که ما بیش از ۳ لم داریم. چرا شروطی از قبیل (۴)" ۲=۱+۱ باشد" و (۵) "تمامی مثلثها ۳ یال و ۳ رأس داشته‌باشند" را اضافه نکنیم؟ ما یقیناً از این ۲ لم(و خیلی لمهای دیگر) استفاده می‌کنیم. به نظرم بهتر است تنها لمهایی را به شرط تبدیل کنیم که برایشان مثال نقضی پیدا شده‌است.

گاما: این روش بیش از حد اتفاقی و مبتنی بر شانس است و نمی‌تواند یک اسلوب کلی باشد. بایستی لمهایی را به شرط تبدیل کنیم که احتمال میدهیم برایشان مثال نقض وجود داشته‌باشد، لمهایی که نمی‌توان گفت قطعاً و یقیناً درست هستند.

دلتا: خیلی خوب. آیا کسی فکر می‌کند که لم سوم بدیهی است؟ بیایید آنرا تبدیل به یک شرط سوم کنیم.

گاما: ولی اگر شرایطی که برای لمهایمان ذکر می‌کنیم همگی مستقل نبودند چه؟ شاید اینطور باشد که اگر بعضی کارها قابل انجام باشد، بعضی کارهای دیگر "لزوماً" قابل انجام باشد. من به شخصه فکر می‌کنم که اگر یک چندوجهی ساده باشد، آنگاه حتماً یک ترتیب از مثلثهای شبکه(مثلث بندی شده) وجود دارد، که هنگام حذف مثلثها همواره v-e+f ثابت بماند. اگر اینطور باشد، آوردن لم اول در حدس، ما را از آوردن لم سوم در شرط معاف می‌کند.

دلتا: ادعا می‌کنی که شرط اول شرط سوم را نتیجه میدهد. می‌توانی آنرا اثبات کنی؟

اپسیلون: من می‌توانم[۴۳].

آلفا: اثبات این موضوع ممکن است جالب باشد، ولی مسئله اصلی چیز دیگری است: تا کجا باید حدسمان را بهبود ببخشیم؟ ممکن است اثباتی که ارائه میدهی درست باشد، ولی این اثبات تنها لم سوم را به تعدادی زیرلِم[۴۴] جدید تقسیم می‌کند. آیا بایستی اینها را هم به شرط تبدیل کنیم؟ کجا باید متوقف شویم؟

کاپا: در اثباتها یک بازگشت نامتناهی وجود دارد؛ لذا اثباتها نمی‌توانند ثابت کنند.اثبات کردن یک بازی است، وقتی از آن لذت می‌بریم، آنرا بازی می‌کنیم و وقتی خسته می‌شویم، آنرا رها می‌کنیم.

اپسیلون: نخیر، این یک بازی نیست، بلکه یک موضوع کاملاً جدی است. فرایند بازگشت نامتناهی را می‌توان

---

[۴۲] piecemeal engineering

[۴۳] اثبات اولیه متعلق به ریچارد(H. Reichardt) است. برای دیدن اثبات به مقالات فان در واردن(B. L. Van der Waerden) مراجعه کنید.

[۴۴] sub-lemma

با رسیدن به لم‌های بدیهی، که نیازی به تبدیل شدن به شرط ندارند، متوقف کرد.

گاما: من هم دقیقاً منظورم همین بود. ما نه آن لمهایی که از اصول بدیهتاً درست نتیجه می‌شوند را تبدیل به شرط می‌کنیم و نه آنهایی را که به کمک لمهای قبلی (و احتمالاً با کمک لمهای بدیهی)قابل اثباتند.

آلفا: قبول دارم. لذا وقتی که دو لم غیر بدیهی(و زیرلمهایشان) را به شرط تبدیل کردیم، می‌توانیم عملیات را متوقف کنیم. در واقع، من فکر می‌کنم که این روش بهبود، یعنی تلفیق لم، بدون خطا است. به نظرم این روش نه تنها حدس را بهبود میبخشد، بلکه آنرا کامل[۴۵] می‌کند. و البته یک چیز مهم از آن(روش) یاد گرفتم: این غلط است که وقتی یک "مسئله برای اثبات[۴۶]" داریم، اظهار کنیم که هدف، نشان دادن درستی یا نادرستی یک ادعا به طور قطعی است. هدف واقعی یک "مسئله برای اثبات" بایستی بهبود حدس و در نهایت، کامل کردن آن به صورت یک قضیه(که از ابتدا مشخص نیست) باشد.
حدس اولیه ما این بود که "همه چندوجهیها اویلریند".
روش تحریم هیولاها، با تعبیری مجدد از اجزاء حدس، از حدس اولیه دفاع میکرد، طوریکه در نهایت ما یک قضیه نسخه تحریم هیولا داشتیم: "تمامی چندوجهیها اویلری اند". ولی تعریف و تعبیر اجزای این قضیه با حدس اولیه چنان بطور پیچیده و ظریف فرق داشتند که به زحمت میشد از قضیه بدست آمده استفاده کرد و آنرا یک پیشرفت دانست.
روش تحریم استثناءها، یک عنصر خارجی(نسبت به اثبات) را معرفی کرد: تحدب. قضیه نسخه تحریم استثناء این بود: "همه چندوجهیهای محدب اویلریند".
روش تلفیق لم تنها مبتنی بر اثبات بود. این روش تقریباً تمام اثبات را در قضیه نسخه تلفیق لم میاورد: "تمام چندوجهیها با وجوه واقعاً همبند، اویلریند".
این نشان میدهد که شخص (هنگام حل مسئله)آن چیزی را ثابت نمی‌کند که قرار بوده ثابت کند. لذا هیچ اثباتی نباید با عبارت "همانطور که می‌خواستیم[۴۷]" تمام شود.

بتا: بعضی‌ها اعتقاد دارند که قضیه‌ها قبل از اثباتها کشف می‌شوند: "ابتدا بایستی حدسی زده شود تا ثابت شود". بعضی دیگر این را قبول ندارند و ادعا می‌کنند که اکتشاف بعد از نتیجه گیری از دانسته‌های قبلی و دقت خاص به بعضی از آنها، اگر خوش شانس باشیم، بدست می آید. یکی از دوستانم این مثال را میزد که بعضی‌ها معتقدند که زیپ اکتشاف در یک ساختمان (منطق)قیاسی، از پایین — که نتیجه است — به بالا — که فرض اولیه است — بسته می‌شود. بعضی‌ها عکس این را میگویند. نظر شما چیست؟

آلفا: نظر من این است که مثال تو در مورد اکتشاف کار نمی‌کند. اکتشاف همواره در یک جهت حرکت نمی‌کند، بلکه به صورت زیگ زاگ حرکت می‌کند: ابتدا حدسی زده می‌شود، مثال‌های نقض می آیند، حدس اولیه پس گرفته می‌شود، فرض‌ها بررسی می‌شوند و در نهایت فرض اولیه با یک قضیه جایگزین می‌شود. حدس اولیه و مثال‌های نقض، در ساختمان قیاسی نهایی ظاهر نمی‌شوند: زیگ زاگ اکتشاف در قضیه نهایی دیده نمی‌شود(تنها یک قضیه درست دیده می‌شود).

معلم: بسیار عالی. ولی دقت کنید که قضیه نهایی لزوماً با فرض اولیه متفاوت نیست. ما لزوماً با اثبات یک مسئله(اثبات در معنای مورد نظر معلم) آنرا بهبود نمیبخشیم. وقتی بهبود میبخشیم که ایده اثبات، جلوه هایی پنهان

[۴۵] perfect
[۴۶] problem to prove
[۴۷] Quod erat demonstrandum (Q.E.D.)

از حدس اولیه را کشف می‌کند، که سپس این جلوه‌های جدید در قضیه نهایی ظاهر می‌شوند. البته در تئوری‌های تکامل یافته[۴۸]، معمولاً چنین اتفاقی نمیافتد، ولی در تئوری‌های جوان و در حال رشد زیاد اتفاق میافتد. این بهم پیچیده شدن اکتشاف و توجیه، این بهم گره خوردن اثبات و بهبود، معمولاً در دسته دوم(تئوری‌های نو) ظاهر می‌شود.

کاپا (در کنار): تئوری‌های تکامل یافته و بالغ ممکن است که جوان شوند. اکتشاف همواره بر توجیه ارجحیت دارد.

سیگما: این دسته بندی متعلق به من است! در دسته بندی من، اولین دسته گزاره‌های بالغ بودند، سومین دسته گزاره‌های در حال رشد...

گاما (حرفش را قطع می‌کند): اصلاً قضیه غلط است. من یک مثال نقض دارم.

۵ ایراد گرفتن از اثبات بوسیله مثال‌های نقض کلی که موضعی نیستند. مسئله "دقت[۴۹]"

۱.۵ تحریم هیولا در دفاع از قضیه

گاما: همین الان متوجه شدم که استوانه من، مثال نقض ۵، نه تنها حدس اولیه، بلکه قضیه(نسخه تلفیق لم) را نیز نقض می‌کند. با اینکه در هردو شرط صدق می‌کند، ولی اویلری نیست.

آلفا: گامای عزیز، لطفاً حرفهای عجیب نزن. استوانه یک جُک بود نه یک مثال نقض. یک ریاضیدان واقعی هیچگاه استوانه را یک چندوجهی حساب نمی‌کند.

گاما: چرا به جوجه تیغی من، مثال نقض ۳، اعتراض نکردی؟ آیا جوجه تیغی از استوانه عجیبتر نبود؟ ولی نه، تو در آن زمان مشغول ایراد گرفتن به حدس اولیه بودی و از هرگونه ایرادی استقبال میکردی. حالا در حال دفاع از قضیه هستی و از ایرادها دوری می‌کنی! قبلاً، وقتی مثال نقضی بود، از خود میپرسیدی که چه چیزی در حدس غلط است، ولی الان از خود میرسی که چه چیزی در مثال نقض غلط است.

دلتا: آلفا، تو یک هیولا تحریم کن شده ای. خجالت نمیکشی؟

۲.۵ لمهای مخفی

آلفا: چرا. شاید یک مقدار عجول بوده ام. بگذارید ببینم. ما سه نوع مثال نقض داریم. در مورد نوع اول، که موضعی بودند ولی کلی نبودند، بحث کردیم. این مثال‌های نقض، قضیه را رد نمیکردند. مثال‌های نوع دوم، که هم موضعی و هم کلی هستند، نه تنها قضیه را رد نمی‌کنند، بلکه آنرا تأیید هم می‌کنند. حال ممکن است که یک نوع سوم هم داشته‌باشیم، که مثال هایی هستند که کلی هستند، ولی موضعی نیستند. این مثال ها، قضیه را رد می‌کنند. من فکر نمیکردم که چنین چیزی ممکن باشد. ولی الان گاما ادعا می‌کند که استوانه چنین شرطی را دارد. اگر نخواهیم که آنرا به عنوان یک هیولا بپذیریم(و آنرا رد کنیم)، بایستی قبول کنیم که یک مثال نقض کلی است: برای استوانه

[۴۸] mature
[۴۹] rigour

$v-e+f=1$ است. ولی آیا (این مثال نقض)از نوع دوم — که بی خطر هستند — نیست؟ شرط میبندم که حداقل در یکی از لمها صدق نمی‌کند.

گاما: بیایید چک کنیم. استوانه مسلماً در شرط اول صدق می‌کند: اگر وجه پایینی را برداریم، می‌توانیم آنرا روی صفحه بنشانیم.

آلفا: ولی اگر وجه کناری را برداریم، چیزی که بدست می آوریم دو تکه است!

گاما: خب که چی؟ شرط اول این بود که چندوجهی "ساده" باشد، یعنی "بعد از حذف یک وجه، قابل نشاندن روی صفحه باشد". استوانه این شرط را دارد، حتی اگر با حذف وجه کناری شروع کنیم. چیزی که تو میگویی این است که استوانه بایستی یک شرط اضافه داشته‌باشد، بایستی شبکه مسطح ایجاد شده هم‌بند باشد. ولی هیچ کس تابحال این شرط را ذکر نکرده‌است.

آلفا: همه منظورشان از قابل نشاندن روی صفحه، قابل نشاندن روی صفحه بصورت یک تکه بوده است. ما لم سوم را بصورت شرط در قضیه نیاوردیم، چرا که اثبات اپسیلون، لم سوم را از لم اول نتیجه می‌داد. ولی اگر به اثبات نگاه کنیم، میبینیم که بر این پایه استوار است که شبکه مسطح بدست‌آمده هم‌بند است! در غیر این صورت، برای شبکه مسطح بدست آمده $v-e+f=1$ نخواهدبود.

گاما: پس چرا اصرار به بیان صریح آن نکردی؟

آلفا: چونکه ما در حالت غیر صریح آنرا درک کردیم(نیازی به بیان مجدد نبود).

گاما: تو قطعاً درک نکردی. چراکه تو گفتی که "ساده" بودن همان "قابل نشاندن روی سطح کره" بودن است. استوانه قابل نشاندن روی سطح کره است، لذا بنا بر تعریف تو، در شرط اول صدق می‌کند.

آلفا: هممم... ولی بایستی قبول کنید که در شرط دوم— که میگوید هر ناحیه با رسم هر قطرش به دو ناحیه تقسیم می‌شود— صدق نمی‌کند. چگونه می‌توانید دایره ها یا پوشه را مثلث بندی کنید؟ آیا این ناحیه‌ها "واقعاً همبند" هستند؟

گاما: البته که هستند.

آلفا: ولی برای استوانه حتی یک قطر هم نمی‌توان کشید! یک قطر دو رأس غیر مجاور را بهم وصل می‌کند، ولی استوانه اصلاً رأس ندارد!

گاما: عصبانی نشو. اگر میخواهی نشان دهی که دایره واقعاً همبند نیست، یک قطر بکش که صفحه جدیدی ایجاد نکند.

آلفا: شوخی نکن. خیلی خوب میدونی که نمیتونم.

گاما: حالا قبول داری که گزاره "قطری از دایره وجود دارد که با کشیدن آن صفحه جدیدی ایجاد نمی‌شود" غلط است؟

آلفا: بله، قبول دارم. چه چیزی را می‌خواهی نشان دهی؟

گاما: پس باید قبول کنی که نقیض اش، یعنی گزاره "تمامی قطرهای دایره حین رسم شدن تشکیل یک ناحیه جدید میدهند" درست است، یعنی دایره "واقعاً همبند" است.

آلفا: نمی‌توانی از صور عمومی ات، یعنی "همه قطرهای دایره حین رسم شدن تشکیل یک ناحیه جدید میدهند" یک "نمونه"[۵۰] ارائه دهی، پس گزاره ات نمی‌تواند درست باشد، بلکه بی معنی است. درک تو از راستی[۵۱]، غلط است.

کاپا (در کنار): اول سر تعریف چندوجهی دعوا میکردند، حالا سر تعریف درستی!

گاما: ولی تو قبول کردی که نقیض آن گزاره غلط بود! آیا ممکن است که گزاره A بی معنی باشد، ولی نقیض آن، $\neg A$ ، کاملاً بامعنی و غلط باشد؟ درک تو از معنی[۵۲]، بی معنی است!
ببین، میدانم مشکلت در کجاست؛ ما می‌توانیم با یک تغییر جزئی در فرمول‌بندی، آنرا حل کنیم. بگذارید تعریف کنیم که یک ناحیه "واقعاً همبند" است، اگر "برای تمامی مقادیر x، اگر x یک قطر باشد، آنگاه x ناحیه را دو قسمت کند". نه دایره و نه پوشه، هیچکدام قطری ندارند، پس هر x می‌تواند یک "نمونه" برای شرطمان باشد و لذا هردو گزاره، بامعنی و درست هستند. پس دایره و پوشه هردو واقعاً همبند هستند.

آلفا: نه! اگر نتوانیم قطری بکشیم و نتوانیم شبکه را مثلث بندی کنیم، هرگز نمی‌توانیم به یک شبکه کاملاً مثلث بندی شده برسیم (و شروع به حذف مثلثها کرده) و حکم را نتیجه بگیریم. در این صورت، چگونه ادعا می‌کنی که استوانه در شرط دوم صدق می‌کند؟ آیا نمیبینی که بایستی یک شرط وجودی در لم(شرط) باشد؟ تعبیر درست ناحیه واقعاً همبند بایستی این باشد: "برای تمامی مقادیر x، اگر x یک قطر باشد، آنگاه x ناحیه را دو قسمت کند؛ و حداقل یک x داشته‌باشیم که قطر باشد." شاید فرمول بندی اولیه ما این را به صراحت نگفته باشد، ولی این فرض بطور ناخودآگاه بصورت یک "فرض مخفی" در آن آمده است. هیچکدام از وجوه استوانه این شرط را ندارند؛ لذا استوانه یک مثال نقض است که هم کلی و هم موضعی است، و قضیه را نقض نمی‌کند.

گاما: ابتدا تو لم اول را با مطرح کردن مفهوم همبندی اصلاح کردی، حالا هم لم دوم را با مطرح کردن این شرط وجودی! و تمام این حرفهای مبهم راجع به "فرض‌های مخفی" تنها این مسئله را مخفی می‌کند که استوانه من باعث شد که این اصلاحات را انجام دهی.

آلفا: کدام حرف مبهم؟ ما قبول کردیم که لمهای "بدیهتاً درست" را از قلم بیندازیم، یعنی آنها را "مخفی" کنیم. حال چرا نباید لمهای "بدیهتاً غلط" را مخفی کنیم؟ آنها دقیقاً به همان اندازه بدیهی و ملال‌آور هستند! آنها را در ذهن خود نگه دارید، ولی به زبان نیاورید. (وجود)یک لم مخفی، خطا محسوب نمی‌شود؛ بلکه یک اشاره مختصر به "دانش زمینه[۵۳]" ما میباشد.

[۵۰] instance
[۵۱] truth
[۵۲] meaning
[۵۳] background knowledge

کاپا (در کنار): دانش زمینه، جایی است که فکر می‌کنیم همه چیز را می‌دانیم، ولی در واقع هیچ چیز نمی‌دانیم.

گاما: تنها فرضهای آگاهانه ای که کردی، این بود که (۱) حذف یک وجه همواره یک شبکه همبند ایجاد می‌کند و (۲) هر ناحیه غیر مثلثی را می‌توان با رسم (بعضی از)قطرهایش به نواحی مثلثی تجزیه کرد. اینها در قسمت ناخودآگاه مغز تو بصورت "بدیهتاً درست" بودند، ولی استوانه باعث شد که آنها در مغز تو دگرگون شوند و بصورت بدیهتاً غلط در بیایند. اگر این را تکذیب می‌کنی، داری تاریخ را عوض می‌کنی تا آنرا از خطا پاک کنی.

تتا: آلفا! کمی قبل تر، تو شرطهای مخفی موجود در تعاریف دلتا را مسخره میکردی. حال خودت بعد از هر بار رد شدن قضیه، شرطهای مخفی به لمها اضافه می‌کنی و هربار با تغییر موضع خود سعی می‌کنی که آبروی خودت را حفظ کنی. خجالت نمیکشی؟

کاپا: هیچ چیز برای من، جذابتر از (تماشای) یک فرد متعصب(آلفا) در حال دفاع نیست. بعد از اینکه با شکاکیت با تعصبی‌های دیگر جنگید، خود آتشی می‌شود و به تعصب رو میاورد! او بی منطق عمل می‌کند: برای حذف مثال نقض گاما، ابتدا را با روشی که خودش آنرا ممنوع کرده بود(تحریم هیولا)و سپس با مطرح کردن لمهای مخفی، سعی می‌کند آنرا رد کند.

معلم: مشکل آلفا قطعاً این بود که بطور تعصبی با روش تلفیق لم برخورد کرد. او خیال میکرد که یک بررسی دقیق از اثبات باعث ایجاد یک "تحلیل اثبات" بی نقص می‌شود که تمامی لمهای غلط را بدست میدهد(همانطور که بتا خیال میکرد که می‌تواند تمامی مثال نقض‌ها را بیابد). او گمان میکرد که با آوردن این لمهای غلط در حدس، نه تنها به یک قضیه بهبود یافته دست میابد، بلکه قضیه بدست آمده بی نقص است، و خیالش از مثال‌های نقض راحت می‌شود. استوانه نشان داد که او اشتباه فکر میکرد، ولی بجای اینکه زیر بار اشتباه خود برود، او حالا یک تحلیل اثبات را کامل می‌داند، اگر تمامی لم‌های اشتباه را داشته‌باشد.

۳.۵ روش اثبات و ردها[۵۴]

گاما: پیشنهاد می‌کنم که استوانه را بعنوان یک مثال نقض درست برای قضیه بپذیریم. من یک یا چند لم جدید میاورم که بوسیله استوانه نقض می‌شوند. دقیقاً همان کاری که آلفا کرد، ولی بجای اینکه آنها را لمهای مخفی بنامم، آنها را به همه اعلام می‌کنم.

حال استوانه که یک مثال نقض گیج کننده و خطرناک(از نوع سوم) نسبت به تحلیل اثبات و قضیه قدیمی بود، یک مثال نقض بی خطر(نوع دوم) نسبت به تحلیل اثبات و قضیه جدید می‌شود.

آلفا فکر میکرد که دسته بندی اش از مثالهای نقض، مطلق است، ولی در واقع نسبی بود، نسبت به تحلیل اثباتی که انجام داده بود. با رشد و تکامل تحلیل اثبات، مثال نقض‌های نوع سوم تبدیل به مثال تقض‌های نوع دوم می‌شوند.

لاندا: درسته. یک تحلیل اثبات، "بادقت[۵۵]" یا "معتبر[۵۶]" است، و قضیه متناظر با آن درست است، اگر و تنها اگر هیچ مثال نقضی از نوع سوم برای آن موجود نباشد. من این معیار را "اصل انتقال کذب[۵۷]" میناما، چرا که بر مبنای این معیار، همه مثال‌های نقض کلی، موضعی نیز هستند: کذب بایستی از حدس اولیه به لمها و از پیامدهای قضیه به مقدم‌های آن منتقل شود. اگر یک مثال نقض کلی موجود باشد که موضعی نباشد و این اصل را نقض کند،

[۵۴] The method of proof and refutations
[۵۵] rigorous
[۵۶] valid
[۵۷] Principle of Retransmission of Falsity

با اضافه کردن یک لم مناسب به تحلیل اثبات دوباره اصل را برقرار می‌کنیم. لذا اصل انتقال کذب برای یک تحلیل اثبات نوپا، یک اصل "تنظیمی[۵۸]" است، و یک مثال نقض از نوع سوم، یک عامل محرک برای رشد تحلیل اثبات است.

گاما: فراموش نکنید، حتی قبل از اینکه اولین مثال نقض پیدا شود، ما سه لم مشکوک را شناسایی کردیم و با تحلیل اثباتمان پیش رفتیم.

لاندا: درسته. تحلیل اثبات ممکن است حتی در مواجهه با چیزی بجز مثال نقض تکامل یابد، مثلاً یاد گرفته ایم که در مقابل اثباتهای "متقاعد کننده[۵۹]" واکنش(منفی) نشان دهیم.
در حالت اول، تمامی مثالهای نقض، از نوع سوم هستند و تمامی لمها، مخفی. آنها مارا به ساخت تدریجی تحلیل اثبات میرسانند و یکی یکی به مثال نقض‌های نوع دوم تبدیل می‌شوند.
در حالت دوم — هنگامی که مشکوک هستیم و بدنبال رد کردن هستیم — ممکن است که تحلیل اثبات را بهبود ببخشیم، بدون اینکه با مثال نقضی برخورد کنیم. حال دو حالت ممکن است. حالت اول اینکه موفق به رد کردن تحلیل اثبات — بوسیله مثال نقض‌های موضعی — شویم. خواهیم دید که اینها مثال‌های نقض کلی نیز خواهند بود.

آلفا: من قاب عکس را از همین روش بدست آوردم: بدنبال چندوجهی گشتم که بعد از حذف یک وجه، قابل نشاندن روی صفحه نباشد.

سیگما: در این صورت، نه تنها مثال‌های نقض یک عامل محرک برای (رشد)تحلیل اثبات هستند، بلکه تحلیل اثبات نیز یک عامل محرک برای (پیدایش)مثال‌های نقض است! چه اتحاد شومی بین دو دشمن!

لاندا: درسته. اگر یک حدس خیلی ممکن و یا حتی خیلی بدیهی بنظر میرسد، بایستی آنرا اثبات کرد: ممکن است به این نتیجه برسیم که بر پایه لمهایی خیلی پیچیده و مشکوک استوار است. رد کردن این لمهای مشکوک(پیدا کردن مثال نقض برایشان)، مثال نقض هایی غیر منتظره برای حدس اولیه میدهد.

سیگما: پیش به سوی ردهای بدست آمده از اثبات!

گاما: لذا خاصیت یک اثبات منطقی این نیست که باور(به درستی) تحمیل کند، بلکه این است که مواردی برای شک کردن پیشنهاد دهد.

لاندا: ولی بگذارید حالت دوم را بگویم: وقتی که هیچ مثال نقض موضعی برای لمها پیدا نمی‌کنیم.

سیگما: یعنی وقتی که مثال‌های نقض به تحلیل اثبات کمک نمی‌کنند! آنوقت چه اتفاقی می‌افتد؟

لاندا: اثبات احترامِ کامل پیدا می‌کند و لمها دیگر مشکوک نیستند. تحلیل اثبات ما بزودی فراموش می‌شود. بدون ایراد(مثال نقض) نمی‌توان شک را نگه داشت. توان ما برای جستجو کردن مثال نقض مثل یک چراغ میماند: اگر مثال نقضی پیدا نشود و سوخت آنرا تجدید نکند، بزودی خاموش می‌شود. در این صورت، همه توجه ما برای رد کردن، به قسمتهایی محدود می‌شود که قبلاً آنها را "بدیهتاً درست" میدانستیم.

[۵۸] regulative
[۵۹] convincing

تمام اینها حاکی از این است که اثبات و رد را نمی‌توان دو مقوله جدا از هم دانست. به همین خاطر، پیشنهاد می‌کنم که "روش تلفیق لم" را به "روش اثبات و ردها" تغییر نام بدهیم. بگذارید جلوه‌های اصلی این روش را در ۳ قانون اکتشافی بگویم :

قانون ۱. اگر یک حدس دارید، در پی اثبات و رد آن برآیید. اثبات را بدقت بررسی کنید و یک لیست از لمهای غیر بدیهی تهیه کنید(تحلیل اثبات)؛ مثال‌های نقضی هم برای حدس(کلی) و هم برای لمهای مشکوک(موضعی) پیدا کنید.

قانون ۲. اگر مثال نقض کلی دارید، حدس خود را دور بیندازید، به تحلیل اثبات خود یک لم مناسب اضافه کنید که با مثال نقض یافت شده نقض شود، و حدس دور انداخته‌شده را با یک حدس بهبود یافته — که لم اضافه شده را بصورت یک شرط در خود دارد — جایگزین کنید. هیچ مثال نقضی را هیولا معرفی نکنید. تمامی لمهای مخفی را صریحاً بیان کنید.

قانون ۳. اگر یک مثال نقض موضعی دارید، چک کنید که آیا یک مثال نقض کلی هست یا نه. اگر هست، می‌توانید براحتی قانون ۲ را برایش بکار ببرید.

مثلث بندی در شبکه‌های ساده

ابوالفضل طاهری

یکی از مسائل مهم در شبکه، بدست آوردن فاصله بین گره‌ها[۱] در شبکه می‌باشد. اما بدست آوردن این فاصله‌ها کار چندان آسانی نیست و بعلاوه کاری پرهزینه می‌باشد. با توجه به این مساله ترجیح داده‌می‌شود که با بدست آوردن فاصله تعداد محدودی از گره‌ها در شبکه از یکدیگر، سایر فاصله‌ها را با استفاده از این مقادیر معلوم تقریب بزنیم. مثلث‌بندی شبکه یکی از متدهایی است که برای این کار ارایه‌شده‌است.

مثلث‌بندی شبکه براساس ساختار متریک فاصله، و نامساوی مثلثی در این نوع ساختارها عمل می‌کند. به این ترتیب که با نشاندن شبکه در یک فضای متریک، گره‌هایی را به عنوان گره‌های راهنما معرفی می‌کند که فاصله آن تا سایر نقاط معلوم است. حال با استفاده از این گره‌های راهنما و نامساوی مثلثی، فاصله‌ی دو گره را تخمین می‌زنند. مطالعات اخیر نشان می‌دهد که خطای شدید در نامساوی مثلثی چندان معمول نیست، و بنابراین می‌توان شبکه را با یک فضای متریک متناهی مدل کرد و از این روش در آن استفاده کرد.

این کار به وسیله‌ی کلاینبرگ[۲] ، اسلیوکینز[۳] ، وکسلر[۴] شروع شد و در نهایت هدف کاهش تعداد نقاط راهنما بود و انتخاب این نقاط به طوری که این کار بهینه شود. هدف این مقاله که بر اساس [۱] می‌باشد نیز ادامه این کار می‌باشد. در اینجا با ارایه متریک‌های خاص قضایایی را ثابت می‌کنیم که نشان می‌دهد به کران بهینه برای مجموعه‌های راهنما رسیده‌ایم.

مفاهیم اولیه

تعریف ۱. *مجموعه‌ی X را به همراه تابع $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ را فضای متریک می‌گوییم اگر d دارای سه خاصیت زیر باشد: فرض کنید $x, y, z \in X$ باشد:*

۱) $d(x,y) \geq 0, d(x,y) = 0 \iff x = y$

۲) $d(x,y) = d(y,x)$

۳) $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$

این فضا را با (X,d) نمایش می‌دهیم.

مثلث‌بندی در فضای متریک متناهی

فرض کنید (X,d) فضایی متریک باشد که $n =| X |$ است. برای هر $x \in X$ مجموعه‌ی $S_x \subset X$ را تمام نقاطی می‌گیریم که فاصله‌ی آن‌ها تا x معلوم است. این مجموعه را مجموعه‌ی راهنمای x می‌نامیم. به یک چنین متناظرسازی بین اعضای X و

[۱] node
[۲] Kleinberg
[۳] Slivkins
[۴] Wexler

زیرمجموعه‌های آن یک مثلث‌بندی فضای X می‌گوییم. یک مثلث‌بندی از X دارای مرتبه‌ی s است اگر $\max_{x\in X} \mid S_x \mid \leq s$ باشد.

برای هر مثلث‌بندی از X داریم:

$$\forall b \in S_x \cap S_y; \mid d(x,b) - d(y,b) \mid \leq d(x,y) \leq d(x,b) + d(y,b)$$

حال با توجه به این نامساوی‌ها تعریف می‌کنیم:

$$D(x,y)^+ = \min_{b\in S_x \cap S_y}\{d(x,b)+d(b,y)\}, D(x,y)^- = \max_{b\in S_x\cap S_y}\{d(x,b)-d(b,y)\}$$

حال با توجه به این مفاهیم، یک (ϵ,δ)-مثلث‌بندی را، مثلث‌بندی می‌گیریم که نامساوی $\frac{D(x,y)^+}{D(x,y)^-} \leq ۱+\delta$ برای تمام x و y به جز کسر ϵ از این زوج‌ها صادق باشد. ϵ را ضعف این مثلث‌بندی و δ را دقت آن می‌گوییم.

تعریف ۲. *بعد دوگان فضای متریک (X,d) را کوچکترین عدد k تعریف می‌کنیم که، هر گوی به شعاع r را بتوان با ۲^k گوی به شعاع $r/۲$ پوشاند. فضای با بعد دوگان k را ۲^k-دوگان می‌نامیم. اگر $k=O(۱)$ باشد فضا را دوگان می‌نامیم.*

کلاینبرگ برای نتایج تجربی که بدست‌آمده‌بود، توضیحی تحلیلی ارائه کرد. او نشان داد که هر ۲^k-دوگان، (ϵ,δ)-مثلث‌بندی را می‌پذیرد که مرتبه‌ی آن به n وابسته نیست. بعد از کلاینبرگ، اسلیوکینز نشان داد که هر فضای متریک با بعد دوگان k، (ϵ,δ)-مثلث‌بندی را می‌پذیرد که مرتبه‌ی آن به صورت $\delta^{O(k)}(\log n)^۲$ است. او بعد این کران را بهتر کرد و آن را به $\delta^{O(k)}\log n$ رساند. با این روند سوالی که برای او مطرح شد این بود که آیا $O(\log n)$ لازم است؟

در ادامه می‌خواهیم به این سوال پاسخ دهیم و نشان دهیم مثلث‌بندی ارائه شده توسط اسلیوکینز با در نظر گرفتن یک ثابت بهینه است.

معرفی متریک‌های خاص

تعریف ۳. *متریک زیر را روی $\mathbb{R}^k$ تعریف می‌کنیم و آن را متریک مینکوسکی[۵]، می‌گوییم و با l_p نمایش می‌دهیم:*

$$\forall x,y \in \mathbb{R}^k; d(x,y) = \left(\sum (x_i - y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

همچنین برای ∞ تعریف می‌کنیم:

$$\forall x,y \in \mathbb{R}^k; d(x,y) = \max \mid x_i - y_i \mid$$

تعریف ۴. *برای تبدیل گراف G به یک فضای متریک، مجموعه راس‌های آن را نقاط فضا در نظر گرفته و فاصله بین نقاط را طول کوتاهترین مسیر بین آن‌ها می‌گیریم. معادلا متناظر با هر فضای متریک متناهی می‌توان گراف G را ساخت. این متریک را متریک روی گراف G می‌نامیم. اگر گراف ساخته شده درخت باشد، متریک را متریک درختی می‌گوییم.*

تعریف ۵. *فرض کنید $X=\{۰,۱,\ldots,n-۱\}$ باشد. X را با متر $d(x,y)=\min\{\mid x-y\mid, n-\mid x-y\mid\}$، متریک دوری نامیده می‌شود.*

تعریف ۶. *اگر به جای شرط ۳ در مورد متر فضاهای متریک، یعنی خاصیت مثلثی، شرط*

$$d(x,z) \leq \max\{d(x,y), d(z,y)\}$$

را قرار دهیم، فضا را ابرمتریک می‌نامیم.

[۵] Minkowski

متریک‌های یک بعدی

قضیه‌ای که در اینجا مطرح می‌شود نشان می‌دهد که ما به $\log n$ نیاز داریم و بنابراین پاسخ سوال اسلیوکینز مثبت است.
قرارداد می کنیم:

$$[M] = \{0, 1, \dots, M-1\}$$

قضیه ۷. *برای هر $n \geq 2$، فضای متریک یک بعدی با اندازه‌ی n وجود دارد به طوری که برای هر (ϵ, δ)-مثلث‌بندی که $\delta < 1$، دارای مرتبه‌ی $\Omega(\log n)$ است.*

اثبات. بدون کاسته شدن از کلیت حکم فرض می‌کنیم که n توانی از ۲ است. فضای (X, d) را فضای متریک دوری از اندازه n بگیرید. حال ثابت می‌کنیم این فضا شرایط مسئله را دارد و بنابراین حکم ثابت می‌شود.

قرار می‌دهیم $M = \log n - 3$. حال فرض خلف می‌گیریم، یعنی فرض می‌کنیم که (X, d)، $(0, \delta)$-مثلث‌بندی دارد که:

$$\forall x \in X; x \to S_x, \mid S_x \mid = k \leq \frac{M}{8}$$

برای هر $x \in X, j \in [M]$ تعریف می‌کنیم:

$$A(x, j) = \{b \in S_x; 2^{j-1} \leq d(x, b) \leq 2^{j+1}\}$$

حال $x \in X$ را ثابت در نظر بگیرید، در این صورت b حداکثر در دو تا از $A(x, 0), \dots, A(x, M-1)$ اتفاق می‌افتد، در نتیجه $\sum_{j \in [M]} 1_{A(x,j)} \leq 2 \mid S_x \mid \leq \frac{M}{4}$. بنابراین اگر $j' \in [M]$ نیز به طور تصادفی انتخاب شود، خواهیم داشت:

$$\forall x \in X; Pr_{j'}[A(x, j')] \leq \frac{1}{4}$$

تعریف می‌کنیم $y' = (x' + 2^{j'}) \mod n$. با این تعریف y' یک توزیع یکنواخت روی X و مستقل از j' دارد. پس داریم $Pr_{j',x'}[A(j', y')] \leq \frac{1}{4}$، و در نتیجه خواهیم‌داشت:

$$Pr_{j',x'}[A(x', j') \vee A(y', j')] \leq \frac{1}{2}$$

با توجه به احتمال بدست‌آمده، وجود دارد $j \in [M]$ و $x \in X$ به طوری که هیچ یک از $A(x, j)$ و $A(y, j)$ اتفاق نمی‌افتد.

ادعا می‌کنیم $D(x, y)^+ \geq 2d(x, y)$. ادعا حکم را ثابت می‌کند چرا که همواره $D(x, y)^- \leq d(x, y)$ و در نتیجه $\delta \geq 1$ بدست می‌آید که تناقض با فرض است. بنابراین X نمی‌تواند چنین مثلث‌بندی داشته باشد و حکم ثابت می‌شود. پس کافی است ادعا را ثابت کنیم.

اثبات ادعا: داریم $j \leq M \leq \log n - 1$ بنابراین داریم:

$$\mid x - ((x + 2^j) \mod n) \mid = \mid (x - (x + 2^j)) \mid n \mid = \mid -2^j \mid = 2^j$$

$$d(x, y) = \min\{2^j, n - 2^j\} = 2^j$$

حال $b \in S_x \cap S_y$ را در نظر بگیرید، حداقل یکی از $d(x, b)$ یا $d(y, b)$ باید بزرگتر یا مساوی با $\frac{1}{2}d(x, y) = 2^{j-1}$ باشد(بنا به نامساوی مثلثی در فضاهای متریک). مثلا فرض می‌کنیم $d(x, y) \geq 2^{j-1}$. این واقعیت که $d(x, j)$ اتفاق نمی‌افتد نتیجه می‌دهد $d(x, b) \geq 2^{j+1}$. بنابراین $d(x, b) + d(y, b) \geq 2^{j+1} = 2d(x, y)$. چون b دلخواه بود ادعا ثابت می‌شود. □

قضیه ۸. *برای هر $n \geq 2$، فضای متریک یک بعدی با اندازه n وجود دارد به طوری که برای هر (ϵ, δ)-مثلث‌بندی که $\delta < 1$، دارای مرتبه $\Omega(\log \frac{1}{\epsilon})$ است.*

اثبات. اثبات این قضیه کاملا شبیه به قضیه قبل است و تنها در مواردی جزئی تفاوت‌هایی داریم. □

متریک‌های دوگان

در این قسمت منظور از l_2^k فضای اقلیدسی k بعدی با متر مینکوسکی می‌باشد. از $\|\ .\ \|$ برای نرم این فضا استفاده می‌کنیم. برای هر $A \subset X$ و $x \in X$ تعریف می‌کنیم $d(x,A) = \inf_{p\in A} \| x-p \|$. لم‌های زیر را بدون اثبات می‌آوریم و از آن‌ها در اثبات قضیه‌ها استفاده می‌کنیم.

لم ۹. *$x, b \in \mathbb{R}_2^k$ و $\frac{1}{2} > \delta > 0$ را ثابت در نظر بگیرید. آنگاه خط L به طول $\| x-b \|$ وجود دارد به طوری که هر $y \in \mathbb{R}^k$ که دارای شرایط*

$$\| x-b \| + \| b-y \| \leq (1+\delta) \| x-y \| \quad , \quad \| x-b \| \geq \| y-b \| \tag{1}$$

باشد، در فاصله‌ی $5\sqrt{\delta} \| x-b \|$ خط L است. به عبارتی $d(x,L) \leq 5\sqrt{\delta} \| x-b \|$.

لم ۱۰. *$a, b \in \mathbb{R}_2^k$ و $\frac{1}{2} > \delta > 0$ و $Y \subset \mathbb{R}^k$ ناتهی و متناهی را ثابت در نظر بگیرید. در این صورت نقاط $y_1, \ldots, y_{\frac{1}{\delta}} \in Y$ وجود دارد که هر $y \in Y$ که در (۱) صدق می‌کند داخل $\cup_{t=1}^{\frac{1}{\delta}} B(y_t, 12\sqrt{\delta})$ قرار می‌گیرد.*

لم ۱۱. *فرض کنید $k \geq 2$ است و $B(x,r)$ گوی بسته به شعاع r حول $x \in \mathbb{R}^k$ باشد. اگر تعریف کنیم $\hat{B}(x,r) = \mathbb{Z}^k \cap B(x,r)$، آنگاه برای هر $\alpha \geq 2$ و $r \geq 6\sqrt{k}$, $x \in \mathbb{R}^k$ داریم:*

$$(\alpha - \frac{1}{4})^k \leq \frac{| \hat{B}(x,\alpha r) |}{| \hat{B}(x,r) |} \leq (\alpha + \frac{1}{2})^k$$

قضیه ۱۲. *برای هر $\frac{1}{2} > \delta$, $n \geq (\frac{k}{\delta})^k$ و $k \geq 2$، متریک از اندازه n با بعد دوگان $O(k)$ وجود دارد به طوری که برای هر $(0,\delta)$-مثلث‌بندی، دارای مرتبه حداقل $(c\delta)^{\frac{-k}{2+1}} \log (n^{\frac{1}{k}})$ است که در آن c ثابت است.*

اثبات. فضای (X,d) را متریک I^2 روی چنبره گسسته k بعدی در نظر بگیرید. این فضا به این صورت تعریف می‌شود؛ فرض کنید $m = n^{\frac{1}{k}}$ و بدون کاسته شدن از کلیت مسئله فرض می‌کنیم که m عددی صحیح و توانی از ۲ است. قرار می‌دهیم $X = [m]^k$ و متریک زیر را روی آن تعریف می‌کنیم:

$$d_i(x,y) = \min\{| x_i - y_i |, m - | x_i, y_i |\}, d(x,y) = [\sum_i (d_i(x,y))^2]^{\frac{1}{2}}$$

متریک تعریف شده دارای بعد دوگان $O(k)$ است.

قرار می‌دهیم $M = \log m$. حال فرض خلف می‌گیریم که (X,d) یک $(0,\delta)$-مثلث‌بندی دارد که دارای مرتبه‌ی $\frac{\delta}{64k}(24\sqrt{\delta})^{-k} \log n$ باشد. تعریف می‌کنیم:

$$\forall x,y \in X; A(x,y) = \{b \in S_x : d(x,b) + d(y,b) \leq (1+\delta) d(x,y), d(x,b) \geq d(y,b)\}$$

ادعا ۱ : فرض کنید $x,y \in X$ باشد. اگر هیچکدام از $A(x,y)$ و $A(y,x)$ اتفاق نیفتد، آنگاه $D(x,y)^+ > (1+\delta) d(x,y)$

اثبات ادعا: فرض خلف بگیرید، یعنی فرض کنید $D(x,y)^+ \leq (1+\delta) d(x,y)$ اتفاق بیفتد. حال اگر $b \in S_x \cap S_y$ باشد به طوری که $D(x,y)^+ = d(x,b) + d(y,b)$ باشد، نتیجه می‌شود که یا $d(x,b) \geq d(y,b)$ یا $d(x,b) \leq d(y,b)$ اتفاق می‌افتد و بنابراین یا $A(x,y)$ یا A(y،x) اتفاق می‌افتد که تناقض است و بنابراین ادعا ثابت می‌شود.

توزیع μ را به این صورت تعریف می‌کنیم که $x \in X$ و $j \in \{\frac{M}{2}, \ldots, M-1\}$ را به صورت تصادفی انتخاب می‌کنیم. همچنین y را به صورت تصادفی از $B(x, 2^j) \backslash B(x, 2^{j-1})$ انتخاب می‌کنیم. با این توصیف y یک توزیع یکنواخت روی X است و بعلاوه y, j مستقل‌اند.

ادعا ۲ : $Pr_\mu[A(x,y)] \leq \frac{1}{4}$.

برای اثبات ادعا حکم قوی‌تر $Pr_\mu[A(x,y) \mid x = x'] \leq \frac{1}{4}$ را ثابت می‌کنیم. برای این کار، برای هر $x, y \in X$ و هر $b \in S_x$ تعریف می‌کنیم $A(x,y,b)$ رخداد

$$d(x,b) + d(y,b) \leq (1+\delta) d(x,y), d(x,b) \geq d(y,b)$$

باشد. با توجه به این تعریف داریم:

$$A(x,y) = \cup_{b \in S_x} A(x,y,b) \Rightarrow Pr_\mu[A(x,y) \mid x = x'] \leq \sum_{b \in S_x} Pr_\mu[A(x,y,b) \mid x = x']$$

حال $x' \in X$ را ثابت بگیرید و $b' \in S_{x'}$ در نظر بگیرید. اگر $A(x', y, b')$ اتفاق بیفتد، داریم

$$\frac{1}{1+\delta} d(b', x') \leq d(x, y) \leq 2d(b', x')$$

و همچنین $2^{j-1} < d(x, y) \leq 2^j$ که j به بازه $[\log d(b', x') - 1, \log d(b', x') + 2]$ محدود شده‌است. چون j صحیح است و مستقل از $x = x'$ انتخاب شده‌است، بنابراین احتمال انتخاب j در این بازه $\frac{8}{M}$ است.

فرض کنید j از یکی از این ۴ مقدار انتخاب شده‌باشد و $y \in B(x', 2^j) \backslash B(x', 2^{j-1})$ را به صورت تصادفی انتخاب می‌کنیم. مجموعه‌ی $B(x', 2^j)$ در X با مجموعه‌ی متناهی l_2^k یکریخت است و بنابراین بنا به لم ۱۰، مجموعه‌ی نقاط $y_1, \ldots, y_{\frac{1}{\delta}}$ وجود دارد به طوری که هر $y \in X$ که خاصیت $A(x', y, b')$ را حفظ می‌کند درون $\cup_{t=1}^{\frac{1}{\delta}} B(y_t, 6\sqrt{\delta} d(x', b'))$ قرار می‌گیرد. در نتیجه احتمال اینکه $y \in B(x', 2^j) \backslash B(x', 2^{j-1})$ باشد و خاصیت $A(x', y, b)$ را داشته‌باشد، بدست می‌آید:

$$\frac{\sum_{t=1}^{\frac{1}{\delta}} \mid B(y_t, 6\sqrt{\delta} d(x', b') \mid}{\mid B(x', 2^j) \backslash B(x', 2^{j-1}) \mid} \leq \frac{1}{\delta} . \frac{\mid B(y_1, 6\sqrt{\delta} 2^{j+1}) \mid}{\frac{|B(x', 2^j)|}{2}} \leq \frac{2}{\delta} (24\sqrt{\delta})^k$$

که نامساوی آخر از لم ۱۱ حاصل می‌شود. با توجه به این نامساوی‌ها داریم:

$$Pr_\mu[A(x, y) \mid x = x'] \leq \mid S_x \mid . \frac{8}{M} . \frac{2}{\delta} (24\sqrt{\delta})^k \leq \frac{1}{4}$$

و ادعا ثابت می‌شود.

با توجه به ادعای ثابت شده، اثبات قضیه را کامل می‌کنیم. چون x, y خاصیت تقارن در توزیع μ را دارند، می‌توانیم از ادعای ۲ استفاده کنیم و بدست آوریم $Pr_\mu[A(x, y) \vee A(y, x)] \leq \frac{1}{2}$.

با استفاده از قوانین احتمال $x, y \in X$ وجود دارد به طوری که نه $A(x, y)$ و نه $A(y, x)$ اتفاق بیفتد. حال با توجه به ادعای ۱، برای این دو نقطه داریم $D(x, y)^+ > (1+\delta) d(x, y)$. از طرفی $D(x, y)^- \leq d(x, y)$، و بنابراین نتیجه می‌شود که $(0, \delta)$-مثلث‌بندی نداریم که تناقض است و حکم ثابت می‌شود. □

قضیه ۱۳. *برای هر $k \geq 2, \delta < \frac{1}{2}, n \geq (\frac{k}{\delta})^k, \epsilon < \frac{1}{(3k)^k}$، متریک از اندازه n با بعد دوگان $O(k)$ وجود دارد به طوری که برای هر (ϵ, δ)-مثلث‌بندی، دارای مرتبه حداقل $(c\delta)^{\frac{-k}{2+1}} \log (n^{\frac{-1}{2k}})$ است که در آن c ثابت است.*

اثبات این قضیه مشابه اثبات قضیه ۱۲ است.

متریک‌های درختی و ابرمتریک‌ها

قضیه ۱۴. *خانواده‌ای از متریک‌های درختی(به طور مشابه ابرمتریک‌ها) از اندازه n وجود دارد به طوری که هر $(\frac{1}{9}, \delta)$-مثلث‌بندی دارای مرتبه $(\Omega(n))^{\frac{1}{1+\delta}}$ است.*

اثبات. فرض کنید T درخت دودویی کامل با ارتفاع $k \geq 1$ باشد و L مجموعه برگ‌های آن باشد. $\epsilon < \frac{1}{9}$ را ثابت بگیرید و فرض کنید متریک d (کوتاهترین مسیر) دارای (ϵ, δ)-مثلث‌بندی از مرتبه‌ی m باشد.

فرض می‌کنیم $n = 2^{k+1} - 1$ تعداد راس‌های T و L مجموعه برگ‌های آن باشد. می‌دانیم $\mid L \mid = 2^k > \frac{n}{2}$. راس‌هایی از T را که در عمق $q = \lceil \frac{k}{1+\delta} \rceil$ هستند را با $z_1, \ldots, z_{2^q}$ نمایش می‌دهیم. برای $j = 1, \ldots, 2^q$، زیردرختی از T را در نظر می‌گیریم که ریشه‌ی آن z_j است و آن را با T_j نشان می‌دهیم. برای $v \in L$، تعریف می‌کنیم $j(v) = \{j \in \{1, \ldots, 2^q\} : v \in T_j\}$. می‌خواهیم نشان دهیم برای اکثر $v \in L$، مجموعه راهنما، اشتراک ناتهی با تعداد زیادی از 2^q درخت T_j دارد.

فرض کنید $L = L_1 \cup L_2$ افرازی از برگ‌های T مطابق با بچه‌های ریشه باشند. بنابراین $\mid L_1 \mid = \mid L_2 \mid = \frac{|L|}{2}$. فرض کنید $L^* = (L_1 \times L_2) \cup (L_2 \times L_1)$ و جفت برگ‌های $(x, y) \in L^*$ را به صورت تصادفی بگیرید. در این صورت (ϵ, δ)-مثلث‌بندی دارای خاصیت زیر است:

$$Pr_{(x,y) \in L^*}[D(x, y)^- < \frac{d(x, y)}{1+\delta}] \leq \frac{\epsilon n^2}{\mid L^* \mid} < 8\epsilon \qquad (2)$$

بعلاوه x را ثابت در نظر بگیرید. مجموعه‌ی S_x شامل راس‌هایی از حداکثر m زیردرخت $T_1,\ldots,T_{2^q}$ است و نقطه‌ی y به صورت توزیع یکنواخت روی $\frac{|L|}{2}$ برگ و بنابراین $T_{j(y)}$ توزیع یکنواخت روی 2^{q-1} زیردرخت از $T_1,\ldots,T_{2^q}$ است. در نتیجه داریم:

$$Pr_{(x,y)\in L^*}[S_x\cap T_{j(y)}\neq\emptyset]\leq\frac{m}{2^{q-1}} \tag{3}$$

وبه طور مشابه برای y داریم:

$$Pr_{(x,y)\in L^*}[S_y\cap T_{j(x)}\neq\emptyset]\leq\frac{m}{2^{q-1}} \tag{4}$$

ادعا: از $S_x\cap T_{j(y)}=S_y\cap T_{j(x)}=\emptyset$ نتیجه می‌دهد $D(x,y)^-<\frac{d(x,y)}{1+\delta}$.

با توجه به ادعای فوق و (۲)، (۳) و (۴) داریم:

$$1-\frac{2m}{2^{q-1}}\leq Pr_{(x,y)\in L^*}[S_x\cap T_{j(y)}=S_y\cap T_{j(x)}=\emptyset]\leq Pr_{(x,y)\in L^*}[D(x,y)^-<\frac{d(x,y)}{1+\delta}]\leq 8\epsilon$$

و در نتیجه داریم $m\geq\Omega(2^q)>\Omega((\frac{n}{2})^{\frac{1}{1+\delta}})$. که این حکم را نتیجه می‌دهد.

حال ادعا را ثابت می‌کنیم. فرض کنید $(x,y)\in L^*$ و $S_x\cap T_{j(y)}=S_y\cap T_{j(x)}=\emptyset$. با توجه به تعریف L^* داریم $d(x,y)=2k$. همچنین برای هر $b\in S_x\cap S_y$ داریم $|d(x,b)-d(y,b)|<2q$. با توجه به فرض نیز داریم $b\notin T_{j(x)}\cup T_{j(y)}$ و $j(x)\neq j(y)$.

فرض کنید w راس میانی در سه‌تایی $\{x,y,b\}$ باشد. داریم:

$$d(x,b)-d(y,b)=d(x,w)-d(y,w)=d(x,y)-2d(y,w)=2k-2d(y,w) \tag{5}$$

حال چون w روی کوتاهترین مسیر بین $x,b\notin T_{j(y)}$ است نتیجه می‌شود $w\notin T_{j(y)}$. بنابراین $d(y,w)>k-q$. با توجه به (۵) داریم $d(x,b)-d(y,b)<2q$. به طور مشابه دیده می‌شود $d(y,b)-d(x,b)<2q$. و بنابراین:

$$|d(x,b)-d(y,b)|<2q\Rightarrow D(x,y)^-<2q=\frac{d(x,y)}{1+\delta}$$

و ادعا ثابت می‌شود. □

اثباتی که در بالا ارائه شد، می‌توان به ابرمتریک‌ها گسترش داد بنابراین قضیه برای ابرمتریک‌ها نیز برقرار است.

قضیه ۱۵. *خانواده‌ای از ابرمتریک‌ها از اندازه‌ی n با بعد دوگان ۱ وجود دارد به طوری که برای هر $(\epsilon,\frac{3}{4})$-مثلث‌بندی دارای مرتبه‌ی $\Omega(\log\frac{1}{\epsilon})$ است.*

اثبات. فرض کنید T درخت دودویی کامل با ارتفاع $k\geq 1$ است که یال‌های در عمق k آن طول ۱ و یال‌های در عمق $1\leq j<k$ به طول 2^{k-j-1} است. فرض کنید L مجموعه برگ‌های T باشد و $n=|L|=2^k$. متریک کوتاهتری مسیر، یک ابرمتریک روی برگ‌ها القا می‌کند. بعلاوه (L,d) دارای بعد دوگان ۱ است، زیرا یک گوی در این متریک متناظر با یک زیردرخت در T است. اگر کوچترین جد مشترک $x,y\in L$ در عمق $j\in\{0,\ldots,k\}$ باشد، آنگاه:

$$d(x,y)=2(1+2^0+\cdots+2^{k-j-2})=2^{k-j}$$

قرار دهید $m=\log\frac{1}{\epsilon}-3$. فرض کنید (L,d) یک $(\epsilon,\frac{3}{4})$-مثلث‌بندی از مرتبه $\frac{m}{4}$ دارد. برای $x\in L$ و $j\in[m]$ فرایند $A(x,j)$ را به این صورت تعریف می‌کنیم که S_x شامل $b\in L$ است که فاصله‌ی آن از x دقیقا 2^{k-j} است. واضح است که برای هر $x\in L$، هر عضو راهنما در S_x، حداکثر برای یک j، در $A(x,j)$ اتفاق می‌افتد. حال اگر $j\in[m]$ را تصادفی انتخاب کنیم، داریم:

$$Pr_j[A(x,j)]\leq\frac{|S_x|}{m}\leq\frac{1}{4} \tag{6}$$

حال جفت برگ $(x,y)\in L\times L$ را با روند زیر تصادفی انتخاب می‌کنیم:

۱) x را به صورت تصادفی انتخاب می‌کنیم.

۲) $j\in[m]$ را به صورت تصادفی انتخاب می‌کنیم.

۳) y را به صورت تصادفی از تمام نقاطی که فاصله‌ی آن‌ها تا x دقیقا 2^{k-j} است انتخاب می‌کنیم (معادلا کوچکترین جد مشترک x و y در عمق $j-1$ است).

چون x, j به صورت مستقل انتخاب شده‌اند، بنا به (۶) داریم:

$$Pr_{x,j,y}[A(x,j)] \leq \frac{1}{4}$$

همچنین j مستقل از y است و داریم:

$$Pr_{x,j,y}[A(y,j)] \leq \frac{1}{4}$$

بنابراین نتیجه می‌شود:

$$Pr_{x,j,y}[A(x,j) \vee A(y,j)] \leq \frac{1}{2} \quad (7)$$

ادعا: اگر هیچ یک از $A(x,j)$ و $A(y,j)$ اتفاق نیفتد، آنگاه $D(x,y)^+ \geq 4d(x,y)$ و $D(x,y)^- = 0$.
این ادعا حکم را ثابت می‌کند، چرا که با توجه به (۷)، وجود دارد $j = j_\circ$ به طوری که:

$$Pr_{x,j,y}[A(x,j) \vee A(y,j) \mid j = j_\circ] \leq \frac{1}{2}$$

به عبارت دیگر $2\epsilon n^2 \leq \frac{1}{2}n.\frac{n}{2^{j_\circ+1}}$ زوج متمایز از برگ‌های $(x,y) \in L \times L$ وجود دارد که هیچ یک از $A(x,j)$ و $A(y,j)$ اتفاق نمی‌افتد و با توجه به ادعا $D(x,y)^+ \geq 4d(x,y)$ و $D(x,y)^- = 0$ و این یعنی اینکه مثلث‌بندی فوق $(\epsilon, \frac{3}{4})$-مثلث‌بندی نیست و حکم ثابت می‌شود. پس کافی است ادعا را ثابت کنیم.

برای اثبات ادعا، $b \in S_x \cap S_y$ بگیرید و فرض کنید z کوچکترین جد مشترک x, y باشد. بنابراین اگر b از نسل z باشد، آنگاه دقیقا یکی از $d(x,b)$ یا $d(y,b)$ باید برابر با $d(x,y) = 2^{k-j}$ باشد، که با فرض در تناقض است. بنابرای b از نسل z نیست و در نتیجه:

$$d(x,b) = d(y,b) \geq 2^{k-j+1} \Rightarrow D(x,y)^+ \geq 4d(x,y), D(x,y)^- = 0$$

و ادعا ثابت می‌شود. □

مراجع

[1] Robert Krauthgamer, *On Triangulation of Simple Networks* , 2007.

[2] J. M. Kleinberg, A. Slivkins and T. Wexler, *Triangulation and Embedding Using Small Sets of Beacons* , In 45th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, Page 444-453, 2004.

[3] Anupam Gupta and R. Ravi, *Algorithmic Applications of Metric Embeddings* , Lecture Note.

الگوریتم‌های آنلاین

کاوه حسینی

بخش دوم - الگوریتم‌های آنلاین تصادفی[۱]

۱ معرفی الگوریتم‌های آنلاین تصادفی

در بسیاری از مسایل از جمله مسئله‌ی صفحه‌بندی ،الگوریتم‌های آنلاین اگر انتخاب‌های تصادفی داشته باشند ممکن است کارایی بهتری داشته‌باشند.

تعریف ۱. *الگوریتم تصادفی آنلاین A یک توزیع احتمال $\{A_x\}$ روی فضای الگوریتم‌های قطعی آنلاین است.*

ضریب رقابتی یک الگوریتم تصادفی آنلاین ALG نسبت به یک دشمن خاص تعریف می‌شود. دشمن دنباله‌ی درخواست‌های σ را تولید می‌کند و هنگام تولید دنباله از ساز و کار الگوریتم ALG آگاه است. حال سوال اساسی این است: هنگام تولید درخواست‌ها آیا دشمن می‌تواند انتخاب‌های تصادفی انجام شده‌ی قبلی توسط ALG را ببیند یا نه؟ دشمن‌های فراموشکار[۲] برخلاف دشمن‌های توافقی[۳] این توانایی را ندارند. سه نوع دشمن توسط بن، دیوید و بقیه در [۲] معرفی شده‌اند که در زیر آورده شده است.

تعریف ۲. *دشمن فراموشکار:دشمن فراموشکار همه‌ی دنباله‌ی درخواست را باید از همان اول و قبل از اینکه هر درخواستی پاسخ داده‌شود تولید کند.ولی از نحوه‌ی توزیع احتمال روی الگوریتم‌های قطعی آگاه است.*

تعریف ۳. *دشمن توافقی آنلاین[۴]: این دشمن می‌تواند الگوریتم آنلاین را ببیند و درخواست بعدی خود را برمبنای پاسخ الگوریتم به درخواست‌های قبلی بدهد.دشمن بایستی درخواست‌های خود را به صورت آنلاین و بدون اطلاع از پاسخ الگوریتم به درخواست‌های حال و آینده مطرح کند.*

تعریف ۴. *دشمن توافقی آفلاین[۵]: این دشمن همانند دشمن توافقی آنلاین است با این تفاوت که می‌تواند دنباله را به شکل آفلاین تولید کند.*

تعریف ۵. *به الگوریتم تصادفی آنلاین ALG c-رقابتی نسبت به دشمن فراموشکار گفته می‌شود اگر ثابت b وجود داشته باشد به طوری که برای هر دنباله‌ی درخواست σ که توسط دشمن فراموشکار تولید شده‌است داشته‌باشیم، $E[ALG(\sigma)] \leq c.OPT(\sigma)+b$. امید ریاضی روی همه‌ی انتخاب‌های تصادفی ALG با توجه به تابع توزیع احتمال مربوطه گرفته‌می‌شود.*

---
۱ Randomized On-line Algorithm
۲ Oblivious Adversary
۳ Adaptive adversary
۴ Adaptive online adversary
۵ Adaptive offline adversary

فرض کنید الگوریتم تصادفی آنلاین ALG و دشمن توافقی آنلاین (توافقی آفلاین) ADV داده‌شده‌است و $E[ALG(\sigma)]$ و $E[ADV(\sigma)]$ به ترتیب امید ریاضی هزینه‌ی پاسخ به دنباله‌ی تولیدشده توسط ADV برای ALG و ADV باشد. به الگوریتم ALGc -رقابتی نسبت به دشمن توافقی آنلاین (آفلاین) گفته‌می‌شود اگر ثابت b وجود داشته باشد به طوری که برای همه‌ی دشمن‌های توافقی آنلاین (آفلاین) ADV، $E[ALG(\sigma)] \leq c.E[ADV(\sigma)] + b$ که امید ریاضی روی همه‌ی انتخاب‌های تصادفی ALG گرفته‌می‌شود.

قضیه ۶. *اگر یک الگوریتم تصادفی آنلاین c - رقابتی نسبت به دشمن توافقی آفلاین وجودداشته‌باشد، یک الگوریتم آنلاین c - رقابتی قطعی وجود دارد.*[۲]

قضیه ۷. *اگر ALG یک الگوریتم تصادفی آنلاین c -رقابتی نسبت به دشمن توافقی آنلاین باشد، ALG یک الگوریتم تصادفی آنلاین $(c.d)$ - رقابتی نسبت به دشمن توافقی آفلاین است.*[۲]

به عبارتی دیگر از قضیه ۶ نتیجه می‌شود که تصادفی کردن الگوریتم در مقابل دشمن‌های توافقی تاثیری ندارد.

نتیجه ۸. *اگر یک الگوریتم تصادفی c -رقابتی نسبت به دشمن توافقی آنلاین وجود داشته‌باشد، آنگاه یک الگوریتم قطعی c^2 - رقابتی قطعی وجود دارد.*

راقاوان و سنیر [۵] نشان دادند در مقابل دشمن‌های توافقی هیچ الگوریتم تصادفی آنلاین برای مسئله‌ی صفحه‌بندی از k - رقابتی بهتر وجود ندارد. به همین دلیل روی دشمن‌های فراموشکار تمرکز می‌کنیم و نشان می‌دهیم می‌توان کران k برای الگوریتم‌های قطعی را با تصادفی کردن به شکل نمایی بهبود بخشید. یکی از این الگوریتم‌ها، علامت‌گذاری تصادفی[۶] است که توسط فیات و بقیه [۳] ارائه شد.

علامت‌گذاری تصادفی: الگوریتم از استراتژی علامت‌گذاری استفاده می‌کند. با هر بار بروز خطا یکی از بخش‌های بدون علامت به طور تصادفی انتخاب شده و حذف می‌شود.

الگوریتم علامت‌گذاری تصادفی

در ابتدا همه‌ی بخش‌ها علامت‌دار شده‌اند. با درخواست بخش p:

۱. اگر p در M_1 وجود ندارد:
   - اگر همه‌ی بخش‌ها در M_1 علامت‌دار هستند، علامت همه را بردار.
   - p را با بخشی که به طور تصادفی از بین بخش‌های بدون علامت انتخاب شده‌است عوض کن.

۲. p را علامت‌دار کن.

عدد $H_k = \sum_{i=1}^{k} 1/i$ را k-امین عدد هارمونیک بگیرید که می‌توان با $\ln k$ تقریب زد. داریم:
$$\ln(k+1) \leq H_k \leq \ln k + 1$$

قضیه ۹. *الگوریتم علامت‌گذاری تصادفی $2H_k$- رقابتی است.*[۳]

قضیه ۱۰. *ضریب رقابتی هیچ الگوریتم تصادفی آنلاین صفحه‌بندی نسبت به دشمن فراموشکار از H_k کمتر نیست.*[۳]

الگوریتم‌های پیچیده‌تری در [۱و۴] معرفی شده‌اند.

۲ تحلیل الگوریتم علامت‌گذاری تصادفی

مرجع [۶] را ببینید.

[۶] Randomized Marking

۳ کران پایین برای همه‌ی الگوریتم‌های آنلاین تصادفی

۱.۳ یک روش مفید

چگونه می‌توانیم یک کران پایین برای ضریب رقابتی هر الگوریتم تصادفی نسبت به دشمن فراموشکار بیابیم؟ این کار را با انتخاب یک توزیع D از دنباله‌های ورودی و محاسبه‌ی امید ریاضی هزینه‌ی بهترین الگوریتم آنلاین و مقایسه‌ی آن با امید ریاضی الگوریتم MIN روی توزیع D انجام می‌دهیم.

فرض کنید $C_H(\sigma)$ هزینه‌ی الگوریتم قطعی H روی دنباله‌ی σ باشد. می‌گوییم $A\alpha$-رقابتی است اگر برای هر دنباله‌ی σ:

$$Exp[C_{A_x}(\sigma)] \leq \alpha C_{MIN}(\sigma) + c$$

فرض کنید σ^j، j عضو اول σ باشند. فرض کنید یک توزیع D روی دنباله‌های ورودی σ داریم. j را ثابت بگیرید. از دو طرف نامساوی بالا می‌توان نسبت به دنباله‌ی σ روی توزیع D امید ریاضی گرفت.

$$Exp_y[Exp_x[C_{A_x}(\sigma_y^j)]] \leq \alpha Exp_y[C_{MIN}(\sigma_y^j)] + c$$

با استفاده از قضیه‌ی فوبینی[۷] می‌توان امید ریاضی‌ها را جابه‌جا کرد.

$$Exp_x[Exp_y[C_{A_x}(\sigma_y^j)]] \leq \alpha Exp_y[C_{MIN}(\sigma_y^j)] + c$$

قرار دهید

$$m_j = \min_H(Exp_y[C_H(\sigma_y^j)])$$

داریم

$$m_j \leq \alpha Exp_y[C_{MIN}(\sigma_y^j)] + c$$

بنابراین

$$\frac{m_j}{Exp_y[C_{MIN}(\sigma_y^j)]} \leq \alpha + \frac{c}{Exp_y[C_{MIN}(\sigma_y^j)]}$$

فرض کنید D طوری انتخاب شده‌است که

$$\lim_{j\to\infty} Exp_y[C_{MIN}(\sigma_y^j)] = \infty$$

بنابراین

$$\lim_{j\to\infty} \frac{m_j}{Exp_y[C_{MIN}(\sigma_y^j)]} \leq \alpha$$

این نامساوی بیانگر چیست؟ یعنی ضریب رقابتی هر الگوریتم تصادفی آنلاین حداقل به اندازه‌ی نسبت امید ریاضی هزینه‌ی بهترین الگوریتم قطعی آنلاین به امید ریاضی بهترین الگوریتم قطعی آفلاین است هنگامی که امید ریاضی روی دنباله‌های به اندازه‌ی کافی طولانی گرفته‌می‌شوند. می‌توانیم D را به طور دلخواه انتخاب کنیم تا نسبت را بیشینه کنیم.

حال قضیه ۱۰ را ثابت می‌کنیم:

اثبات. برای اینکه نامساوی

$$m_j \leq Exp_x[Exp_y[C_{A_x}(\sigma_y^j)]]$$

تا حد ممکن محکم[۸] باشد D را طوری انتخاب می‌کنیم که هر الگوریتم قطعی آنلاین به اندازه‌ی یکسان بد عمل کنند. در این حالت می‌توانیم این را با انتخاب σ_i به طور یکنواخت از بین $k+۱$ بخش موجود انتخاب کرد. با توجه به اینکه $M_۱$ فقط شامل k بخش است هر الگوریتم قطعی برای هر درخواست σ_i هزینه‌ی $\frac{۱}{k+۱}$ می‌پردازد پس $m_j = \frac{j}{k+۱}$.

با استفاده از روش ارائه‌شده نتیجه می‌گیریم

$$\alpha \geq \lim_{j\to\infty} \frac{j}{(k+۱)Exp_y[C_{A_x}(\sigma_y^j)]}$$

[۷] Fubini Theorem
[۸] Tight

حکم قضیه را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\lim_{j\to\infty} \frac{j}{Exp_y[C_{A_x}(\sigma_y^j)]} = (k+۱)H_k$$

برای اثبات این ادعا بایستی رفتار الگوریتم MIN را بررسی کنیم. σ را به مرحله‌های تصادفی تقسیم می‌کنیم. مرحله‌ی i شامل درخواست‌هایی با اندیس در $[X_i, X_i+۱, \ldots, X_{i+۱}-۱]$ هستند که $X_۰ = ۱$ و

$$X_{i+۱} = \min\{t : \{\sigma_{X_i}, \sigma_{X_i+۱}, \ldots, \sigma_t\} = \{۱, \ldots, k+۱\}$$

توجه شود که X_iها متغیرهای تصادفی هستند. هر مرحله دارای درخواست به فقط k بخش است و اگر MIN در مرحله‌ای خطا داشته‌باشد، خطای بعدی نمی‌تواند قبل از مرحله‌ی بعد رخ‌دهد. بنابراین تعداد خطاهای MIN روی σ حداکثر برابر تعداد خطاهایی است که تا زمان j رخ می‌دهند. پس امید ریاضی هزینه‌ی MIN حداکثر برابر امید ریاضی تعداد مراحلی است که تا زمان j وجود دارند. پس

$$Exp_y[C_{MIN}(\sigma_y^j)] \leq ۱ + Exp[\max\{p : X_p \leq j\}]$$

با توجه به اینکه متغیرهای تصادفی $\{Y_i\} = \{X_{i+۱} - X_i : j \geq ۰\}$ مستقل و هم توزیع هستند، یک فرایند تجدید[۹] بدست می‌دهند. با استفاده از قضایای مقدماتی در نظریه‌ی فرایندهای تجدید داریم:

$$\begin{aligned}\lim_{j\to\infty} \frac{j}{۱ + Exp[\max\{p : X_p \leq j\}]} &= \lim_{j\to\infty} \frac{j}{Exp[\max\{p : X_p \leq j\}]} \\ &= Exp[\text{length of phase}] \\ &= Exp[X_۱ - ۱] \\ &= Exp[X_۱] - ۱\end{aligned}$$

نشان دادیم

$$\alpha \geq \frac{Exp[X_۱] - ۱}{k+۱}$$

حال بایستی $Exp[X_۱]$ را محاسبه کنیم. بنابر تعریف

$$X_۱ = \min\{t : \{\sigma_۱, \ldots, \sigma_t\} = \{۱, \ldots, k+۱\}\}$$

هر σ_i به طور یکنواخت بین k+۱ بخش توزیع شده است و از بقیه‌ی درخواست‌ها مستقل است. محاسبه‌ی $Exp[X_۱]$ در این حالت با مسئله‌ی جمع کننده‌ی کوپن[۱۰] هم‌ارز است. $Exp[X_۱]$ نشان‌دهنده‌ی امید ریاضی تعداد کوپن‌های لازم برای یک جمع کننده‌ی کوپن است به طوری که همه‌ی کوپن‌های مجزا را بدست آورد. برای حل مسئله تعریف می‌کنیم $Z_i = \min\{t :| \{\sigma_۱, \ldots, \sigma_t\} |= i\}$ که $i = ۱\ldots, k+۱$. حال داریم

$$\begin{aligned}Exp[X_۱] = Exp[Z_{k+۱}] &= \sum i = ۱^k (Exp[Z_{i+۱}] - Exp[Z_i]) + Exp[Z_۱] \\ &= \sum_{i=۱}^{k} Exp[Z_{i+۱} - Z_i] + ۱ \\ &= (k+۱)(۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \cdots + \frac{۱}{k}) + ۱ \\ &= (k+۱)H_k + ۱\end{aligned}$$

پس

$$\alpha \geq \frac{[(k+۱)H_k + ۱] - ۱}{k+۱}$$

□

[۹] Renewal Process

[۱۰] Coupon collector problem

۴ تحلیل الگوریتم انتخاب تصادفی

مرجع [۶] را ببینید.

مراجع

[1] D. Achlioptas, M. Chrobak and J. Noga, *Competitive Analysis of Randomized Paging Algorithms* , Theoretical Computer Science, 234:203-218, 2000.

[2] S. Ben-David, A. Borodin, R.M. Karp, G. Tardos and A. Wigderson , *On the Power of Randomization in On-line Algrorithms* ,Algorithmica, 11:2-14, 1994.

[3] A. Fiat and RM. Karp and LA. McGeoch and DD. Sleator and NE. Young , *Competitive paging algorithms* , Journal of Algorithms 12:685–699, 1991.

[4] LA. McGeoch and DD. Sleator, *A Strongly Competitive Randomized Paging Algorithms* , Algorithmica, 6:816-825, 1991.

[5] P. Raghavan and M. Snir , *Memory Versus Randomization in On-line Algorithms* , IBM Journal of Research and Development, 38:683-708, 1994.

[6] M. X. Goemans , *Advanced Algorithms Cours* , Lecure Notes, September 1994.

مجله‌ی ریاضی شریف از هر گونه همکاری در تمامی زمینه‌ها از جمله تهیه یا معرفی مطالب علمی و توصیفی از جانب دانشجویان و اساتید استقبال به عمل می‌آورد. لازم به ذکر است که اکثر همکاران فعلی این مجله به‌صورت کاملا داوطلبانه با مجله همکاری می‌کنند و اساس کار این نشریه بر مبنای همکاری داوطلبانه‌ی اهالی دانشکده‌ی ریاضی قرار گرفته‌است.

تماس با ما:

mathematicsjournal@gmail.com
www.sharifmathjournal.ir